中学数学教材研究与教案选

第五册

北京师范大学出版社

前　言

多年来，广大数学教师在教学实践中积累了非常丰富的课堂教学经验，将这些经验进行交流与推广无疑将对开展中学数学教学的研究，提高数学教学质量有着积极的意义。为此，我们在翻阅了解放以来，尤其是近三、四年来有关中学数学教学的大量文章与资料的基础上，约请了全国二十多个省、市、自治区的二百多位教师撰写文章与教案，并经过精选和修改，编辑了《中学数学教材研究与教案选》这套书。本书的作者，绝大部分都具有二、三十年甚至更长时间的教学实践，其中数十名是特级教师。选入书中的文章或教案可以说是他们几十年辛勤劳动的结晶，也在一定程度上反映了全国某些地区中学数学教学的情况。

本书是按照一九八二年公布的《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》(征求意见稿）的教学体系，结合现行统编教材编写的。各章配备的教材分析或经验文章一般概括了课本各章节的主要内容及其在初等数学中的地位和作用，提出了教学目的和要求，对重点和难点还配备了适当数量的教案，有的还对教材的结构作了分析，对教学方法提出了一

些宝贵的建议。教案多数比较详尽，从中不仅能看到作者课堂教学的全过程，而且还能看出作者的一些意图和想法；少数教案较略，但言简意明、脉络清楚、重点突出。总之，本书就如何通过课堂教学加强学生的基础知识，进行基本技能的训练以及培养学生的能力等方面各具特色，可供广大中学数学教师研究和参考。还需指出的是书中的文章与教案一般都对学生提出了较高的要求，读者在选作参考时，应结合自己的的教学实践，而不能简单录用。

本书共分六册出版。前三册为初中部分，后三册为高中部分。具体内容安排：第一册是初一代数；第二册包括初二、初三代数；第三册包括初二、初三几何；第四册包括高一、高二代数与三角；第五册包括高一、高二立体几何与解析几何；第六册为高三代数与微积分。

参加本书编辑工作的有罗小伟、彭文逵、晨光、周耿等同志，最后由北京师范大学数学系钟善基、曹才翰先生审定。

由于水平有限，又兼仓促完稿，本书在内容的选材、文章与教案的安排以及文字的修饰等方面，还会存在许多问题，恳请同志们批评指正。

编　者

目　　录

立　体　几　何

平面解析几何

直线和平面(教案)

直线与平面平行的判定

教学目的

1. 使学生掌握直线与平面平行的判定定理和它的应用。

2. 使学生了解反证法在立体几何证明题中的运用。

教学过程

一、复习和思考：问：直线与平面有几种位置关系？教室里的日光灯和地面是属哪种关系？为什么？并画出表示这种位置关系的图形。

让一个学生回答并在黑板上画出图形。

二、讲解新课：针对学生的回答，教师指出，要正确回答这个问题，必须判断日光灯所在的直线和地平面是否有交点？因为直线和平面都可无限延伸，所以要得出正确的判断是不可能的。因此，我们需要找出一条比较实用的直线与平面平行的判定定理。

根据我们现有的知识，就会想到：定理的条件是否可考虑用两条直线的平行，因为两条直线的平行我们有办法去判定。为此，我们先考察一个实际例子。（把教室门作教具）

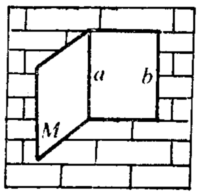


图　1

在教室门中（图1所示），a是与门框连在一起的门的边缘，当门绕着a转动时，无论门在什么位置（门关上除外），我们能发现（凭直观）门框的另一边b总与a平行，b也总与门平行。由此，我们可得到这样一个启发：若把a看成门平面M上的一条直线，门框b看成门平面M外的一条直线，那么只要$a /\!/ b$，就有$b /\!/ M$。如果把这个例子的结果加以抽象，就能得到课本（六年制重点中学高中数学课本《立体几何》，以下课本均指此书）20页的直线和平面平行的判定定理。关于定理的叙述和证明请学生阅读课本20页第六行至倒数第三行。阅读要求：(1)明确定理的条件是什么？结论是什么？(2)定理是用什么方法证明的？这种证题方法的步骤是怎样的？阅读完毕后思考（预先写在小黑板上）：

(1) 在空间四边形$ABCD$中（图2），DH、EF在平面ABD内，若$DH /\!/ EF$，则能推出$EF /\!/$平面BCD吗？若E、F分别为AB、AD的中点，能推出$EF /\!/$平面BCD吗？为什么？

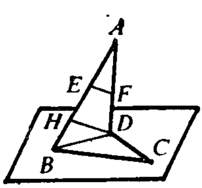


图　2

(2) 画两个相交平面，在一个平面内画一条直线和另一平面平行。

(3) 平面外一条直线能和平面内任一条直线都平行吗？为什么？

要求：(1)正确理解题意，分清题目条件和所求的结论。(2)正确画出图形。(3)怎样应用直线和平面平行的判定定理来解答各题。思考后在读议小组里（由前后两个课桌上的四位学生组成）按上述阅读和参考题的要求议论。

在学生阅读课本和思考题时，教师巡视，发现和解决学生在阅读课本和思考题时所产生的各种问题。

学生议论后，请三位学生回答（第(2)题要求在黑板上作出图形），其他学生可作补充。

最后教师小结下面几点：

1． 在理解和应用判定定理时，对定理的条件要注意二点：

(1) 平面外的一条直线一定要平行平面内的一条直线，如不是平行平面内的一条直线就不能推出直线和平面平行的结论。所以在(1)题的前半题中，由于 DH 不在平面 BCD 中，尽管 $EF \parallel DH$，但不能得出 $EF \parallel$ 平面 BCD 的结论。至于后半题，由三角形中位线定理得 $EF \parallel BD$，又 $BD \subset$ 平面 BCD，所以可由判定定理得出 $EF \parallel$ 平面 BCD。

(2) 平面外一条直线平行于平面内一条直线，这条直线是平面中任意一条直线，只要它平行平面外的这条直线就可以。所以，应用判定定理的关键是设法在平面上找出一条与平面外一条直线平行的直线。这样，要证线面平行就转化为证线线平行。如(2)题中，若 $M \cap N = a$，要在 N 中画一条直线平行于平面 M，那只要在平面 N 内画一条直线 c 平行 a 即可，$\because a \subset M$（图3）。

2． 本定理的证明，用的是反证法。反证法是指利用推翻命题结论的反面，从而说明命题正确的一种论证方法。这种

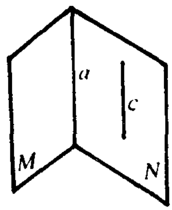


图 3

证题方法的过程是这样的：第一步，提出与命题结论相反的假设（如定理证明中假设$a\cap\alpha=A$）。第二步，由命题的条件和第一步假设（如定理中$a /\!/ b$，假设$a\cap\alpha=A$）出发，根据定义、公理、定理或公式等推出某一结论（如定理证明中推出$a /\!/ c$，c是平面α内过A点的直线）。第三步，发现推出结论不合理，如推出的结论与条件或某一定义、公理、定理、公式矛盾，或推出二个自相矛盾的结论（如定理证明中由假设$a\cap\alpha=A$，而推出的结果是$a /\!/ c$）。因此得出假设不成立，从而得到命题结论是正确的。反证法一般用于命题结论往往不能或不易直接由条件推证出的情况。如判定定理要直接由直线平行平面的定义来推证是不可能的，所以采用反证法。又如思考题第（3）题，直接推证出结论也是困难的，所以也可尝试用反证法来证：

假设直线l与平面M中的任一直线都平行，那么我们在平面M内取两条相交直线a、b。$\because l /\!/ a$，又$l /\!/ b$，$\therefore$得$a /\!/ b$，这与a、b相交矛盾，所以假设不成立，也就是说直线l不能与平面M中的任一直线都平行。

三、课内思考题：

课本 p.22 练习第 1 、第 2 题。课本 p.22 习题三第 2 (1)(3)题。

思考后要求学生回答。

四、布置作业：

（1）如图 4 所示：直线l是平面M外一条直线，直线m

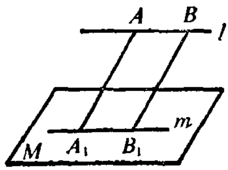


图 4

是平面M内一条直线，A_1、B_1是m上二点，A、B是l上两点，若$AA_1 \perp\!\!\!\!\perp BB_1$，求证$l \parallel M$.

（2）第23页习题三 9 题。

（3）设AB、BC、CD是不在同一平面内的三条线段，那么这三条线段的中点E、F、G所决定的平面M，必平行于线段AC和BD.

（4）p.23 习题三 4 题。

上海育才中学　章淳立

直线和平面交角

教学目的

1．使学生掌握平面的斜线和斜线在平面上射影的概念及它们之间的关系。

2．使学生掌握直线与平面交角的定义，并会求直线和平面的交角。

教学过程

一、复习和思考：问：在平面几何中，（1）如何定义一条直线的垂线和斜线？（2）如何定义一条斜线在一条直线上的射影？（3）过直线外一点所引的这条直线的垂线和斜线有什么关系？斜线和射影又有什么关系？

先由“读议小组”议论后，请一位学生回答上述问题，

并在黑板上画出图形，学生和教师都可补充。

二、讲解新课：

教师提出：如果将上述问题中的直线改成平面，那么上述三个问题如何解答呢？请同学们阅读课本28页第5行至29页14行，这一段内容回答了这些问题。

阅读要求：搞清平面的斜线、垂线，斜线在平面上射影的定义和三者之间的关系。阅读后思考（预先写在小黑板上）：

（1）P是直角三角形ABC所在平面M外的一点，若$PA=PB=PC$，求证：P在平面M内的射影必为$\triangle ABC$斜边的中点O。

（2）从平面M外一点P到这个平面引垂线PO以及斜线PA，PB，已知PA和PB的长分别是8cm，5cm，它们在平面M内的射影OA、OB之比是$4:\sqrt{3}$，求P到平面M的距离。

思考要求：画出图形，作出解答后在读议小组交流解法，同时让二位学生板演。对板演的解法同学可提出修改、补充和其他意见。

最后教师小结：

1.（1）题的目的在于要搞清平面斜线、斜线在平面上的射影、平面垂线的概念和相互间关系。首先要能作出正确图形，可利用学生板演的图并加以完善（如图1所示）．证明途径可有二条：一是连接PO，证明$PO\perp M$；二是过P作M的垂线，

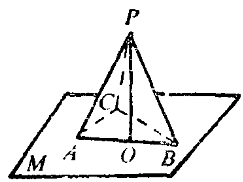


图 1

证明垂足与O重合。经分析题意有条件$PA=PB=PC$，于是由斜线与射影的关系得PA、PB、PC的射影长相等。也就是P点在平面M上的射影到$Rt\triangle ABC$三顶点的距离相等，所以P点在平面M上的射影为$Rt\triangle ABC$的外心，即为AB中点。显然，应该用第二条途径来证。

如把本题推广，可得一个以后在计算立体图形时很有用的结论：如平面外一点到平面内一多边形各顶点的距离相等，那么，这点在平面内的射影必为这多边形的外心。证明的思路同上述。

2．(2)题也应根据斜线和射影的定义作出正确图形（如图2所示），然后考虑解法。根据题意可知，要求PO只须解直角$\triangle AOP$或直角三角形$\triangle BOP$，这样求空间线段的问题就转化为解两个直角三角形的问题。进一步的分析可知，$Rt\triangle AOP$和$Rt\triangle BOP$中都只有一个边长条件，无法解出这两个三角形中其他边长。但题中还有一个条件：$AO:BO=4:\sqrt{3}$，所以启发我们考虑把两个直角三角形联合起来考虑，为此，可引进未知量：设$AO=4a$，则$BO=\sqrt{3}a$，利用勾股定理可列出方程$AP^2-AO^2=PO^2=PB^2-BO^2$，解得$a=\sqrt{3}$，$BO=3$。所以得：$PO=\sqrt{PB^2-BO^2}=4$。

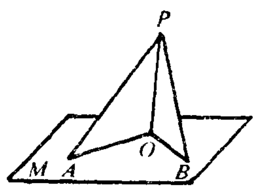


图 2

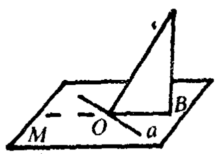
如本题在原来条件下加上AO，BO的夹角为120°，改求$\angle APB$的大小，那该怎么解呢？从图2中容易想到：只要连AB，问题就转化为解$\triangle APB$了。因为AP、BP都是已

知的，关键在求 AB. 而AB 又可从解$\triangle AOB$中获得.

从这题的求解过程中，我们可以看到，求空间的线段的长度和角的大小时，往往把所求线段或角转化为某三角形中的线段或角，使原来的求解问题转化为解三角形问题. 这种转化一般是利用空间图形的性质来实现的.

3. 对学生板演作出评价.

教师继续讲解：有了射影的概念后，我们接下来就可讨论直线和平面的交角问题.



3 图

出示教具（图 3）：在糊上白纸的平板上装一根可绕固定点O转动的细棒 a，在 O 点用橡皮泥粘上一根细棒 l（不影响a的转动）. 我们把a、l 看成是直线，平板看成平面M. 那么 l 的不同位置就反映了直线与平面不同的倾斜度；那么怎样来定义 l 与平面M的交角合理呢？我们先将 l 固定在某一位置，并在 M 上画出 l 的射影 OB. 然后我们把 a 绕O转动，通过观察，我们可以发现，l 与a 的交角当 a 与OB重合时所夹锐角为最小，所夹钝角为最大. 这一点我们还可以从理论上给予严格的证明. 证明如下：

图 4 中，l 是平面M 的斜线，OB是l 在M上的射影. c 是M中任一条直线（不妨设它过斜线足 O，否则可过O 作 c 的平行线，而不改变与 l 的交角）. 过 A 作 c 的垂线 AD（在教具上 搭

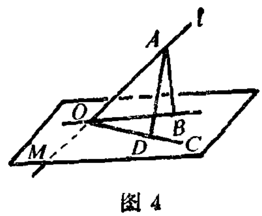


图 4

出模型），则有：

$$\sin\angle AOD=\frac{AD}{AO};\qquad \sin\angle AOB=\frac{AB}{AO}.$$

因为 $AD>AB$，所以有 $\sin\angle AOD>\sin\angle AOB$。
又因为$\angle AOD$和$\angle AOB$都是锐角，所以$\angle AOB<\angle AOD$。

因为一条射线与一直线交成的两角之和总是 180°，所以 l 与射影交成的两角，因锐角为最小，故钝角就为最大。

此外当直线 l 位置固定时，射影OB的位置也就确定了，这样 l 与射影的交角也确定了，因此我们规定 l 与它在平面M上射影交成的锐角（不用钝角是为以后运算方便）为 l 与平面M的交角。

当直线 l 垂直平面M时，l 与平面M上的所有直线都垂直，所以 l 与平面M的交角为 90°。若直线 l 在平面M内，那么我们就说直线 l 与平面M的交角为 0°。

知道了直线与平面交角的定义，要学生思考（预先写在小黑板上）：

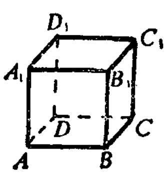


图 5

（1）在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中（图 5），写出对角线BD_1与各面的交角。

（2）p.20 例题。

对充要条件先作一解释，然后再说明，几何中的判定定理和性质定理有的能用充要条件来叙说。如直线和平面垂直的判定定理和性质定理就能用充要条件来叙说：一条直线垂直于一个平面的充要条件是这条直线垂直于平面中二条相交直线。有的判定定理和性质定理不能用充要

条件来叙说，如直线与平面平行的判定定理和性质定理就属这种情况。

(3) 直角三角形 ABC 的直角顶点在平面 M 内，斜边 $BC \parallel$ 平面 M，$BC=60\text{cm}$，直角边 AB、AC 在平面 M 内的射影 AB_1 和 AC_1 分别为30cm和50cm，求(1) BC 与平面 M 的距离。(2) AB、AC 与平面 M 的交角。(3) 射影 AB_1 和 AC_1 的交角。

思考题要求：(1) 熟练找直线和平面的交角。(2) 正确画出图形，学习较复杂空间图形计算题的思维方法。

思考后由读议小组议论，并由三位学生板演且作简要讲评。最后教师小结：

1. (1) 题要写出 BD_1 与各面交角，现以找 BD_1 与背面 DCC_1D_1 交角为例：根据直线与平面交角的定义先找出 BD_1 在平面 DCC_1D_1 上的斜线足 D_1，然后在 BD_1 上取一点作平面 DCC_1D_1 的垂线，事实上，这条垂线图中已有，即 BC，C 是垂足，所以交角为 $\angle BD_1C$。其他交角都可按这种步骤去找。

2. 在证明用充要条件叙说的命题时，要分清条件和结论，然后要给出充分性和必要性两方面的证明（这两个方面证明时无先后次序之分）。证明时要分清充分性和必要性的条件和结论。(2) 题中的条件是 $PA=PB$。所证充分性时，条件为 $PA=PB$，所求证结论是 PA、PB 与平面交角相等。证必要性时条件为 PA、PB 与平面交角相等，所求证结论是 $PA=PB$。

3. (3) 题首先应把图画正确(图 6)。特别应注意 B_1A 和 C_1A 不一定在一直线上（可做模型给学生看），所以作

图时不要画在一直线上。

第二个问题是怎么计算？经分析发现：图中有三个直角三角形，都只有一条边已知，所以不能单独解某一直角三角形，只能引进未知量把三个三角形联合起来解。为此，设$BB_1=x$，则$CC_1=x$，由勾股定理可得方程组：

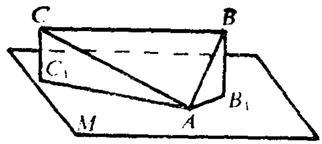


图 6

$$\begin{cases} AB^2+AC^2=BC^2 \\ AB^2=x^2+30^2 \\ AC^2=x^2+50^2 \end{cases}$$

解得 $x=10$(cm)

至于AB、AC与平面M的交角和两射影的交角只须解直角三角形和斜三角形就可得。

三、课内思考题（预先写在小黑板上）：

(1) 31 页练习 2 、 3 两题。

(2) 34 页习题四 6 题。

(3) 相交成 60° 的两条直线AB、AC和平面P所成的角分别为 30° 和 45°，求这两条斜线在平面M内射影的夹角。

(1) 题口答，(2)、(3)题让二位学生板演，根据板演由教师指出错误（包括表达、书写）、补充遗漏。对(2) 题要作几点说明：(A) (2) 题说明了为什么作一条斜线在平面上的射影时，可在斜线上任取一点作平面的垂线，(B) 如一条直线穿过平面，那么，过直线上在平面两侧的点作平面垂线，两垂足与直线和平面的交点必共线。对(3) 题要说明，在求角大小时可无边长条件，本题就是如此。解时应设某一