幾何公理

馬　忠　林

吉林人民出版社

几何公理 馬忠林

吉林人民出版社出版 （长春市北京大街） 吉林省书刊出版业营业許可証出字第1号

长春新华印刷厂印刷 吉林省新华書店发行

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：$\frac{7}{8}$ 字数：17,000 印数1—1,000册

1960年2月第1版 1960年2月第1版第1次印刷

統一書号：13091·22 定价(8)：0.11元

目　　次

前　　言

几何学是数学的一个分科，是邏輯性最强、結构最严紧的科学之一．每种几何学的內容，不是各个具有独立意义的一些命題的簡单总合，而是一系列地具有邏輯相关性的命題的非常严密的邏輯結构．也就是說，它不是利用几何形象直观地由实驗得来的性質作为总結全部几何的素材，而是应用形式邏輯法則，把一个命題按純邏輯的方法从其他命題推导出来，以构成其全部內容的理論系統．例如在初等几何学里我們总会遇到这样的事实，从命題“矩形的对角綫相等”和“正方形是矩形”得出“正方形的对角綫相等”的結論．所以，几何所关心的是其命題之間的邏輯相关性．而这就必須是从若干基本命題（公理）出发，以邏輯推导到其他所有命題．由于人們的思維总是以物質世界为先决条件，而形式邏輯法則本身又是多次反复地客观实践的反映，它是符合客观規律的，因此，几何学中形式邏輯之成为理論結构的基础，其意义也就显而易知了．

目前发現很多初学几何学的人特别是中学生不十分清楚定义、公理、定理的本質区别和它們应起的作用，更不太了解如何对待它們；至于对中学几何学全部命題的邏輯理解的就更差

了．特别是他們不太理解作为論証基础的几何公理的作用，甚至錯誤的認为公理是可有可无的．

本書想就几何命題的邏輯相关性中的有关欧氏几何公理体系問題，作一些簡要的介紹．这个問題的系統知識是“几何学基础”里的主要內容，用很少时間想了解其全貌，是有困难的，这里只想結合中学几何教材作一些极初步的闡述．由于时間的仓促，不当之处难免，希讀者批評指正．

一、公理及对公理体系的要求

公理是不加証明而被用来作为論証根据（論据）的几何命題．当几何学作为一个严密地邏輯系統建立起来时，就充分地显示出公理的作用，以及它和定理的区别．在中学教科書里公理大都是用“隐蔽”的方式提出的，但它确实在起着它应有的作用。

中学教材里所提出的公理，从用公理法建立几何学这一观点看来，显然是不够完整的．但为了适应中学生智力的特点，这样作也还是必要的．由于几何学里命題很多，当我們用公理法建立几何学时，究竟取哪些命題作为公理，对作为一門科学基础的公理体系要有哪些基本要求呢？

几何学用命題的形式总結出大量的系統的定理，这些定理之所以能令人确信无疑，并应用于实践当中，是依靠証明才得

以肯定的。这是这門科学的极为重要的特点之一。倘若把这些大量的命題都作为公理来承認，則几何学的論述将会大大簡化，需要証明的問題也就大量減少，但这将会引起怎样的后果呢？首先人們要怀疑这大量命題的眞实性，所以，数学家們一开始就力图使作为公理的命題数目尽可能地減少，而几何学的所有內容却都能从这为数极少的公理演繹出来。

上面已經談过，用来作为公理的几何命題越多，則几何的論証越簡化；相反地，公理的数目越少，則需要証明的命題越多，因此，用最少的几何命題作为公理是必要的而且完全是出于自然的要求。这样，每一条公理的意义和它所应起的作用就会增大，而每一条公理就将更有力的揭示出空間形式的更普遍、更深刻的性质。

另一方面，在我們采用极少个数的公理作为一个公理体系时，在考查它的正确性，检查它們是否合乎对公理体系所提出的基本要求，也都要容易得多。

数学家們选择公理的方法和它的公理体系中公理的个数，虽各有不同，但任何一个公理体系，都应当滿足下列的几个基本要求。即应具有：

（1）相容性（或无矛盾性）。

（2）独立性。

（3）完备性。

一个完整的公理体系中的各个公理不是各自孤立的，它們的全体应正确地反映出客观物质世界空間形体实际存在的基本

性質和相互关系．所以，它們必須滿足上面所提出的几点基本要求．

首先，当选定一个公理体系时，必須检查一下这里面的公理，是否包含相互矛盾的命題，因为这样的命題是不能同时成立的．如果采用了互相矛盾的命題作为公理，势必产生在几何学里旣証明了某一个命題的正确性，同时又証明了它的否定命題的正确，显然这是不容存在的．例如，在一个公理体系里，不可能同时采取这样的二个命題作为公理：（1）过已知点，可以且只可以作一条直綫平行于已知直綫；（2）过一已知点决不可能只作一条直綫和一已知直綫平行．所以对公理体系首先应要求它滿足无矛盾的条件，就是要求它具有相容性．

其次，我們还应該注意，凡是能用这个体系中其他公理加以証明的命題，都不能包含在这个公理体系当中．这个要求是十分明显的，因为，如果所給出的某一命題能用其他公理来証明，那么它已經不是公理而是定理了．由公理体系中应包含最少数公理的原則，这样的命題当然就不应再列入公理体系中．

这样的命題是难于一見即可鉴别的，因为它們有时是表現为“等价的”关系．例如下面的两个命題就不应該同时采用为同一公理体系中的公理．（1）两平行直綫，被第三条直綫所截时，同位角相等；（2）过已知直綫外一点只能作唯一条平行于它的直綫．这两命題之一当作公理时，另一个即可得到証明，因此，它們是等价的，只能取其中的一个作为公理．

对公理体系的这一要求叫做公理的独立性．

最后，虽然对組成公理体系的公理尽可能地使其数目减少，但必須保留使其能充分地反映出几何知識体系的完整所必須的基本命題，这就是要求它具有完备性。

为了更加深入地了解公理体系的相容性、独立性和完备性，举一个簡单例子来說明。它虽然不全是几何关系的确切反映，但可以提供較好地对于几何关系的比拟。

我們来研究一个含有三个未知数的一次方程組，把其中的每个未知数都看作是具有一定意义的“概念”，把每个方程看作是用来确定这些概念之間的关系的某一組公理。

設有方程組：

$$\begin{cases}2x-y-2z=3,\\x+y+4z=6.\end{cases}$$

由这个方程組，不能确定未知数 x, y, z，因为这里的方程数少于未知数的个数，所以这个方程組不滿足完备性的条件。

現在我們再在这个方程組里补充一个方程：

$$\begin{cases}2x-y-2z=3,\\x+y+4z=6,\\3x+3y+12z=18.\end{cases}$$

这个方程組并沒有改变原来的情况，因为很易看出第三个方程是第一个方程的簡单变形，虽然增加了它但并沒有提供新的关系，无补于未知数的确定，这是因为它不滿足独立性的条件。

如果我們把第三个方程再改变一下，变成方程組：

$$\begin{cases}2x-y-2z=3,\\x+y+4z=6,\\3x+3y+12z=15.\end{cases}$$

显然最后的一个方程除以3时，得

$$x+y+4z=5$$

它和第二个方程：

$$x+y+4z=6$$

是互相矛盾的，所以它不满足相容性条件，对确定未知数也是无益的。

最后，如果把方程組改变为：

$$\begin{cases}2x-y-2z=3,\\x+y+4z=6,\\2x+y+5z=8.\end{cases}$$

則不难断定，这个方程組有一組解（$x=5$，$y=13$，$z=-3$）。因为这三个方程是相容的、独立的和完备的。如果再往这个方程組里加上与x、y和z有关的第四个方程，則它势必成为或者是三个已知方程中某一个的推导，或者是和它們互相矛盾的，当然更談不到完备性了。

从上述情况，我們可以看到，选择一个作为几何学基础的公理体系并不是一件很容易的事，必須使它滿足相容、独立和完备性的要求。

二、歐几里德"几何原本"中的公理

强調公理的作用，試图用公理法建立几何学，早在欧几里德(*Euclid* 約公元前330—275年）及其所著的"几何原本"中已有所体現．但我們不能不說尽管他有这种良好愿望，并且在几何学史上創建了很大功績，但他所提出的公理却是有很大缺欠的．

欧几里德的"几何原本"里所提出的公理是很不完整的．

首先，在"几何原本"里找不到"移动公理"，而在他用重合法証明"两边及其夹角相等的两个三角形全等"时，却用了"移动"的概念．

其次，欧几里德沒有提出"位置公理"，例如，在他的"几何原本"里沒有"在……中間"、"在……內部""在……外部"等有关公理的規定，但他却承認了这些沒有明确說明意义的概念而直观地使用了．

最后，"几何原本"里沒有提出"連續公理"．

同时，我們还发現"几何原本"中所提出的公理有些是多余的，例如"一切直角皆相等"这样的命題，本来是可以根据其他公理得到証明的，应从公理目录里抽出．不然就損害了公理的独立性．

在"几何原本"里，找不到互相矛盾的命題，这应該說欧

几里德的公理确作到了相容性这一点.

欧几里德提出了："两直綫为另一直綫所割，如果在割綫的某一侧两个同側內角之和小于二直角，則这两直綫必相交于該側"作为自己的"第五公設",这个公設引起了数学家們的兴趣，他們企图依靠"几何原本"中其他几何公理把这一条公理証明出来，但他們的尝試都終告失敗．可見"第五公設"有它特殊意义．由它可以导出一系列的重要定理：

1、过已知直綫外的一点，只可作一条直綫平行于已知直綫．

2、两平行直綫被第三条直綫所截，同位角相等．

3、三角形的外角等于其不相邻內角的和．

4、三角形內角的和等于二直角．

5、n边形內角的和为$(2n-4)d$,等等．

反过来，若把以上几条定理（实际上还有很多）的任意一条当作公理，則另外几条以及"等五公設"也都可以被推証出来．

在欧几里德以后的二千年期間，数学家們对欧几里德"第五公設"的証明虽告失敗，但对重視公理的作用及几何学的发展方面却起了不小作用．在19世紀三十年代里"第五公設"問題，終于得到了解答，俄罗斯伟大数学家，喀山大学教授尼·伊·罗巴切夫斯基（Николай Иванович Лобачевский）找出了"第五公設"不可能进行証明的原因，他弃掉了这条公理而代之以另外的一个公理："过已知直綫外的一点至少可作两条

直綫和已知直綫不相交”，在他自己的公理体系上，建立了新的几何学——非欧几何学。

罗巴切夫斯基的发现，是几何学的一个巨大革命。虽然他的几何学的公理体系，大部分是与欧几里德几何相同，所不同的只是以他自己的“平行公理”代替了欧几里德的“第五公設”，但就是这一条公理的不同，致使两种几何有了很大区别。

到19世紀末期，作为几何基础的公理体系問題，已成为数学家們的主要工作，其中获得最大成就的是德国数学家希尔倍脱(*D. Hilbert* 1862——1943)。在他的著作“几何基础”里提出了自己的公理体系，他曾在1903年获得了以罗巴切夫斯基为名的国际奖金。

三、希尔倍脱公理体系

希尔倍脱的公理体系是由五个公理組組成的：I_{1-8}結合公理，II_{1-4}順序公理，III_{1-5}全等公理，IV平行公理，V_{1-2}連續公理，这五組公理构成建立欧氏几何学的基础。

現在我們逐一地看一看它的各組公理。

I、結合公理組

这組公理包含八个公理，它們主要是确定几何的基本元素“点”、“直綫”和“平面”之間的相互关系。

公理 Ⅰ$_1$ 过两点 A、B 总可以引一条直綫 a．

公理 Ⅰ$_2$ 过两点A、B的直綫，不能多于一条．

公理 Ⅰ$_3$ 在一直綫上至少有两个点，至少有不在一直綫上的三个点存在．

公理 Ⅰ$_4$ 过不在一直綫上的三点A、B、C总可有一平面 α，任意平面上至少有一个点存在．

公理 Ⅰ$_5$ 过不在一直綫上的三点A、B、C的平面不能多于一个．

公理 Ⅰ$_6$ 一直綫a上的两点A、B在平面α上时，則直綫a上的所有点都在平面α上．

公理 Ⅰ$_7$ 两平面α、β有一个公共点 A 时，則这两个平面至少还有另一个公共点B．

公理 Ⅰ$_8$ 至少有四个点A、B、C和D不在一平面α上．

在現行的中学平面几何（余元庆等編）教科書里提出了二个結合公理，一个是在 §3 里的“过任意两点，可以引一条直綫，并且只能引一条直綫”，这个公理实际上是把上述的希氏結合公理Ⅰ$_1$和公理Ⅰ$_2$两者合并在一起了．根据这个公理就可以推出 §6中的“两条直綫不能有多于一个以上的交点”，因而必須强調后者应作为定理处理，切不可也作为公理来用．

在同書的 §4 里提出了“如果用一条直綫連結平面內的两点，那么这条直綫上的所有点都在这平面內”．它是作为平面性質的公理提出的，也有的教科書里用类似的方法来定义平面，而在希氏公理里是把“平面”这个概念作为原始概念，再用公

理I_6确定直綫和平面的結合关系．无論哪一种提法都应充分注意点、直綫和平面的結合关系，那就是“过两点A、B可引一条直綫a”，它意味着“点A、B在直綫a上”，或“直綫a通过点A、B”．这两个几何概念“在……之上”或“通过”就是“結合”的意思，这是几何学上最重要的概念之一，几何图形的构成就是以結合公理为基础的．

在高中立体几何教科書里作为平面的基本性质提出了三个公理，其公理1是平面几何里提过的（希氏公理I_6），公理2和公理3是希氏結合公理組中的公理I_7和公理I_5、I_4．

由于公理3的提出就可以很順利地証明它的三个推論（决定平面的定理）．

公理1和公理2指出了直綫被平面所包含（即直綫在平面上）或平面通过直綫，这一重要概念．公理3则强調指出点和平面的依存关系．要注意点、直綫、平面的結合关系，就为今后学习奠定了良好基础．

最后，我們可以举一个例子来說明結合公理的几何学的一种解释．

取一个四面体（图1），并把它的頂点叫做“点”；稜叫做“直綫”；面

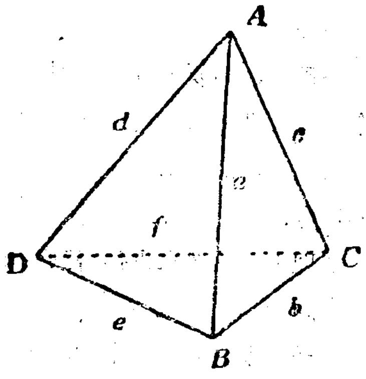

图 1

叫做“平面”，这样在这个几何里，作为几何元素的有四个点、六条直綫和四个平面. 因此，我們完全可以把四面体的頂点、稜、面的結合关系，看成是这种几何里的結合关系.

例如，四面体的頂点A在稜a上，我們可以說在这种几何里“点A在直綫a上”等等，按照这种方法規定了結合关系以后，很易看出：

公理I_{1-8}的所有要求都能得到滿足.

因为公理I_{1-2}指出过两点只能引一条直綫，而在四面体里过每两个頂点，只有一个稜.

公理I_3也得到滿足，因为四面体的每个稜上有两个頂点，并且任何三个頂点都不能落在同一稜上.

公理I_4的要求也得到滿足，因为过每三个頂点都有一个面，而且每个面都含有頂点.

公理I_5的要求滿足是显然的，因为通过每三个頂点都只有一个面.

公理I_6的要求也能得到滿足，因为一个稜的两个頂点在一个面上，那么这个稜就全落在这个面上.

公理I_7的要求也能得到滿足，因为每两个面都有两个公共的頂点.

公理I_8的要求也能得到滿足，因为四面体的四个頂点不在一个面上.

这样一来，显然一个四面体就是結合公理所定义的几何学的一种图形.

Ⅱ、順序公理組

这組公理包含四个公理.

公理Ⅱ₁ 若一点B在一点A和一点C之間，則A、B和C是一直綫上不同的三个点，而且B也在C和A之間.

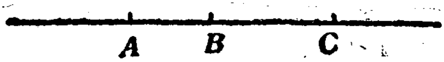

图 2

公理Ⅱ₂ 已知A和C两点，直綫AC上恒至少有一点B，使得C在A、B之間.

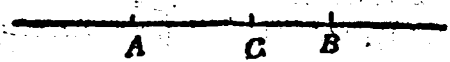

图 3

公理Ⅱ₃ 一直綫上的任意三点中，至多有一点在其他两点之間.

公理Ⅱ₄ 設A、B和C是不在一直綫上的三点，a是平面ABC上的一直綫，但它不通过A、B、C这三点中任意的一点. 若直綫a通过綫段AB上的一点，則它必定也通过綫段AC的一点，或綫段BC的一点.

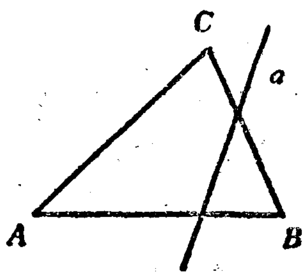

图 4

这組公理确定了直綫上各点間的相互位置和平面上点和直綫的相互位置所应服从的基本規律．在中学几何教材里时常用到这些公理，虽然它們沒有被明显地提出来，但实际上是承認了它們的．

在这組公理中提出了一个重要的概念“在……之間”或“介于”，这是确定順序关系的一个重要概念．在几何学里，只有三点在一直綫上时才能說一点在他二点之間，这就意味着我們承認了公理Ⅱ$_1$．因此，在証明定理或作图时，往往認为在两点間总是随便可以取一个点的，至于这样的点是否存在就不加考虑了．

在几何学邏輯的发展当中，对概念“在……之間”所要求的一切都列举在这四个公理中，其中第四个公理更为重要．由于有了它才把“在……之間”的概念扩张到平面和空間的結构上去．

据根这四个公理，能依次地把在中学几何里看来是很簡单的事实进行几何地定义或証明．

例如，象这样的定理就可以得到証明：“已知A、C两点，在直綫AC上恒至少有一点D在A和C两点之間”．

証明：直綫AC外有一点E（公理Ⅰ$_3$），直綫AE上有一点F（公理Ⅱ$_2$），使点E在两点A和F之間，在FC上又必有一点G