王子玉　田继善

高阶 Hermite-Fejér 插值

河南大学出版社

（豫）新登字09号

高阶Hermite-Fejér插值
王子玉　田继善
责任编辑　王　慧

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：9 字数：226 千字
1995年11月第1版　　1995年11月第1次印刷
印数：1—1000　　定价：14.50元

ISBN7-81041-146-2/O·91

前　　言

高阶Hermite-Fejér 插值是 Lagrange 插值及 Hermite-Fejér 插值的一种统一. 它以后二者为特例,同时还包含着更丰富的内容，其深入研究则是近 5 年才开始的事情. 为该理论做出出色贡献的学者主要分布在匈牙利、日本、美国、加拿大及中国等. 本书总结整理了该理论的主要研究成果和方法，其中不少是中国学者史应光、沈燮昌教授及作者自己的结论.

该理论目前还正在发展之中，在 Lagrange 插值及 Hermite-Fejér 插值中的一些经典结论在高阶情形还没有相应的定理,同时高阶插值本身所能显示出的低阶插值所不具备的优点尚未得到更多发掘. 因此,我们希望本书能起到抛砖引玉的作用.

本书的部分内容曾为河南大学数学系研究生讲授过，其中第二章和第四章的一些结论是作者之一王子玉同志1990年应已故北京大学数学系沈燮昌教授之邀在那里访问期间与沈燮昌教授合作完成的. 因此,本书的出版也蕴含着我们对沈教授的怀念. 本书在写作过程中得到河南省科委基金的资助，在出版过程中得到河南省教委基金的资助. 我们要感谢中国科学院院士、我国著名数学家、教育家、北京大学数学系教授程民德先生对作者的一贯鼓励和支持,还要感谢我们的导师、北京师范大学数学系孙永生和陆善镇两位教授对我们不诲的指导和帮助. 同时,我们要感谢中国计量学院院长谢庭藩教授、中国科学院计算中心史应光教授、中央民族大学数学系邢富冲副教授及北京大学数学系钟乐凡副教授，他们经常以不同的方式与作者进行有益的交流. 最后我们对匈牙利学者 Szabados 教授、Vértesi 教授、日本学者Sakai 博士及在美国的徐源博士等提供的大量文献和无私帮助表示衷心感谢. 河南大学数学系陈顺卿教授和责任编辑王慧同志为本书能够顺利出版付

出了艰辛劳动，在此作者向他们也一并致以由衷谢意.

限于作者水平及时间仓促，书中谬误在所难免，欢迎专家学者批评指正.

王子玉　田继善

1994.6.6

目　　录

第一章　高阶Hermite-Fejér 插值一致收敛性的一般理论

§1.1　高阶Hermite-Fejér插值的发散性

这一节我们将介绍匈牙利数学家Szabados[1]给出的有关高阶Hermite-Fejér 插值发散性情形的一般性研究. 本书的符号若不特别声明是通用的,因此后面用到时不再一一说明.

设

$$(-1\leqslant)x_{nn}<x_{n-1,n}<\cdots<x_{1n}(\leqslant 1),\quad n=1,2,\cdots \tag{1.1.1}$$

是$[-1,1]$ 上给定的结点系,记为X. 又设 $m\geqslant 1$ 是任一固定整数. 用 C^m 表示在$[-1,1]$上$m-1$ 次连续可导的函数集,$\mathbb{P}_m$ 表示次数$\leqslant m$的多项式集. 对 $f\in C^{m-1}$, 考虑 Hermite 插值问题

$$H_{mn}(f,x):=H_{mn}(f,X,x):=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}f^{(j)}(x_k)A_{jk}(x), \tag{1.1.2}$$

其中 $A_{jk}(x):=A_{jkmn}(x)\in\mathbb{P}_{mn-1}$适合条件

$$A_{jk}^{(p)}(x_q)=\delta_{jp}\delta_{kq},\qquad j,p=0,\cdots,m-1;k,q=1,\cdots,n, \tag{1.1.3}$$

δ是 Kronecker 符号. 因此算子(1.1.2) 具有插值性质

$$H_{mn}^{(p)}(f,x_q)=f^{(p)}(x_q).\qquad p=0,\cdots,m-1;q=1,\cdots,n.$$

这节的主要任务是给出下面量的下界估计

$$L_{jmn}:=\left\|\sum_{k=1}^{n}|A_{jk}(x)|\right\|,\qquad j=0,\cdots,m-1, \tag{1.1.4}$$

其中$\|\cdot\|$是$[-1,1]$上相应函数的上确界范数．考虑这个量是有重要意义的．用$H_{mn}(f,x):=H_{mn}(f,X,x)$表示$f\in C$的 Hermite-Fejér 算子

$$H_{mn}(f,x)\ :=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)A_{0k}(x),\tag{1.1.5}$$

则L_{0mn}即是(1.1.5)的 Lebesgue 常数，但其它量L_{jmn} $(j=1,\cdots,m-1)$在考虑(1.1.5)的收敛性时也起着重要的作用．例如，如果考虑(1.1.5)的逼近阶，通常要考虑它对$f(x)$的次数不超过$mn-1$的最佳逼近多项式$p(x)$的估计问题，即

$$p(x)-H_{mn}(p,x)=\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{m-1}p^{(j)}(x_k)A_{jk}(x).$$

如果我们知道$f(x)$的构造性质，则我们也会知道$p^{(j)}(x_k)$的某些信息，这就导致了量L_{jmn}的研究．

本节的主要结果是：

定理 1.1.1 对任意结点系(1.1.1)，我们有

$$L_{jmn}\geqslant\begin{cases}c_1\dfrac{\lg n}{n^j}, & \text{如果 } m-j \text{ 是奇数}\\[2ex] \dfrac{c_2}{n}, & \text{如果 } m-j \text{ 是偶数}\end{cases}\qquad j=0,\cdots,m-1$$

这里及以后，$c_1,c_2,\cdots$表示与n无关但依赖于j，m的常数．

这是一个十分一般性的结果，其特殊情况是已知的．例如当$m=1$时的 Lagrange 插值，我们有

$$L_{0,1,n}\geqslant c_1\lg n.$$

此即 Faber G[2]的经典结论；当$m=2$时，对 Hermite-Fejér 插值，

$$L_{1,2,n}\geqslant c_1\frac{\lg n}{n},$$

它是Erdös P和Turán P在[3]中证明的；最后，

$$L_{0,3,n}\geqslant c_1\lg n\tag{1.1.6}$$

是最近被 Szabados J 和 Varma A K 在[4]中得到.(实际上,Vértesi P在[5]中对$[-1,1]$中的一个大集合上证明了相应的 Lebesgue 函数$\geqslant c\lg n$,它比(1.1.6)更广泛.)

定理 1.1.1 的最有趣的特殊情况是

$$L_{0,m,n}\geqslant c_1\lg n,\qquad m\text{为奇数},$$

它是[4]中的猜想.

由于定理1.1.1的证明很长,我们将它分解为一系列引理.令

$$\omega_n:=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k),$$

$$l_k(x):=l_{kn}(x):=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x-x_k)},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

引理 1.1.1 我们有

$$A_{jk}(x)=\frac{l_k(x)^m}{j!}\sum_{i=0}^{m-j-1}\frac{[l_k(x)^{-m}]_{x=x_k}^{(i)}}{i!}(x-x_k)^{i+j},$$

$$j=0,\cdots,m-1;\quad k=1,\cdots,n.\tag{1.1.7}$$

证明: 因为(1.1.7)的次数$=mn-1$,所以我们只需证明(1.1.3)即可.多项式(1.1.7)含有因子$(x-x_i)^m(i\neq k)$,所以

$$A_{jk}^{(p)}(x_i)=0,\quad p=0,\cdots,m-1,\quad i\neq k.$$

同时,如果$0\leqslant p<j$,则它也含有因子$(x-x_k)^{p+1}$,即有

$$A_{jk}^{(p)}(x_k)=0,\quad p=0,\cdots,j-1.$$

最后,如果$j\leqslant p\leqslant m-1$,则两次利用 Newton-Leibniz 法则得到

$$\begin{aligned}A_{jk}^{(p)}(x_k)&=\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{p-j}\frac{[l_k(x)^{-m}]_{x=x_k}^{(i)}}{i!}\binom{p}{i+j}(i+j)![l_k(x)^m]_{x=x_k}^{(p-i-j)}\\&=\binom{p}{j}\sum_{i=0}^{p-j}\binom{p-j}{i}[l_k(x)^{-m}]_{x=x_k}^{(i)}[l_k(x)^m]_{x=x_k}^{(p-i-j)}\\&=\binom{p}{j}[1]_{x=x_k}^{(p-j)}\\&=\delta_{pj},\qquad p=j,\ j+1,\cdots,m-1.\end{aligned}$$

此即证明了引理1.1.1.

现在我们引入记号

$$a_{ik}:=a_{ikm}:=m\sum_{\substack{v=1\\v\neq k}}^{n}\frac{1}{(x_v-x_k)^i},\tag{1.1.8}$$

$$k=1,\cdots,n;\quad i=1,2,\cdots.$$

及

$$b_{ik}:=b_{ikm}:=\frac{[l_k(x)^{-m}]^{(i)}_{x=x_k}}{i!},\tag{1.1.9}$$

$$k=1,\cdots,n;\quad i=0,1,\cdots.$$

引理1.1.2 我们有

$$b_{ik}=\frac{1}{i}\sum_{v=1}^{i}a_{vk}b_{i-v,k},\quad k=1,\cdots,n;i=1,2,\cdots.\tag{1.1.10}$$

证明：由(1.1.8)，

$$a_{ik}=\frac{m}{(i-1)!}\left[\frac{1}{x-x_k}-\frac{\omega_n'(x)}{\omega_n(x)}\right]^{(i-1)}_{x=x_k},$$

$$k=1,\cdots,n;\quad i=1,2,\cdots.$$

又由(1.1.9)及Newton-Leibniz公式得到

$$\frac{1}{i}\sum_{v=1}^{i}a_{vk}b_{i-v,k}=\frac{m}{i}\sum_{v=1}^{i}\frac{1}{(v-1)!}\left[\frac{1}{x-x_k}-\frac{\omega'_n(x)}{\omega_n(x)}\right]^{(v-1)}_{x=x_k}\cdot\frac{[l_k(x)^{-m}]^{(i-v)}_{x=x_k}}{(i-v)!}$$

$$=\frac{m}{i!}\left[\left(\frac{1}{x-x_k}-\frac{\omega'_n(x)}{\omega_n(x)}\right)l_k(x)^{-m}\right]^{(i-1)}_{x=x_k}$$

$$=\frac{1}{i!}\left[-\frac{l'_k(x)}{l_k(x)}ml_k(x)^{-m}\right]^{(i-1)}_{x=x_k}$$

$$=\frac{1}{i!}[l_k(x)^{-m}]^{(i)}_{x=x_k}=b_{ik},$$

$$k=1,\cdots,n;\quad i=1,2,\cdots.$$

此即(1.1.10). 证毕.

设在设

$$B_{jk}(x):=B_{jkmn}(x):=\sum_{i=0}^{m-j-1}b_{ik}(x-x_k)^i,$$

$$j=0,\cdots,m-1;\quad k=1,\cdots,n. \tag{1.1.11}$$

引理 1.1.3 对符号 $x_{k\pm1}$ 之一有

$$B_{jk}(x)\geqslant c_3\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k\pm1}}\right)^{m-j-1}, \tag{1.1.12}$$

其中 $-\infty<x<+\infty$, $m-j$ 为奇数, $1\leqslant k\leqslant n$.

证明: 对于 $j=m-1$, 我们有 $B_{m-1,k}(x)\equiv b_{0k}=1$ (见(1.1.9)和(1.1.11)), 于是我们可假定 $j\leqslant m-3$(即要求 $m\geqslant3$. $j=m-2$ 不能出现, 因此我们要求 $m-j$ 是奇数). 由(1.1.9)和(1.1.11), $B_{jk}(x)$ 其实就是 $(l_k(x))^{-m}$ 在 $x=x_k$ 处 Taylor 展开的偶数次部分和. 由 Laguerre 的一个定理(见 Pólya G 和 Szegö G[6], 51 页问题 50)知

$$B_{jk}(x)>0,\qquad -\infty<x<+\infty, \tag{1.1.13}$$

因此 $b_{m-j-1,k}\geqslant0$. 首先我们证明 $\deg B_{jk}=m-j-1$, 即 $b_{m-j-1,k}>0$. 实际上, 若 $b_{m-j-1,k}=0$, 由(1.1.13), $b_{m-j-2,k}=0$, 且 $\deg B_{jk}\leqslant m-j-3$, $\deg A_{jk}^{(j+1)}(x)\leqslant mn-j-4$. 因此, 通过计算 $A_{jk}^{(j+1)}(x)$ 的根的个数来导致矛盾. 由(1.1.3), $x_i(i=1,\cdots,n)$ 至少是 $A_{jk}^{(j+1)}(x)$ 的 $m-j-1$ 重根, 应用 Rolle 定理, 由 $A_{jk}^{(p)}(x_i)=0(p=0,\cdots,j-1;\ i=1,2,\cdots,n)$ 不难发现 $A_{jk}^{(j)}(x)$ 在每个 $(x_{i+1},x_i)(i=1,\cdots,n-1)$ 内有 j 个根, 且 $A_{jk}^{(j+1)}(x)$ 在每个 (x_{i+1},x_i) 内有 $j+1$ 个根 $(i=1,\cdots,k,k+1,\cdots,n-1)$, 而在 (x_{k+1},x_k) 和 (x_k,x_{k-1}) 内只能得到 j 个根(因 $A_{jk}^{(j)}(x_k)=1$). 总起来我们得到 $A_{jk}^{(j)}(x)$ 有

$$n(m-j-1)+(n-3)(j+1)+2j=mn-j-3$$

个根, 即 $A_{jk}^{(j+1)}(x)\equiv0$, 此与 $A_{jk}^{(j)}(x)$ 非常数(见(1.1.3))矛盾. 因

此如果我们设

$$c_{jk}=\sup\{c|B_{jk}(x)\geqslant c(x-x_k)^{m-j-1},\ -\infty<x<+\infty\},\tag{1.1.14}$$

则 $c_{jk}>0$,且等价地有

$$C_{jk}(x):=B_{jk}(x)-c_{jk}(x-x_k)^{m-j-1}\geqslant 0,\quad -\infty<x<+\infty.\tag{1.1.15}$$

因 $b_{m-j-1,k}>0$, 所以从 (1.1.15) 推出 $c_{jk}\leqslant b_{m-j-1,k}$. 应用在 $x=x_k$ 处的 Taylor 展开及(1.1.15),(1.1.11),(1.1.7)和(1.1.3) 得到

$$C_{jk}(x)l_k(x)^m\frac{(x-x_k)^j}{j!}=A_{jk}(x)-\frac{c_{jk}}{j!}l_k(x)^m(x-x_k)^{m-1}$$

$$=\frac{(x-x_k)^j}{j!}-\frac{c_{jk}}{j!}(x-x_k)^{m-1}+(x-x_k)^mD_{jk}(x),$$

其中 $D_{jk}(x)$是多项式. 因此

$$\begin{aligned}E_{jk}(x)&:=C_{jk}(x)l_k(x)^m\\&=1-c_{jk}(x-x_k)^{m-j-1}+j!(x-x_k)^{m-j}D_{jk}(x).\end{aligned}\tag{1.1.16}$$

我们现在分两种情况讨论.

情形 1: $c_{jk}=b_{m-j-1,k}$. 此时 $C_{jk}(x)$ 次数 $\leqslant m-j-3$ (因 $C_{jk}(x)$ 是偶数次的), 且 $E_{jk}(x)$ 的次数 $\leqslant m-j-3+m(n-1)=mn-j-3$. 考虑 $E'_{jk}(x)$的根, $x_i(i\neq k)$ 是至少 $m-1$ 次根, x_k 是 $m-j-2\geqslant 1$ 次根. 又由 $x_1,\cdots,x_{k-1}$及$x_{k+1},\cdots,x_n$ 是 $E_{jk}(x)$的根, 根据 Rolle 定理可得到 $n-3$ 个根. 合起来有

$$(m-1)(n-1)+(m-j-2)+(n-3)=mn-j-4$$

个根,它正好是 $E_{jk}(x)$的次数,即没有别的什么根.

情形 2: $c_{jk}<b_{m-j-1,k}$. 此时存在 $\alpha_{jk}\neq x_k$,使得

$$C_{jk}(\alpha_{jk})=C'_{jk}(\alpha_{jk})=0.\tag{1.1.17}$$

实际上,如果$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,$C_{jk}(x)>0$, 则与(1.1.14) 中 C_{jk}

的定义相矛盾．又 $C_{jk}(x) \geqslant 0$，所以由 $C_{jk}(\alpha_{jk})=0$ 不难见到 $C'_{jk}(\alpha_{jk})=0$（因为 $C'_{jk}(x)$ 连续）． 现在我们考虑 $E'_{jk}(x)$ 的根．除上面所述的根外，α_{jk} 也是 $E'_{jk}(x)$ 的根．如果 $\alpha_{jk}=x_i(i \neq k)$，则 x_i 是比情形 1 中重数高 2 的根，否则 $\alpha_{jk} \neq x_i(i \neq k)$，由 Rolle 定理即可导出另外的一个根． 于是 $E'_{jk}(x)$ 根的总数为 $mn-j-2$，它正好与 $E'_{jk}(x)$ 的阶数相同．

这样，在两种情况下，由(1.1.16)总可得到

$$E'_{jk}(x)=(x-x_k)^{m-j-2}F_{jk}(x),$$

其中

$$\begin{aligned} F_{jk}(x) = & -(m-j-1)c_{jk}+(x-x_k)j! \cdot \\ & [(m-j)D_{jk}(x)+(x-x_k)D'_{jk}(x)]. \end{aligned} \qquad (1.1.18)$$

不失一般性，我们可假设在第 2 种情形中 $x_k < \alpha_{jk}(2 \leqslant k \leqslant n)$．（对称地考虑，$x_k > \alpha_{ik}$ 本质上类似．）我们此时仍分两种情况．

情形 1′：$2 \leqslant k \leqslant n$．定义

$$\beta_{jk}=\begin{cases} x_{k-1}, & c_{jk}=b_{m-j-1,k} \\ \min(\alpha_{jk}, x_{k-1}), & c_{jk}<b_{m-j-1,k} \end{cases}$$

我们可断言多项式 $F_{jk}(x)$ 在 (x_{k+1}, β_{jk}) 中无根（如果 $k=n$，则该区间为 $(-\infty, \beta_{jn})$）． 因为 $F_{jk}(x)$ 只有实根，所以 F_{jk} 至少在 (x_{k+1}, x_k) 及 (x_k, β_{jk}) 之一是单调的（如果 $k=n$，则该区间为 $(-\infty, \beta_{jn}) \supset (x_n, \beta_{jn})$）．不失一般性，我们可以假定第一种可能性，即由(1.1.18)，

$$\begin{gathered} 0 \geqslant F_{jk}(x) \geqslant F_{jk}(x_k)=-(m-j-1)c_{jk}, \\ x_{k+1} \leqslant x \leqslant x_k. \end{gathered} \qquad (1.1.19)$$

由(1.1.16)，$E_{jk}(x_{k+1})=0$，$E_{jk}(x_k)=1$，于是由(1.1.19)，

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{x_{k+1}}^{x_k} E'_{jk}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_{k+1}}^{x_k} (x-x_k)^{m-j-2}F_{jk}(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\leqslant -(x_k - x_{k+1})^{m-j-2}\int_{x_{k+1}}^{x_k} F_{jk}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (x_k - x_{k+1})^{m-j-1}(m-j-1)c_{jk}, \tag{1.1.20}$$

因此,由(1.1.20)和(1.1.14)我们即得到(1.1.12).(如果单调区间是 (x_k,β_{jk}),则代之以(1.1.20)中的 $x_k - x_{k+1}$ 换成 $\beta_{jk} - x_k \leqslant x_{k-1} - x_k$ 即可.)

情形 2′:$k=1$. 这种情况只需考虑 $c_{j1} < b_{m-j-1,1}$. 在 $c_{j1} = b_{m-j-1,1}$ 情况下,$F_{j1}(x)$ 将在 (x_2,x_1) 内单调. 现在假定 $F_{j1}(x)$ 在 (x_2,α_{j1}) 中不等于 0,如果 $F_{j1}(x)$ 在 (x_2,x_1) 中单调,则如上即可证明. 相反的话,由于 $\alpha_{j1} < x_1$,所以可设 $F_{j1}(x)$ 在 $y \in (x_2,\alpha_{j1}) \subset (x_2,x_1)$ 处达到在 (x_2,α_{j1}) 内的最小值. 以下分两种情况.

情形 2′.1:$F_{j1}(y) \leqslant 2F_{j1}(x)$.

由 $F_{j1}(x)$ 在 $(y,+\infty)$ 中的下凸性得

$$0 < \alpha_{j1} - x_1 \leqslant x_1 - y \leqslant x_1 - x_2.$$

于是

$$\begin{aligned}
1 &= -\int_{x_1}^{\alpha_{j1}} E'_{j1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{x_1}^{\alpha_{j1}} (x - x_1)^{m-j-2} F_{j1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant -(\alpha_{j1} - x_1)^{m-j-1} F_{j1}(x_1) \\
&\leqslant (x_1 - x_2)^{m-j-1}(m-j-1)c_{j1},
\end{aligned}$$

此即 $k=1$ 时的(1.1.20).

情形 2′.2:$F_{j1}(y) \geqslant 2F_{j1}(x_1)$,则

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{x_2}^{x_1} E'_{j1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant -(x_1 - x_2)^{m-j-1} F_{j1}(y) \\
&\leqslant -2(x_1 - x_2)^{m-j-1} F_{j1}(x_1) \\
&= 2(x_1 - x_2)^{m-j-1}(m-j-1)c_{j1},
\end{aligned}$$

这即是相差因子 2 的(1.1.20). 引理 1.1.3 证毕.

由引理 1.1.1 和 1.1.3 得到下面推论.

推论 $|A_{jk}(x)|\geqslant\frac{c_3}{j!}\left|\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x)}\right|^m\frac{1}{|x-x_k|\cdot|x_k-x_{k\pm1}|^{m-j-1}}$,

其中 $-\infty<x<+\infty$, $m-j$ 为奇数, $0<j\leqslant m-1$, $k=0,\cdots,n$, 对符号 $x_{k\pm1}$ 之一成立.

引理 1.1.4(见Erdös-Turán[3]) 对记号

$$I_n=\left[-\frac{1}{\lg n},\ \frac{1}{\lg n}\right],$$

$$I_n'=\left[-\left(1-\frac{\lg^2 n}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\lg n},\ \left(1-\frac{\lg^2 n}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\lg n}\right],$$

$$M_n=\max_{|x|\leqslant1}|\omega_n(x)|,\quad \overline{M}_n=\max_{x\in I_n}|\omega_n(x)|,$$

我们有

$$\max_{x\in I_n'}|\omega_n'(x)|\leqslant c_{4n}\left(\frac{M_n}{\lg^2 n}+\overline{M}_n\right),$$

其中 $c_4>0$ 是绝对常数.

定理 1.1.1 的证明: 情形 1: $m-j$ 为奇数.

情形 1.1: 存在 $1\leqslant k_0\leqslant n$, 使得

$$|l_{k_0}(y)|=\|l_{k_0}(x)\|\geqslant n^2.$$

那么由 Markov 不等式,

$$|l_{k_0}(x)|\geqslant\frac{1}{2}n^2,\quad |x-y|\leqslant\frac{1}{2n^2},\quad |x|\leqslant1.$$

因此存在 $z\in[-1,1]$, 使得

$$|z-y|\leqslant\frac{1}{2n^2}\leqslant|z-x_{k_0}|.$$

由推论得

$$|A_{jk_0}(z)|\geqslant\frac{c_3}{j!}\frac{\left(\frac{1}{2n^2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}n^2\right)^m}{2^{m-j-1}}\geqslant c_5 n^2.$$

此时定理 1.1.1 显然成立.

情形 1.2: $\|l_k(x)\|=O(n^2)$, $k=1,\cdots,n$. 由 Erdös P[7] 结点系(1.1.1)在下述意义下渐近一致分布: 令 $x_k=\cos\theta_k$, $k=1,\cdots,n$,我们有

$$\left|\sum_{\theta_k\in I}1-\frac{|I|}{\pi}n\right|\leqslant \lg^2 n,\qquad I\leqslant[0,\pi],$$

其中$|I|$表示区间 I 的长度,因此

$$\sum_{x_k\in I}1\geqslant\frac{|I|}{15}n,\quad I\subset[-1,1],$$

$$|I|\geqslant 4\,\frac{\lg^2 n}{n},\quad n\geqslant n_0.$$

利用调和——几何——平均不等式,对$p\geqslant1$,有

$$\sum_{x_k\in I}\frac{1}{|x_k-x_{k\pm1}|^p}\geqslant\frac{\sum\limits_{x_k\in I}1}{\left(\prod\limits_{x_k\in I}|x_k-x_{k\pm1}|\right)^M}$$

$$\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{x_k\in I}1\right)^{p+1}}{\left(\sum\limits_{x_k\in I}|x_k-x_{k\pm1}|\right)^p}\geqslant\frac{\left(\frac{|I|}{15}n\right)^{p+1}}{\left(2|I|+8\frac{\lg^2 n}{n}\right)^p}$$

$$\geqslant\frac{|I|n^{p+1}}{4^{3p+2}},\tag{1.1.21}$$

$$|I|\geqslant 4\,\frac{\lg^2 n}{n},\quad n\geqslant n_0,$$

其中符号 $x_{k\pm1}$ 可任意, $M=\dfrac{1}{\sum\limits_{x_k\in I}1}$.

情形1.2.1: $\overline{M}_n\leqslant\dfrac{M_n}{\lg^2 n}$. 由引理 1.1.4,

$$\max_{x \in I_n'} |\omega_n'(x)| \leqslant \frac{2c_4 M_n n}{\lg^2 n},$$

且对$|\omega_n(y)| = M_n$，由推论及对$p = m - j - 1$时的(1.1.21)和$I = I_n'$，有

$$\begin{aligned}
L_{jmn} &\geqslant \sum_{x_k \in I_n'} |A_{jk}(y)| \\
&\geqslant \frac{c_3}{j!} \sum_{x_k \in I_n'} \left| \frac{\omega_n(y)}{\omega_n'(x_k)} \right|^m \frac{1}{|y - x_k| \cdot |x_k - x_{k\pm1}|^{m-j-1}} \\
&\geqslant c_6 \left(\frac{\lg^2 n}{n} \right)^m \sum_{x_k \in I_n'} \frac{1}{|x_k - x_{k\pm1}|^{m-j-1}} \\
&\geqslant c_7 \frac{\lg^{2m-1} n}{n^j}.
\end{aligned}$$

此可得定理 1.1.1.

情形1.2.2: $M_n \leqslant \overline{M}_n \lg^2 n$. 由引理 1.1.4,

$$\max_{x \in I_n'} |\omega_n'(x)| \leqslant 2c_4 n \overline{M}_n,$$

因此对$|\omega_n(z)| = \overline{M}_n$，$\frac{1}{-\lg n} \leqslant z \leqslant 0$(不失一般性)及

$$I_{n,\lambda} := \left[z + (2\lambda + 1)\frac{\lg n}{n},\ z + (2\lambda + 3)\frac{\lg n}{\sqrt{n}} \right] \subset I_n', \lambda = 0, 1, \cdots,$$

$$\left[\frac{\sqrt{n}}{\lg^3 n} \right] := q,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
L_{jmn} &\geqslant \sum_{x_k \in I_n'} |A_{jk}(z)| \\
&\geqslant \frac{c_3}{j!} \sum_{x_k \in I_n'} \left| \frac{\omega_n(z)}{\omega_n'(x_k)} \right|^m \frac{1}{|z - x_k| \cdot |x_k - x_{k\pm1}|^{m-j-1}} \\
&\geqslant \frac{c_3}{j!(2c_5 n)^m} \sum_{\lambda=1}^{q} \sum_{x_k \in I_{n,\lambda}} \frac{1}{|z - x_k| \cdot |x_k - x_{k\pm1}|^{m-j-1}}
\end{aligned}$$