

# 初等几何教程 下册

(立体几何)

(法) J. 阿达玛 著

上海科学技术出版社

# 初等几何教程

下 册

(立体几何)

[法] J. 阿达玛 著

朱 德 祥 译

上海科学技术出版社

## 內 容 提 要

本书是法国数学家 G. Darboux 主編的初等数学教程之一的中譯本。除詳細而严格地論述了目前中学所学的立体几何內容外,还包括了常用曲綫、測量概念、以及有关近世几何方面等內容。书中附有大量习题,頗有启发性。

本书可供中学数学教师、师范院校数学系师生参考。

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, II.

J. Hadamard · 1932

初等几何教程(下册)

(立体几何)

朱 德 群 譯

---

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

---

上海新华印刷厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印張 20 20/32 排版字数 489,000

1966 年 3 月第 1 版 1966 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-10,000

統一書号 13119·706 定价(科五) 2.50 元

## 譯 者 序

本书是由法文原著第七版(1932年)譯出,由于法文本几經修訂,原书中所引上册(平面几何)以及本册的节次編号和习题編号,往往与实际不符,凡譯者注意到的已加更正,并校正了排版方面的若干錯誤,但难免还有遺漏,請讀者惠予协助校正。

由于我們在上册按俄譯本增譯了习题解答,增加了大量插图,同时原书节次和插图編号都有缺漏,所以本册对节次和插图都重編了号碼。但习题編号未动。

本书上册出版后,收到了許多讀者来信,反映較好,并希望下册能早日出版,由法文第二版序言(上册)可知,本书对提高法国中学几何教学,曾起过一定作用,它的翻譯出版相信对我国数学教学也会有一定参考价值。书中不少章节,只宜作为教师参考进修之用,自不待言。

限于本人水平,錯誤在所难免,尚祈讀者指正!

朱德祥 1964年10月于昆明师范学院

## 第七版序

这一版有一些相当重要的变动。

由于已故的累顾格 (Lesgourgues) 給我的提示, 我早已有意把多面角理論和球面多边形的理論融合为一, 而在这一方面, 布宜諾斯艾利斯<sup>①</sup> (Buenos-Aires) 大学的一位同事給了我一个有用的例。在这以前, 已对平面几何作过相应的修改, 变得简单了。这一次把它在空間部分实现了, 这样修改除了其他的一些优点外, 从教学法观点来看, 还有一个重要的优点, 即叙述变得更为清晰易明。

另一方面, 有一位教育工作者的意見, 我认为很宝贵, 根据他的建議, 我把前几版只放在习题中的空間圓的自反性质写成了一个附录 (附录 K)。在我們第一版引进的以及后来增补的 [特别是由布洛哈 (André Bloch) 增补的] 值得注意的結果之外, 又加入了罗伯特 (Robert), 戴倫斯 (Delens), 剛比艾 (Gambier) 等的研究結果。本书并未介紹这些重要工作的全部細节, 但却建立了最突出而又最简单的結論。

另外还有一些修改, 特别是关于射影几何 (关于平面射影对应图形基本定理的闡述, 但愿已經簡化了) 的修改工作, 关于凸多面体的柯西定理 (附录 J) 已重新給了証明。事实上, 也拉尔 (Louis Gérard) 新近提出了意見, 由于他的指示, 使我在这一版中能避免

① 阿根廷首都。——譯者注

了一些缺点。

今天的教育界放弃用“关于一直线的对称”这一词汇，是很有理由的，因为它掩盖了关于一直线或一平面的对称的主要区别。在设想替代的名词中，我喜欢用“轴反射(半周旋转)”(transposition)，理由纯粹是语法上的，因为应用这一词，就可说一点的轴反射象(transposé d'un point)或一图形的轴反射象(transposée d'une figure)，而其他拟议的名词，就我所知，都不能这样运用自如。

和以前各版一样，我对习题是相当重视的，这方面的主要更动是关于球面几何(习题 485 和 486)和射影几何的。我们要指出，作为习题 1294 的对象的定理是由一位青年几何学家提出的。两个非常精致的問題(习题 1204 和 1205)是从伊利俄维西(G. Ilievici)(《科学教育》)和卡斯纳(E. Kasner)(《美国数学月刊》)那里借用的。最后，根据洛桑<sup>①</sup>人馬雄(Marchand de Lausanne)(《数学教育》，1930, p. 291)提出的极为简单的证明(习题 1322)，可以不用三角工具而建立麻萊(Morley)定理。

J. 阿达瑪

<sup>①</sup> 洛桑是瑞士的地名。——譯者注

# 目 录

譯者序 .....	i
第七版序 .....	ii

## 第五編 平面与直綫

### 第一章 直綫和平面的交点

325. 平面、直綫和平面的相 关位置 .....	1
326~329. 决定平面的方式 .....	2
330. 两平面的交点 .....	4
331~331a. 两直綫的相关位置 .....	5
332~332a. 三平面的交点 .....	5
习题 423~427 .....	7

### 第二章 平行的直綫和平面

333~334. 平行直綫 .....	8
335. 直綫和平面的平行 .....	9
336~338. 平行平面 .....	10
339~340. 夹边相平行的两角相等 或相补。空間任意两直 綫間的角 .....	13
341~342. 三平行平面截任意一些 直綫成比例綫段 .....	14
343. 平行的直綫和平面性质 总结 .....	16
习题 428~438 .....	16

### 第三章 垂直的直綫和平面

344~347. 定义。距两已知点等远 的点的軌迹。直綫与平 面垂直的充要条件 .....	17
347a~349. 通过已知点与一直綫垂 直的平面。通过已知点 与一平面垂直的直綫 .....	19
350~351. 平面的垂綫和斜綫。点 到平面的距离。应用于 平行平面 .....	21
352. 和两已知直綫成等角的 直綫的軌迹 .....	22
习题 439~454 .....	23

### 第四章 二面角。垂直平面

353~354. 定义。二面角的平面角 .....	24
355. 二面角的轉向 .....	25
356~358. 二面角的比較 .....	26
359. 垂直平面 .....	28
360~361. 若两平面垂直, 則在一平 面上引它們交綫的垂綫, 必垂直于另一平面 .....	28
362. 通过已知直綫引垂直于	

已知平面的平面 .....	29
363~366. 互补二面角, 对棱二面角, 面相平行的二面角 .....	30
367. 垂直的直线和平面性质总结 .....	31
习题 455~462 .....	32
<b>第五章 直线在平面上的射影, 直线和平面的交角, 两直线间的最短距离, 平面面积的射影</b>	
368~368a. 射影, 平行线的射影 .....	33
369~369a. 直角射影定理和三垂线定理 .....	34
370~371. 直线和平面的交角, 最大倾斜线 .....	35
372. 二面角一面上一点到另一面和到棱的距离之比 .....	37
373. 两直线间的最短距离 .....	37
374. 平面面积的射影 .....	38
习题 463~473 .....	39
<b>第六章 球面几何初步概念</b>	
375~376. 球和一直线或平面的交点, 大圆 .....	41

376a. 一圆的极 .....	43
377~377a. 两大圆的交角 .....	45
378. 求一实球的半径 .....	46
<b>第七章 多面角, 球面多边形</b>	
379~379a. 定义, 对称三面角 .....	48
380. 多面角中任一面角小于其他各面角之和 .....	51
381~381a. 球面多边形, 和多面角的关系 .....	52
382~382a. 包围与被围的多面角和球面多边形, 用三已知面角能作三面角的条件 .....	54
383~384. 补三面角, 球面极三角形 .....	57
385~385b. 相等定律 .....	60
386~388. 等腰的三面角和球面三角形, 和平面三角形理论的异同 .....	63
389~390. 垂直和斜交大圆弧 .....	65
391. 球面坐标 .....	68
习题 474~498 .....	69
第五编习题 499~519 .....	73

## 第六编 多面体

### 第一章 一般概念

392. 定义 .....	76
393. 棱柱 .....	77
394. 棱柱侧面积 .....	79
395. 平行六面体 .....	79
396~397. 直平行六面体, 长方体 .....	80
398~400a. 棱锥, 棱锥被平行平面所截的截面, 正棱锥侧面积 .....	81
401. 凡多面体都可分解成棱锥 .....	83
习题 520~538 .....	84

### 第二章 棱柱的体积

402~403. 多面体体积定义 .....	85
404~406. 长方体体积 .....	86
407. 凡斜棱柱都等积于以直截面为底以侧棱为高的直棱柱 .....	89
408~409. 直平行六面体和直棱柱体积 .....	90
410~411. 任意平行六面体和棱柱体积 .....	92
习题 539~542 .....	94

### 第三章 棱锥的体积



412. 底面等积高又相同的两  
棱锥等积 .....94
413. 棱锥体积等于底和高乘  
积的三分之一 .....96

414. 棱台体积 .....97
415. 截棱柱体积 .....100  
习题 543~555 .....101  
第六編习题 556~576 ...102

## 第七編 运动. 对称. 相似

### 第一章 运动

- 416~418. 两图形全等的条件. 旋  
轉. 軸反射(半周旋轉) ...105
419. 平移 .....107
420. 螺旋运动 .....108
- 421~424. 任一螺旋运动可分解成  
关于不同直綫的两个軸  
反射. 运动的合成. 两  
个全等图形恒可使相重  
合: 若有一公共点, 通过  
一个旋轉; 在一般情况  
下, 通过一个螺旋运动 ...109  
习题 577~599 .....112

### 第二章 对称

- 425~426. 同一图形关于任两点或  
平面的两个对称图形是  
全等的 .....114

- 427~427a. 任一平面图形和它的对  
称形全等. 系 .....116
428. 两个对称图形的轉向相  
反 .....117
429. 两个对称的多面体是等  
积的 .....117
430. 一图形的对称軸, 对称心  
和对称平面 .....118  
习题 600~608 .....118

### 第三章 位似与相似

- 431~432. 定义. 基本定理 .....119
- 433~434. 逆命题. 三图形的位似  
軸. 四图形的位似平面 ...120
- 435~436. 相似形. 相似多面体 .....122
437. 两相似多面体体积之比 .....124  
习题 609~616 .....124  
第七編习题 617~628 ...125

## 第八編 圓 体

### 第一章 一般定义. 柱

438. 柱面. 錐面. 回轉曲面 ...127
439. 曲面的切綫. 柱面的情  
况 .....127
- 440~441. 柱面的截綫. 柱 .....128
- 442~443. 錐面. 錐 .....129
444. 回轉曲面 .....130
- 445~446. 圓底柱. 側面积 .....131
447. 柱体积 .....133  
习题 629~639 .....134

### 第二章 錐. 錐台

- 448~449. 回轉錐. 側面积 .....135
450. 錐体积 .....137
451. 回轉錐台的側面积 .....137
452. 錐台体积 .....139  
习题 640~657 .....139

### 第三章 球的性质

- 453~454. 球看作回轉面 .....141
- 455~456. 球的决定 .....143
- 457~458a. 外切錐和柱. 通过一条  
球外直綫的切平面 .....144
- 459~460. 球的交点 .....147

461~462. 对于球的幂, 正交球	149
463~464. 等幂(根)面, 轴, 心	150
465~470. 位似球, 公切面	152
习题 658~702	155
<b>第四章 球的面积和体积</b>	
471. 綫段繞和它在同一平面 内但不与它相交的軸旋 轉产生的面积	157
472~475. 球带面积, 球面积	159

476. 三角形繞位于它平面上 通过它的一顶点但不穿 过它的軸旋轉产生的体 积	161
477~478. 球扇形体积, 球体积	164
479~480. 球环的体积, 球台的体 积	166
习题 712~728	169
第八編习题 729~745	170

## 第九編 常用曲綫

### 第一章 橢圓

481~482a. 定义, 描述, 对称軸和 心	173
483. 坐标	176
484~485. 橢圓关于它的軸的方程, 解釋	177
485a. 橢圓是圓的正射影, 逆 定理	181
486. 准綫	182
487. 内部和外部区域	183
488. 准圓	184
489~489a. 直綫和橢圓的交点	185
490~490a. 橢圓的切綫	187
491. 焦点在切綫上射影的軌 迹	189
492~493. 作橢圓切綫使平行于一 已知綫, 两焦点到一条 切綫的距离之积	190
494. 通过橢圓平面上一点的 切綫	191
495~496. 龐斯雷(Poncelet)定理, 外切于橢圓的直角	193
习题 746~771	195

### 第二章 双曲綫

497~497a. 定义, 軸和中心	198
498. 双曲綫关于它的軸的方	

程, 准綫	200
499. 内部和外部点	202
500~501. 准圓	203
502. 和一直綫的交点	205
503~504. 漸近綫	206
505. 双曲綫包含在漸近綫所 成四角的两角之内	207
506. 双曲綫的切綫	208
506a~509. 切綫性质	209
510~511a. 双曲綫关于它的漸近綫 的方程, 切綫的相应性 质	213
习题 772~792	218

### 第三章 抛物綫

512~513. 定义, 軸	220
513a. 曲綫关于軸和頂点切綫 的方程	222
514~515. 和一直綫的交点	223
516~521. 切綫性质	226
522. 抛物綫看作橢圓或双曲 綫的极限	229
523~523a. 直径	232
524~527. 次切綫, 次法綫, 回到 曲綫方程	232
习题 793~816	235

### 第四章 螺旋綫

- 528~531. 柱的展开图形.....238
- 532~533. 螺旋线定义.....242
- 534~537. 螺旋线的切线.....243
- 538~539. 圆螺旋线,螺旋线的转向 247
- 540~541. 螺旋线在平行于柱轴的  
平面上的射影.....249
- 习题 817~822 .....252
- 第九编习题 823~851 ...253

## 第十编 测量概念

### 第一章 一般概念,平面测量

- 542~545. 定义,平面的水平性.....259
- 546~547. 平面测量定义.....261
- 548~549. 测线的决定.....262
550. 长度的直接丈量.....264
- 551~552. 角度的直接测量.....265
553. 三角形测量.....267
- 554~555. 长度和角度的间接测量...267
556. 三角测量.....269
- 557~564. 交会法,射线法,导线法,  
直角仪的使用.....270

### 第二章 水准测量

- 565~569. 水准仪,简单水准测量,  
复合水准测量.....274
- 570~572. 间接水准测量.....277
573. 基准水平面的选择,海  
拔.....279
- 574~575. 高程表示法,水准曲线,  
侧面图.....280
- 576~577. 各种简化法.....282
- ### 第三章 面积测量
- 578~582. 面积测量.....283
- 583~583a. 体积测量.....285
- 习题 852~858a .....286

## 立体几何补充材料

### 第一章 比例距离中心

- 584~590a. 比例距离中心.....288
- 591~598. 重心坐标,重心.....292
599. 截棱柱的体积.....298
- 600~602. 求点的轨迹,它们到一些  
已知点距离的平方乘以  
已知系数后有已知的和...299
- 603~604. 平面上四点间距离的关  
系.....302
605. 四面体体积表为棱的函  
数.....306
606. 空间五点间距离的关系...307
- 习题 859~877 .....308

### 第二章 透视的性质

- 607~609. 透视鸟瞰.....312
- 610~610a. 平行线的平行射影,平

- 行线的透视形,没影点...314
611. 平面图形的透视形,没  
影线.....316
612. 射影性质,无穷远线.....316
- 613~619. 交比.....317
620. 应用于完全四线形的对  
顶线.....321
- 621~623. 平面射影对应图形,已  
知平面图形的射影对  
应图形,由该平面图形中四  
点的对应点决定.....322
624. 平行射影的情况.....324
- 625~626. 存在着成射影对应的图  
形使四已知点(不共线)  
有已知的对应点.....325
627. 两个射影对应图形一般

可使其成透视.....327	
628. 同一图形的两个配极图 形是射影对应的.....329	
629~636. 成射影对应的点列和綫 束.....329	
637~639. 射影对应的各种表示式...334	
640~641. 二重点, 二重射綫.....336	
642. 应用.....338	
643~645. 对合.....340	
646~648. 对合的二重点.....342	
649~650. 对合之例.....343	
651. 在两个射影对应的点列 中, 两对对应点和两个二 重点形成对合.....344	
652~654. 应用于完全四綫形.....345	
655. 圆上的射影对应和对合, 由一点发出的弦的性质...346	
习题 878~922 .....349	
<b>第三章 对于球的极与极面, 空間     反演, 球面几何补充材料</b>	
656~658. 对于球的极与极面.....356	
659. 配极直綫.....357	
660. 配极图形.....358	
661~664. 反演: 基本性质 .....359	
665~667. 平面或球面的反形, 应 用于四面体.....362	
668~670. 圆的反形, 斜錐的逆平 行截口.....364	
671~672. 球极射影.....366	
673. 截两已知球成等角的球...367	
674. 通过同球上两圆的錐...368	
675~676. 相切的球.....368	
677~678. 应用反演于球面几何...371	
679. 在反演下交比不变.....372	
680~682. 球上的反演, 应用于切圆 373	
习题 923~988 .....374	
<b>第四章 球面多边形的面积</b>	
683~684. 单位选择, 月形面积.....382	

685. 两个对称球面三角形等 积.....384	
686. 球面三角形和多边形的 面积.....385	
687~688. 勒克舍勒 (Lexell) 定理 385	
习题 989~1000.....387	
<b>第五章 欧拉定理, 正多面体</b>	
689~690. 前言和限制.....388	
691~692. 有相同联络阶的面积.....389	
693. 单连通面积.....390	
694~695. 凡凸多面体都是零格的, 格不等于零的多面体举 例.....390	
696. 欧拉(Euler)定理 .....392	
697. 多面面的联络阶.....393	
698. 正多面角.....394	
699~700a. 正多面体, 一般性质.....396	
701. 正多面体的旋轉和对称...400	
701a~703a. 立方体, 正四面体.....402	
703~704. 共軛多面体.....405	
705. 例: 八面体 .....408	
706~707. 正多面体只能有五种.....409	
708. 正多面体作法.....412	
709. 有关正多面体的計算.....413	
习题 1001~1022 .....416	
<b>第六章 回轉錐和回轉柱的平面截     綫</b>	
710~711. 回轉錐的平面截綫, 准綫 420	
712. 回轉柱的情况.....425	
713~714. 逆定理, 通过一已知圆 錐曲綫的回轉錐顶点的 軌迹.....425	
715. 中心在焦軸上的一些双 切圆的性质.....430	
716. 由焦点和准綫給定的圆 錐曲綫的切綫性质.....431	
717~721. 圓錐曲綫关于两条切綫 及其相切弦的性质, 巴	

卜斯(Pappus)定理, 双曲线关于它的渐近线的性质.....432	749~751. 圆锥曲线由五点或五切线决定.....473
习题 1023~1044 .....435	752~753. 夏尔(Chasles)定理 .....474
<b>第七章 椭圆看作圆的射影, 以渐近线为坐标轴的双曲线</b>	754. 应用于直线和圆锥曲线的交点.....476
722~724. 圆的正交射影.....437	755. 视四已知点成已知交比的点的轨迹.....477
725. 应用于作图问题.....439	756~757. 对偶定理. 巴斯加(Pascal)和布利安双(Brianchon)定理.....477
726~728a. 直径, 共轭直径.....440	758~761. 关于圆锥曲线的极与极线.....479
729. 阿波罗尼(Apollonius)定理.....441	762~765. 配极圆锥曲线. 圆的情况.....481
730~730a. 椭圆关于两条共轭直径的方程.....442	766~767. 焦点的判别性质.....486
731~734. 与长度一定且两端在两定直线上滑动的线段相联系之点的轨迹. 椭圆的法线. 已知两共轭直径, 求作两轴 .....444	768~769. 代沙格(Desargues)定理.....487
735. 双曲线割线的性质.....450	770~772. 圆锥曲线的交点. 代沙格定理的应用.....491
736~740. 双曲线的直径.....451	773~774a. 二重极点, 公共割线和公共点的讨论.....494
习题 1045~1092 .....453	775~775a. 特殊情况. 相切的、双切的、密切的圆锥曲线.....498
<b>第八章 圆锥曲线的面积</b>	776. 两圆锥曲线投射成两圆.....502
741. 椭圆面积.....459	777. 对偶定理. 脐点.....502
742~743a. 双曲线扇形的面积.....459	778~778a. 相对的公共割线. 圆锥曲线系.....503
744. 抛物线弓形的面积.....464	习题 1108~1163a.....504
习题 1093~1107 .....466	补充材料习题 1164~1205 .....512
<b>第九章 圆底斜锥的截线. 圆锥曲线的射影性质</b>	
745~748. 斜圆锥的平面截线. 圆锥曲线的新定义.....468	

## 附 录

F. 关于几何问题的可解性...520	I. 关于正多面体和旋转群...541
G. 关于体积的定义.....526	J. 关于凸多面体的柯西(Cauchy)定理 .....558
H. 关于任意曲线的长度, 任意曲面的面积和体积的概念.....529	K. 空间的圆的自反性质.....566
	杂题 1206~1322 .....618

## 第五編 平面与直綫

### 第一章 直綫和平面的交点

**325.** 我們知道(平, 6)①, 所謂平面是这样一种面, 它上面两点所联的直綫整个位于这面上.

这样的面是无限的, 为了用图形表示出来, 只能画出它的某个有限部分, 通常画一个矩形, 在图 697 上以及以后就是这样办的.

按照上述定义, 一条直綫对于一个平面可能有三种不同的相关位置:

- 1° 直綫可能与平面有两个公共点, 因之整个位于这平面上;
- 2° 直綫可能与平面只有一个公共点, 这时称为直綫与平面相交.
- 3° 直綫与平面可能沒有任何公共点, 于是称为相互平行.

我們承认, 任何平面分空間为两区域, 各在平面的一側. 从一区到另一区, 不可能不穿过平面. 特別, 联一平面异側两点的直綫穿过平面.

反过来, 凡和平面相交的直綫, 被公共点分为两条半直綫, 各在平面的一側.

从定义还得出: 一个平面的全等图形是一个平面.

① 縮写(平, 6)代表本教程上册平面部分第 6 节. 下同.

反之,我們承认,任何二平面可以这样迭合:使一平面上任意給定的一条半直綫,迭合于另一平面上一条任意給定的半直綫(原点相迭合).

**326.** 我們曾采用(平, 6)下述公理:

**公理** 通过空間任意三点,有一个平面.

我們用下述定理来补足它:

**定理** 通过空間不共綫三点,只有一个平面.

設  $A, B, C$  为不共綫三点, 假定有两平面  $P$  和  $P'$  都通过这三点. 現証这两平面重合.

首先注意,由定义,这两平面公有直綫  $AB, AC, BC$ .

現令  $M$  为平面  $P$  的任一点(图 696). 过这一点可引一直綫使交直綫  $AB$  于  $D$ , 且交直綫  $AC$  于  $E$ . 平面  $P'$  含有点  $D$  及  $E$ , 因此必含整条直綫  $DE$ , 所以它含有点  $M$ .

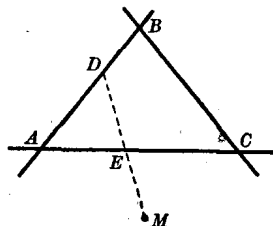


图 696

因此,平面  $P$  的所有点都属于平面  $P'$ , 仿此可証平面  $P'$  的所有点都属于平面  $P$ , 定理因而得証.

为了表达上述公理和定理的总的含义,我們說,不共綫三点决定一平面.

一直綫  $AB$  及其外一点  $C$  决定一平面. 因为含直綫  $AB$  和点  $C$  的条件,和含三点  $A, B, C$  的条件是完全可以互相轉化的.

同理,相交的二直綫  $AB, AC$  决定一平面, 这就是三点  $A, B, C$  所决定的平面; 两条平行直綫决定一平面, 因为按定义(平, 38)有一个平面含有这两直綫, 而另一方面, 由于这平面含有两直綫之一以及另一直綫上的一点, 所以是唯一的(見上段).

因此,表示一个平面,可用单一字母,或者用相应于这平面上

不共線三点,或一直線及一点,或(相交或平行的)两直線的字母.

**备注** 我們看出,通过給定直線  $D$  有无穷多个平面,因为通过这直線和空間任一点可作一个平面,而通过  $D$  以及不在这第一平面上的一点可作第二个平面,等等.

**327. 备注** 設有一图形,不是仅由一点构成,如果連結这图形上任意两点的直線整个属于它,那末这图形或者是一条直線,或者是一个平面,或者含有空間的所有点.

事实上,由假設,这图形至少含两点  $A, B$ , 因之含直線  $AB$ . 如果它只含有这直線,那末命題已証明了. 否則,設  $C$  为这图形上直線  $AB$  外的一点,只要重复上节定理的証明,就足以断定平面  $ABC$  属于这个图形. 如果这图形不再含其他的点,命題便証明了.

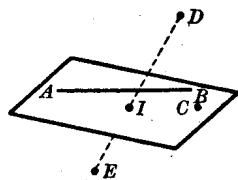


图 697

否則,設  $D$  为图形上在平面  $ABC$  以外的一点(图 697),所考虑的图形于是含有对平面  $ABC$  說来点  $D$  所不在的一侧的任何点  $E$ ,因为直線  $DE$  必然与这平面相交于一点  $I$ ,于是可看作由  $D$  和  $I$  所决定,从而这直線整个属于这图形. 按照同样的推理,这图形也含有对平面  $ABC$  說来点  $E$  所不在的一侧(即点  $D$  所在的一侧)的任何点  $F$ . 因此,它含有整个空間. 証毕.

### 328. 平面几何的公理(平, 40):

过直線外一点只能引一直線平行于該直線

在立体几何里依然成立,因为通过一点  $C$  所引一直線  $AB$  的平行直線必在平面  $ABC$  上,于是可引用上述公理.

于是我們依然可以說,通过直線外一点所引它的那条平行直線.

同理,从直線  $AB$  外一点  $C$  能引它的一条也只一条垂直直線,这垂直直線应属于平面  $ABC$ ,而在这平面上,定理已証明过了(平, 19).

相反地,从直線上一点則可引无穷多条直線和它垂直,即在通过它的每一平面上(326, 备注)都可以引一条(图 698).

由此可知,两直線可以同垂直于第三条直線而并不互相平行.



**329.** 平面  $ABC$  可視為由一直綫移动所产生, 这直綫恒通过点  $C$  而倚靠着直綫  $AB$ , 因为这样一条直綫总保持在所說的平面上, 而且另一方面, 从这平面上任一点 (除开通过  $C$  而平行于  $AB$  的那条平行綫上的点), 总可以引这样一条直綫:

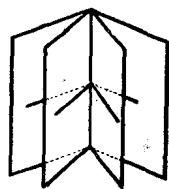


图 698

仿此, 一直綫  $xy$  保持平行于自身原始的方向  $AC$ , 倚靠着一定直綫  $AB$  而移动时 (图 699), 便产生出平面  $ABC$ , 或者說, 保持自身原始的方向, 倚靠着定直綫 (直綫的原始位置和定直綫假定是相交的) 而移动的直綫的軌迹是一个平面. 事实上, 按照几何軌迹的定义 (平, 33), 这表明下面的双重事实:  $1^\circ$  动直綫  $xy$  恒属于平面  $ABC$ ;  $2^\circ$  通过这平面上任一点有一直綫  $xy$  平行于  $AC$  而与  $AB$  相交.

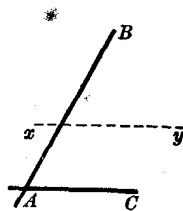


图 699

**330. 定理** 两个互异的平面有了一个公共点, 就有无穷多个公共点, 都在一条直綫上.

設两平面  $P, Q$  (图 700) 有一公共点  $A$  而不重合. 平面  $Q$  将空間分为两个区域, 为簡短計我們称之为这平面的上方和下方.

在平面  $P$  上通过点  $A$  任引一直綫  $MAM'$ . 可能这直綫全部属于平面  $Q$ , 如果是这样, 就証明了两平面有一公共直綫.

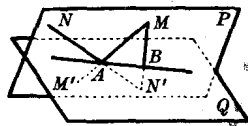


图 700

倘非如此, 我們知道点  $A$  分直綫  $MAM'$  为两部分, 一部分在平面  $Q$  上方, 另一部分在下方. 为确定計, 設  $M$  在平面  $Q$  上方而  $M'$  在下方.

同样, 引平面  $P$  的第二条直綫  $NAN'$ , 倘若它不属于平面  $Q$ ,