A^{+} A^{-}

JU ZHEN JIQI GUANG YI NI

矩阵及其广义逆

华中师范大学出版社

矩阵及其广义逆

钱吉林　李照海　编著

华中师范大学出版社

1988年4月

矩阵及其广义逆

钱吉林　李照海　编著

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所发行

英山县印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：10.875　字数：240千字

1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷

ISBN7－5622－0105－6/O·14

印数：2,200　定价：1.80元

内容简要

本书介绍了广义逆矩阵的基本理论和基本方法，是一本通俗的入门书。主要内容有：矩阵的分解，矩阵的微商与Jacobi 行列式，矩阵的广义逆，分块阵的逆，矩阵方程和矩阵不等式。

本书可供理工科大专院校（含电大和自修大学）师生、研究生、科技工作者以及自学青年阅读。

前　言

矩阵代数作为一种数学工具，在数学和其它自然科学以及工程技术中，被广泛地应用。1955年Penrose提出的广义逆矩阵是一种新的数学工具，它在代数、数理统计、计算方法、微分方程、泛函分析、物理学、测量学等方面也有广泛的应用。

本书介绍了关于广义逆矩阵的基本理论和基本方法，它的一些内容对加深线性代数的基本概念的理解和掌握某些解题技巧是有帮助的。本书可作为大学选修课教材，也可作为高等代数或线性代数的补充读物。

由于教学需要，我们先后编写了两本关于广义逆矩阵方面的讲义，一本是“广义逆矩阵”（李照海编），一本是“矩阵及其广义逆”（钱吉林编）。经5次讲授后，由钱吉林执笔修改成本书。

本书出版首先要感谢武汉大学统计系系主任张尧庭教授，他一直关心、鼓励和帮助我们。特别是他的“矩阵分析”对作者有较大启发。其次要感谢华中师范大学数学系陆秀丽教授、蔡剑芳、夏明远、李桃生等副教授，他们对本书提出不少宝贵的意见和建议。最后还要感谢华中师范大学刘庸副教授和学报编辑部彭守权副编审，他们仔细审阅了全书，为本书出版付出了辛勤的劳动。

由于作者学识有限，本书难免存在诸多缺点和错误，敬请读者指正。

编者

目　录

第一章 矩 阵

在高等代数中，矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1m} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots\ a_{nm} \end{pmatrix},$$

还可以有其它几种不同的写法：

$$A=(\alpha_1\cdots\alpha_m)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=(a_{ij})_{n\times m},$$

其中

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}\quad(i=1,\ 2,\cdots m,)$$

称为A的列向量，

$$\beta_j=(a_{j1}\cdots a_{jm})\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

称为A的行向量。有时，为了简便起见，干脆把A写成$\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$或$A=(a_{ij})$等等.

今后如不特别声明，矩阵的元素都是实数.

§1 矩阵的运算

(一)加法

设$\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$，$\underset{n\times m}{B}=(b_{ij})$，称$\underset{n\times m}{C}=(c_{ij})$为$A$与$B$的和，其中

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

〔**定理1**〕设M为一切$n\times m$实矩阵所成集合，那么：

1）加法封闭性成立，即对任意A，$B\in$ M，都有

$$A+B\in \mathrm{M},$$

2）交换律成立，即任意A，$B\in$ M，都有

$$A+B=B+A.$$

3）结合律成立，即任意A，B，$C\in$ M，都有

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

4）有零元，即有 $\underset{n\times m}{0}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\in \underset{n\times m}{\mathrm{M}}$，对任意$A\in$ M，都有

$$0+A=A+0=A.$$

5）有负元，对任意 $\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})\in$ M，都存在$(-a_{ij})_{n\times m}=-A\in$ M 使得

$$A+(-A)=(-A)+A=0.$$

这个定理证明从略。我们只指出，满足以上五条的集合，在近世代数中称为交换群。所以 $\mathrm{M}_{n\times m}$ 关于加法构成交换群.

（二）数乘

$\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$，$k$是数，数乘定义为

$$kA=(ka_{ij})_{n\times m}=Ak$$

〔**定理2**〕数乘满足以下性质：

1）　$-A=(-1)A$，$0\underset{n\times m}{A}=\underset{n\times m}{0}$.

2）　两种分配律成立：

$$(k+l)\underset{n\times m}{A}=kA+lA,$$

$$k(\underset{n\times m}{A}+\underset{n\times m}{B})=kA+kB.$$

（三）乘法

$\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$，$\underset{m\times s}{B}=(b_{ij})$，称 $\underset{n\times s}{C}=(c_{ij})$ 为 A 与 B 的积，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}.$$

〔定理3〕乘法满足以下性质：

1) $\underset{m\times n}{0}\ \underset{n\times s}{A}=\underset{m\times s}{0}=\underset{m\times n}{B}\ \underset{n\times s}{0}$.

2)结合律成立 $(AB)C=A(BC)$.

3)左、右分配律成立 $A(B+C)=AB+AC$,

$$(B+C)A=BA+CA.$$

4) $\underset{n\times n}{I}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$，主对角线元为1，其余为0，那么

$$\underset{n\times n}{I}\ \underset{n\times m}{A}=A=A\ \underset{m\times m}{I}.$$

5)交换律一般不成立。

6)有零因子，即 $A\neq 0$，$B\neq 0$，但可能有

$$AB=0.$$

7) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

（四）转置

$$\underset{n\times m}{A}=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots a_{1m}\\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2m}\\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nm}\end{pmatrix}$$

称 $\underset{m\times n}{A'}=\begin{pmatrix}a_{11}a_{21}\cdots a_{n1}\\ a_{12}a_{22}\cdots a_{n2}\\ a_{1m}a_{2m}\cdots a_{nm}\end{pmatrix}$ 为 A 的转置矩阵，这就是说，$A\in M_{n\times m}$，那么 $A'\in M_{m\times n}$.

〔定理4〕 $(A+B)'=A'+B'$，$(kA)'=kA'$，

$(AB)'=B'A'$，$(A')'=A$.

（五）逆

$\underset{n\times n}{A}$，如果存在$\underset{n\times n}{B}$，使得

$$AB=BA=I,$$

则称B为A的逆，记为A^{-1}，这就是说

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I,$$

这时也称A是可逆的。

〔定理5〕 1）A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$，其中$|A|$表示矩阵A的行列式。

2）$(A^{-1})^{-1}=A$.

3）$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

4）$(A')^{-1}=(A^{-1})'$.

（六）哈氏积（Hadamard）

设$\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$，$\underset{n\times m}{B}=(b_{ij})$，称$\underset{n\times m}{C}=(c_{ij})$为$A$与$B$的哈氏积，如果

$$c_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$$

记为 $C=A\bullet B$.

〔定理6〕 1）$A\bullet 0=0\bullet A=0$

2）$A\bullet B=B\bullet A$.

3）$(A\bullet B)\bullet C=A\bullet(B\bullet C)$.

4）$(A+B)\bullet C=C\bullet(A+B)=A\bullet C+B\bullet C$

$=C\bullet A+C\bullet B$.

5）$\underset{n\times n}{A}\bullet 11'=A$，其中 $\underset{1\times n}{1'}=(1,1\cdots 1)$.

6）$\underset{n\times n}{A}\bullet I=\mathrm{diag}A$.

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{diag}A=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

证 我们只证明5)和6)。

5) $$\mathbf{1}\mathbf{1}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1\,1\cdots 1)=\begin{pmatrix} 1 & 1\cdots 1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & 1\cdots 1 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$A\bullet\mathbf{1}\mathbf{1}'=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1\cdots 1 \\ \vdots \quad \vdots \\ 1\cdots 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}=A.$$

6) $$A\bullet I=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}=\operatorname{diag}A. \quad \blacksquare$$

(七)叉积(Kronecker积)

设 $\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$，$\underset{s\times t}{B}=(b_{hl})$，如果

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}B\cdots a_{1m}B \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{n1}B\cdots a_{nm}B \end{pmatrix}_{ns\times mt},$$

则称C为A与B叉积，记为$A\otimes B$.

例1 设

$$\underset{2\times 2}{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \underset{2\times 1}{B}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

那么

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & bx \\ ay & by \\ cx & dx \\ cy & dy \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix} xA \\ yA \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \\ ya & yb \\ yc & yd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & bx \\ cx & dx \\ ay & by \\ cy & dy \end{pmatrix}_{4\times 2}.$$

由这个例子可以看出，$A\otimes B$与$B\otimes A$ 一般不是同一 矩阵，但它们的级数是相同的。

〔**定理7**〕 1）$0\otimes A=A\otimes 0=0$.

2）$(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$.

3）$(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B$.

4）$A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2$.

5）$kA\otimes lB=(kl)(A\otimes B)$.

6）$(A\otimes B)'=A'\otimes B'$.

7）$(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=A_1A_2\otimes B_1B_2$.

证 1）是显然的。

2）设 $\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$,

那么

$$(A\otimes B)\otimes C=\begin{pmatrix} a_{11}B\cdots a_{1m}B \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}B\cdots a_{nm}B \end{pmatrix}\otimes C$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}(B\otimes C)\cdots a_{1m}(B\otimes C) \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}(B\otimes C)\cdots a_{nm}(B\otimes C) \end{pmatrix}=A\otimes(B\otimes C).$$

3）4）5）的证明作为练习.

6）设 $\underset{n\times m}{A}=(a_{ij})$，那么

$$(A\otimes B)'=(a_{ij}B)'=\begin{pmatrix} a_{11}B\cdots a_{1m}B \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}B\cdots a_{nm}B \end{pmatrix}'$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}B'\cdots a_{n1}B' \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{1m}B'\cdots a_{nm}B' \end{pmatrix}=A'\otimes B'.$$

7）设 $\underset{n\times m}{A_1}=(a_{ij})$，$\underset{m\times p}{A_2}=(b_{ij})$，$\underset{r\times t}{B_1}=(c_{ij})$，

$\underset{t\times s}{B_2}=(d_{ij})$，并且令

$$C=(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=(C_{ij}),$$

$$D=(A_1A_2)\otimes(B_1B_2)=(D_{ij}),$$

$$C_{ij}=(a_{i1}B_1)(b_{1j}B_2)+\cdots+(a_{im}B_1)(b_{mj}B_2)$$
$$=a_{i1}b_{1j}B_1B_2+\cdots+a_{im}b_{mj}B_1B_2=D_{ij}.\qquad\blacksquare$$

〔定理8〕 1）$I_n\otimes I_m=I_{nm}$.

2）如果A、B都是可逆阵，则

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}.$$

3）设λ_1，λ_2，…，λ_n是 $\underset{n\times n}{A}$ 的n个特征值，μ_1，μ_2，…，μ_m 是 $\underset{m\times m}{B}$ 的m个特征值，那么$A\otimes B$ 的 nm 个特征值为

$\lambda_i\mu_j$ ($i=1, 2, \cdots, n, j=1, 2, \cdots, m$).

证 1)显然.

2)只要验证

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=I_{nm}$$

即可，事实上

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=AA^{-1}\otimes BB^{-1}=I_n\otimes I_m$$

$=I_{nm}$.

3)这里把问题引导到复数域上讨论. 由高等代数知，任何矩阵在复数域上，一定与Jordan型矩阵相似，即存在可逆阵P、Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1},\quad B=Q\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{pmatrix}Q^{-1},$$

从而

$$A\otimes B=(P\otimes Q)\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{pmatrix}\right]$$

$$\cdot(P^{-1}\otimes Q^{-1})$$

$$=(P\otimes Q)\begin{pmatrix}\lambda_1\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{pmatrix} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\cdot(P\otimes Q)^{-1}.$$

这样得证 $A\otimes B$与矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1\mu_m & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_n\mu_1 & \\ & & & & & \ddots \\ & 0 & & & & \lambda_n\mu_m \end{pmatrix}$$

相似，从而有相同的特征值。 ▮

〔**推论1**〕 设A，B分别为$n\times n$，$m\times m$方阵，则

$$|A\otimes B|=|A|^m\cdot|B|^n.$$

证明作为练习。

〔**定理9**〕 $\mathrm{rk}(A\otimes B)=\mathrm{rk}(A)\cdot\mathrm{rk}(B)$.

证 设 $\mathrm{rk}\left(\underset{n\times m}{A}\right)=r$，$\mathrm{rk}\left(\underset{s\times t}{B}\right)=w$.

那么存在可逆阵$\underset{n\times n}{P}$、$\underset{m\times m}{Q}$、$\underset{s\times s}{R}$、$\underset{t\times t}{T}$使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q,\quad B=R\begin{pmatrix} I_w & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}T.$$

这样

$$A\otimes B=(P\otimes R)\left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} I_w & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right](Q\otimes T),$$

$$\therefore\quad \mathrm{rk}(A\otimes B)=\mathrm{rk}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} I_w & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=rw$$

$$=\mathrm{rk}(A)\cdot\mathrm{rk}(B).$$ ▮

（八）拉直

设

$$\underset{n\times m}{A}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nm}\end{pmatrix},$$

称

$\overrightarrow{A}=(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1m}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2m}, \cdots, a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nm})'$为$A$的拉直运算。

从定义看出$\overrightarrow{A}$是$nm\times 1$矩阵，即为一个列向量，这个列向量先把A的第一行按顺序写在前面，依次再写第2行，…，最后写第n行。

例2 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，那么

$$\overrightarrow{A}=(1, -1, 3, 1)'.$$

由定义不难证明：若A，B都是$n\times m$矩阵，

那么 $A=B \Longleftrightarrow \overrightarrow{A}=\overrightarrow{B}$.

〔**定理10**〕 拉直算子是线性的，即

$$\overrightarrow{A+B}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}, \quad \overrightarrow{kA}=k\overrightarrow{A}.$$

这些都是显然的。

〔**定理11**〕 1) $\overrightarrow{xy'}=x\otimes y$，其中$x$，$y$为$n$维列向量。

2) $E_{ij}=e_ie_j'$，其中E_{ij}表示(i,j)元为1，其余元素均为0的$n\times m$矩阵，e_i表示列向量，第i个分量为1，其余为0。

3) $\underset{n\times m}{A}\ \underset{m\times 1}{e_i}=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

4) $\underset{1\times n}{e_i'}\ \underset{n\times m}{A}=(a_{i1}, \cdots a_{im})$.

5) $\overrightarrow{E_{ij}}=e_i\otimes e_j$.