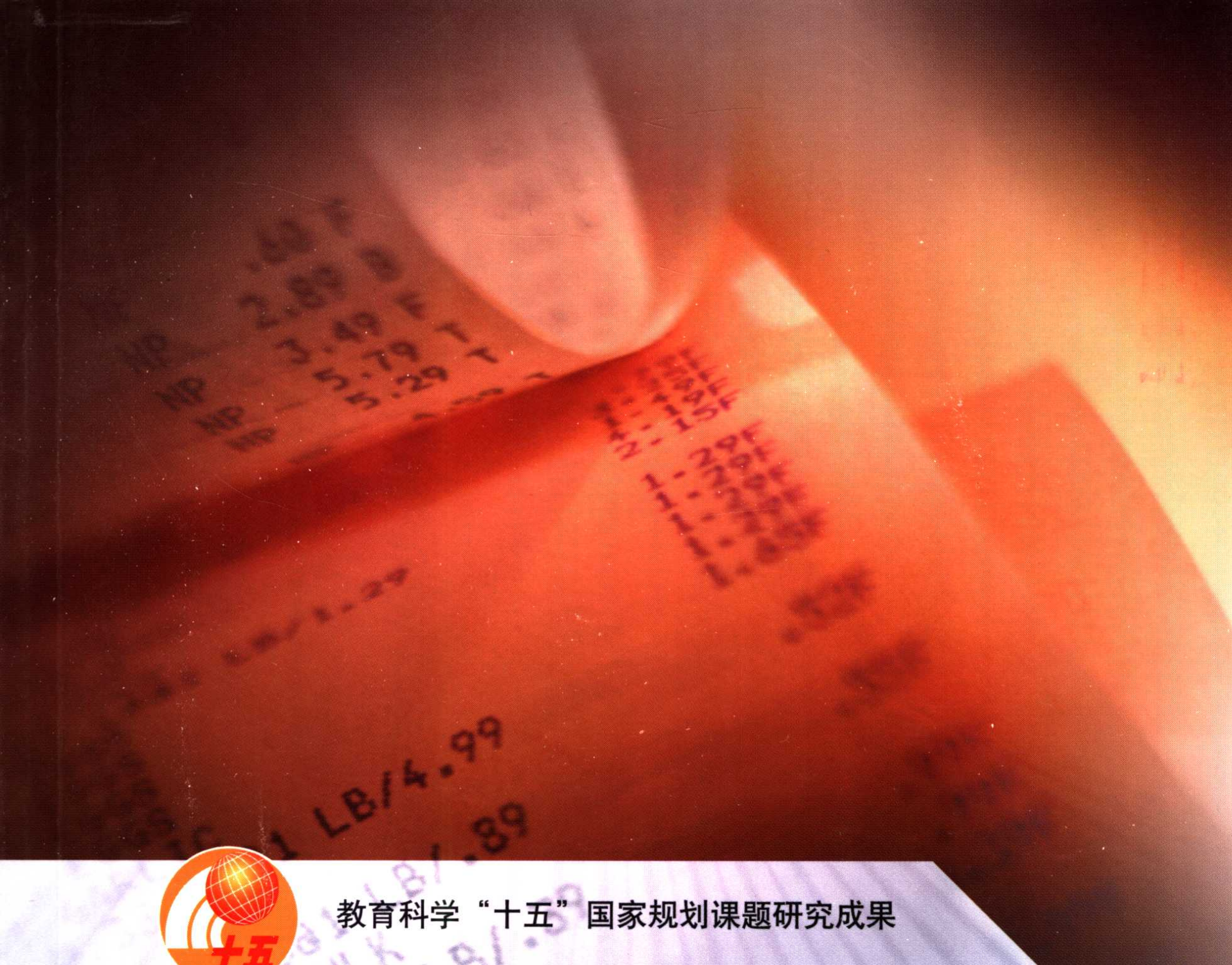

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

# 经济应用数学
## ——线性代数


主　编　陈建华

副主编　石瑞民　陈善我





高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

# 经济应用数学——

# 线 性 代 数

主　编：陈建华
副主编：石瑞民　陈善我

高等教育出版社

## 内容提要

本书是教育科学"十五"国家规划课题"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"数学类子课题项目成果之一,是编者结合多年教学体会编写而成的。全书以矩阵为主线,将线性方法得以充分体现的同时,利于学生理解线性代数课程的基本原理,完成线性方程组的求解、方阵可对角化判定、二次型化简三大问题的学习。教材注重联系实际,加强应用;注意渗透现代数学的观点;重视例题与习题的设计和选配。

全书共分6章,前3章为基础篇,后3章为应用提高篇,内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵相似对角化、二次型及投入产出数学模型等,可供培养应用型人才的高等学校经济管理类专业学生选用,也可供有关经济管理人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

经济应用数学. 线性代数/陈建华主编. —北京:高等教育出版社,2004.1
ISBN 7-04-012934-5

Ⅰ.经… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第108645号

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-64054588 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 中国农业出版社印刷厂 | | |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2004年1月第1版 |
| 印　　张 | 15 | 印　　次 | 2004年1月第1次印刷 |
| 字　　数 | 270 000 | 定　　价 | 16.10元 |

---

# 总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型本科人才培养体系，全国高等学校教学研究中心(以下简称“教研中心”)在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组(亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组)。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型本科人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部"高等学校教学质量和教学改革工程"的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003年4月

# 前　言

近年来，随着科技的发展和计算机应用的普及，数学与各门学科及实践活动的关系更加密切．作为现代数学的重要基石，线性代数被列为高等学校非数学专业的数学基础课．根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求，编者结合多年从事线性代数、高等代数等课程教学的体会编写这本书，其目的是为经济及管理类专业提供一本较适用的线性代数教材．

编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，内容上具有足够的理论深度，以满足管理科学后继课程学习的需要，表达上尽可能由浅入深，使初学者感到入门并不困难，从而提高深入掌握其基本理论和方法的信心．以矩阵作为贯穿全书的主线，让线性方法得以充分体现的同时，利于学生理解线性代数课程的基本原理，完成线性方程组的求解，方阵可对角化判定，二次型化简三大问题的学习．注意渗透现代数学的观点，在概念引入，理论分析，例题演算等环节上力图体现代数、几何和分析的联系，让读者能从几何背景中，理解代数概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示．注重联系实际，加强应用，如从商品运输问题引进矩阵的乘法，描述空间导弹运行状态，解释高维向量的概念等．重视例题和习题的设计和选配，每章附有内容提要，以帮助读者加深对内容的理解并及时巩固所学的内容．

全书共分 6 章，既紧密联系又相对独立，本书的前 3 章为基础篇，后 3 章为应用提高篇．根据本科线性代数课程教学基本要求，36 学时可讲完前 3 章和第 4 章 1、2 节；48 学时可讲完本教材的前 5 章；54 学时可讲完全书．根据现行研究生入学考试的考试大纲，从内容上看，本书的前 4 章覆盖数学(四)的考试要求，前 5 章覆盖数学(三)的考试要求．教师可以根据不同专业和不同教学时数选择有关章节组织教学．

本书第 1 章由陈善我撰写，第 2、3 章和附录 B 由石瑞民撰写，第 4、5、6 章和附录 A 由陈建华撰写．扬州大学数学科学学院副院长刘金林、淮海工学院数理系主任曹伟平对本书的初稿进行讨论，提出许多宝贵的意见，扬州大学数学科学学院蔡苏淮老师校阅全部书稿，对本书的撰写和改进帮助尤大．在本书的撰写过程中，还得到高等教育出版社、扬州大学教务处的大力支持，特别要

感谢高等教育出版社的李艳馥老师为本书的出版付出大量心血.

由于编者水平有限,书中内容体系、结构可能会有不当甚至错误之处,热诚欢迎同行和读者批评指正.

编 者

2003 年 7 月

策划编辑　李艳馥
责任编辑　胡乃冏
封面设计　王　雎
责任印制　杨　明

# 郑重声明

# 目　录

# 第1章 行 列 式

线性代数是高等学校的一门重要基础课，也是中学代数的继续和发展．行列式是线性代数中主要研究对象方阵的重要数值特征，它在线性代数中起着重要作用．本章介绍行列式的概念、基本性质、计算方法及其简单应用．

## §1.1 行列式的定义

行列式的概念来源于解线性方程组的问题．在初等数学中，为了简化线性方程组解的表达式，引进了二、三阶行列式的概念．作为线性代数的重要工具，在讨论 $n$ 元线性方程组和向量的运算时，需要把行列式推广到 $n$ 阶，即讨论 $n$ 阶行列式的问题．

### 1.1.1 二阶、三阶行列式

在初等数学中，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的解，实际上为平面上两条直线的交点．当这两条直线不平行时，即 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，利用消元法可解得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆上述解的公式，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并称之为二阶行列式．利用二阶行列式的概念，方程组(1.1)的解可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

**例 1.1** 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 5x - 4y = -2 \end{cases}$$

**解**　因为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times 5 = -23 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -46$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -69$$

所以方程解为 $x = 2, y = 3$.

对于含有三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

可以进行类似的讨论.由此引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

并称之为三阶行列式.行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列.二、三阶行列式所表示的数利用对角线法则来记忆(见图 1.1).

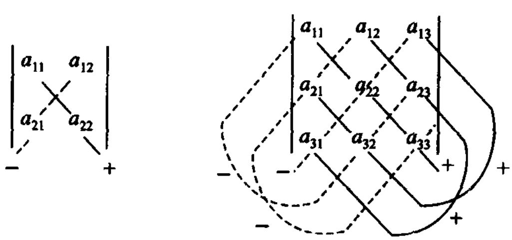


图 1.1

**例 1.2**　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

**解**　$D = 2 \times 2 \times (-5) + (-3) \times 7 \times 1 + 3 \times 1 \times 0$
$\quad - 3 \times 2 \times 1 - (-3) \times 1 \times (-5) - 2 \times 7 \times 0$

$$= -20 - 21 - 6 - 15$$
$$= -62.$$

从二、三阶行列式的定义可以看出，行列式的值是一些“项”的代数和. 例如在三阶行列式中，每一项都是三个数的连乘积，而且这三个数取自三阶行列式的不同的行与不同的列，总项数以及每一项相应的正负号，则与其下标的排列有关. 为了揭示二、三阶行列式的结构规律，将行列式的概念推广到 $n$ 阶，先简单介绍一些有关排列的基本知识.

### 1.1.2 数码的排列

$n$ 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 $n$ 元排列. 如 312 和 634521 分别为三元和六元排列. 众所周知，$n$ 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的全部排列总数为 $n!$. 例如自然数 1,2,3 可组成 $3! = 6$ 个排列，我们用 $i_1 i_2 i_3$ 表示这 6 个排列中的一个.

**定义 1.1** 在排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果 $i_s > i_t$，则这两个数构成一个逆序. 排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总个数称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

**例 1.3** 求下列排列的逆序数.

(1) 2143; (2) 35412;

(3) $n(n-1)\cdots 21$; (4) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

**解** (1) 在排列 2143 中，数 2 与后面的 1 构成逆序；数 1 后面没有数与 1 构成逆序；数 4 与后面的 3 构成逆序；数 3 排最后. 故 $\tau(2143) = 1+0+1+0 = 2$；

(2) $\tau(35412) = 2+3+2+0+0 = 7$；

(3) $$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2};$$

(4) 所给排列中 $1、3、5\cdots(2n-1)$ 的逆序个数为零，$2、4、6\cdots(2n)$ 的逆序个数也为零，故只要计算其余数的逆序个数.

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) = 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

排列 $12\cdots(n-1)n$ 具有自然顺序，称为自然排列.

**定义 1.2** 一个排列的逆序数为偶数时，称它为偶排列；一个排列的逆序数为奇数时，称它为奇排列.

排列 23154 的逆序数 $\tau(23154) = 3$，为奇排列，而排列 23451 的逆序数 $\tau(23451) = 4$，为偶排列. 排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$，当 $n =$

$4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，为奇排列.

**例 1.4**　由 1,2,3 这三个数码组成的三元排列共有 $3!=6$ 个，这 6 个排列及其奇偶性如下表所示：

| 排列 | 逆序数 | 排列的奇偶性 |
|---|---|---|
| 123 | 0 | 偶排列 |
| 132 | 1 | 奇排列 |
| 213 | 1 | 奇排列 |
| 231 | 2 | 偶排列 |
| 312 | 2 | 偶排列 |
| 321 | 3 | 奇排列 |

在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果将两个数码 $i_s$ 与 $i_t$ 对调，其余的数码不变而得到另一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换叫做一个对换，记为 $(i_s,i_t)$.

如，对排列 21354 施以对换(1,4)后得到排列 24351.

**定理 1.1**　对换改变排列的奇偶性.

**证明**　首先讨论对换相邻数码的特殊情形，设排列为 $AijB$，其中 $A,B$ 表示除了 $i,j$ 两个数码外的其余数码，经过对换 $(i,j)$，变为新排列 $AjiB$. 比较上面两个排列中的逆序，显然，$A,B$ 中数码的次序没有改变，$i,j$ 与 $A,B$ 中数码的次序也没有改变，仅仅改变了 $i$ 与 $j$ 的次序，因此，新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时)，或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时)，所以对换后排列与原排列的奇偶性相反.

现在看一般情形，设排列为 $Aik_1k_2\cdots k_sjB$，经过对换 $(i,j)$，变为新排列 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$. 新排列可以由原排列将数码 $i$ 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻数码的对换，变为 $Ak_1k_2\cdots k_sjiB$，再将 $j$ 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 $s$ 次相邻数码的对换，变为 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$，即可以由原排列经过 $2s+1$ 相邻数码的对换得到. 由前面的讨论可知它改变了奇数次奇偶性，所以它们的奇偶性相反.

**定理 1.2**　全体 $n(n>1)$ 元排列的集合中，奇、偶排列各占一半.

**证明**　$n$ 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的全部排列总数为 $n!$，设其中奇排列为 $p$ 个，偶排列为 $q$ 个. 设想将每一个奇排列施以相同的对换，如(1,2)，则由定理 1 可知 $p$ 个奇排列全部变为偶排列，于是 $p\leqslant q$；同理如果将全部偶排列施以相同的对换，如(1,2)，则 $q$ 个偶排列全部变为奇排列，于是 $q\leqslant p$，所以 $p=q$.

**推论**　任意一个排列都可以经过一定次数的对换，变成自然排列，且奇

排列变成自然排列的对换次数为奇数,偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

### 1.1.3 $n$ 阶行列式的定义

有了排列的逆序数和奇偶性的概念,我们观察二、三阶行列式的"项"的构成,二阶(三阶)行列式的计算式中,求代数和项的数分别为 $2! = 2$ 项($3! = 6$ 项),每一项是 2 个(3 个)数的乘积,这些数取自行列式符号的不同的行和列,且每一项的行标排列是自然排列时,列标排列为奇排列时该项带负号,列标排为偶排列时该项带正号,即它们可分别表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

类似地,根据这个规律,可推广二阶、三阶行列式的概念,定义 $n$ 阶行列式.

**定义 1.3** $n^2$ 个数 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式,其中横排、纵排分别称为它的行和列.它表示所有可能取自不同的行不同的列的 $n$ 个元素乘积的代数和,各项的符号确定方法是:当这一项中元素的行标按自然顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.因此 $n$ 阶行列式表示的数为

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 $n$ 阶行列式的一般项, $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $n$ 级排列求和.简记为 $|a_{ij}|_{n\times n}$.

根据行列式的定义,在五阶行列式中,$a_{14}a_{25}a_{31}a_{43}a_{52}$ 因行标排列是自然顺序,而 $\tau(45132) = 7$,故所带的符号为"$-$".四阶行列式共 24 项,因此,不能用对角线法则去计算它.

特别地定义一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是 $a_{11}$(注意与绝对值的区别).

**例 1.5** 设 $D = |a_{ij}|$ 为 5 阶行列式,问 (1)$a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$, (2)$a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{55}$,(3)$a_{25}a_{43}a_{31}a_{54}a_{12}$是否为$D$中的项?若是,应取什么符号?

**解** (1)$a_{12}a_{23}a_{31}a_{45}a_{54}$的行标排列为12345,列标排列为23154,表明这些数取自不同的行,不同的列,所以它是$D$中的一项,且行标为自然排列,$\tau(23154)=3$为奇数,故该项应取负号.

(2)$a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{55}$的行标排列为12345取自不同行,列标排列为45325,取自第5列的有两个元素,根据行列式的定义,它不是五阶行列式的一项.

(3)$a_{25}a_{43}a_{31}a_{54}a_{12}$的行标排列为24351,列标排列53142表明该项中5个数取自不同行和不同列,所以它是行列式$D$的一项,为了确定该项的符号,把它的行标按自然顺序排列为$a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$,列标的排列为25134,与(1)中列标排列差一个对换(5,3),故为偶排列,该项取正号.

**例 1.6** 计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

**解** 行列式$D$的一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,该行列式中有很多元素为零,现在考察有哪些项不为零.一般项中最后一个元素$a_{nj_n}$取自第$n$行,但第$n$行中只有一个元素$a_{nn}$不为零,因而$j_n=n$,即行列式中除了含$a_{nn}$的那些项外,其余项均为零.一般项中,倒数第二个元素$a_{n-1,j_{n-1}}$取自第$n-1$行,但第$n-1$行中只有两个元素$a_{n-1,n-1}$和$a_{n-1,n}$不为零,而$a_{nn}$取自$n$行$n$列的,因此$a_{n-1,n}$在一般项不能再取,故$a_{n-1,j_{n-1}}$为$a_{n-1,n-1}$,即行列式中只有含$a_{n-1,n-1},a_{nn}$的项不为零,其余均为零,类似讨论可知不为零的项只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.由于$\tau(12\cdots n)=0$,这一项取正号.故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1.3}$$

行列式中$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$所在的这条线称为主对角线.上式表明$D$为主对角线元素的积.类似地