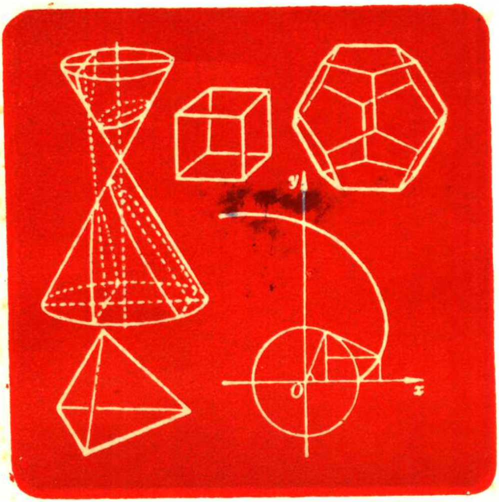


张 弛

不等式

上海教育出版社

不　　等　　式

张　　弛

上海教育出版社

不　　等　　式

张　　弛

上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

福建人民出版社重印

福建省新华书店发行　三明市印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张2.75　字数58,000

1963年12月第1版　1978年10月福建第1次印刷

印数：1—200,000册

统一书号：7150·1477　定价：0.22元

目　录

引　言

在現实生活中，到处可以遇到和数学有关的問題，譬如：

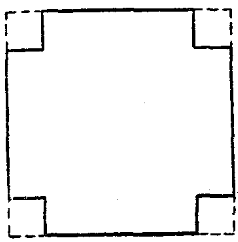
你或許天天都接触到自来水管，但你有沒有想过：自来水管的直截面为什么总是圓的，而不是方的呢？

你有沒有想过：一个工厂經过扩建后，計划后年的产量是今年的2倍，如果要超額完成这个計划，那末明、后两年每年的平均增长率至少应当是多少？

某种机器价值 N 元，可以使用 n 次（n 年），損坏后經过修理，可以再使用 m 次（m 年）．如果修理費用是 x 元，你有沒有想过：在什么情况下，修理后再使用比較合算？在什么情况下，就不合算？

在夏季的早晨，看到农作物上滚滚的露珠，你大概不以为奇，更不会想到：露珠为什么是“圓”的呢？

給你一块正方形的白鉄，要求制成一只盒子．这时，你会想到在它的四角各剪去一个小正方形（剪去的四个小正方形



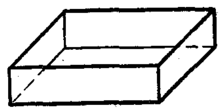


图　1

相等)后，再弯折成一只盒子(图 1)．但是，你有沒有想过：如果要使制成的盒子的容积最大，应当剪去多大的正方形呢？

每天晚上在灯下做功課的时候，你有沒有想过：电灯挂在桌子上方怎样的高度时，可以照得最亮？

亲爱的讀者，对于象上面这些經常会遇到的問題，你也許会感到兴趣吧．这些問題都和不等式有关，可以利用不等式的知識来解决．从这里，我們就可以看到不等式知識在我們日常生活、生产中的广泛应用了．

正因为关于不等式的問題是我們在日常生活和生产劳动中經常会遇到的，所以它在数学的各个方面也是一个重要的基础．譬如，我們学过解方程或者方程組的許多知識，而对于方程的解的討論，就需要用到不等式．在以后学习高等数学中，更要經常用到不等式．近年来才迅速发展起来的数学規划(包括綫性規划)这一个对国民經济很有用的学科，它的理論就和不等式的研究有非常密切的关系．

一　不等式的基本性质

两类問題．——不等式有哪些基本性质？——怎样証明它們？——錯在哪里？——进一步想想看．

在引言里，我們举了一些可以利用不等式知識来解的有趣的实际問題．現在让我們初步分析一下其中的几个問題，看看它們究竟是一些什么性质的問題．

譬如，自来水管的直截面为什么制成圓形而不是正方形这个問題，从数学的角度来看，这是因为，当周長相等的时候，

圆的面积比正方形的面积大，所以用同样的一块材料制成截面是圆形的水管，流水量要来得大；也就是説，制成直截面是圆形的水管比較节省材料. 我們知道，周长是 l 的正方形每边长 $\frac{l}{4}$，它的面积就等于 $\left(\frac{l}{4}\right)^2$；周长是 l 的圆的半徑 r 等于 $\frac{l}{2\pi}$，这个圆的面积就等于 $\pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$. 这样，我們的問題就变成要証明，当 l 是任何正实数的时候，下面这个不等式都成立：

$$\pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2>\left(\frac{l}{4}\right)^2. \tag{1}$$

也許有讀者还会問：当周长相等的时候，长方形的面积会不会比正方形的大一些呢？不，恰恰相反. 当周长相等的时候，长方形的面积比正方形的更小. 不妨設长方形的长和寬分别等于 a 和 b，那末它的面积等于 ab；与长方形周长相等的正方形每边长 $\frac{a+b}{2}$，它的面积等于 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. 我們也可以証明，当 a、b 是任何正实数的时候，下面的不等式都成立：

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab. \quad (a\neq b) \tag{2}$$

現在让我們再来看另外一个問題：一个工厂經过扩建后，計划后年的产量是今年的 2 倍，如果要超额完成这个計划，那末明、后两年每年的平均增长率至少应当是多少？

設今年的产量是 1，明后两年每年的平均增长率是 x. 那末明年的产量应当是 $1+x$；后年的产量就是 $(1+x)^2$. 这样就得到

$$(1+x)^2>2. \tag{3}$$

因此，我們的問題就是要求出适合上面这个不等式的求

知数 x 的値.

从这里我們可以看到，这个問題跟前面一个問題的性质是不同的. 象 (1)、(2) 那样的不等式，不論其中字母 l 或者 a、b 取什么数值 (当然要在容許取値的范圍內)，不等式都能成立，叫做絕对不等式；問題是要我們証明这样的不等式成立. 而象 (3) 那样的不等式是含未知数的不等式；問題是要我們求出适合于这样的不等式的解.

不等式的問題，主要就分为絕对不等式的証明和含未知数的不等式(不等式組)的求解两大类. 但是，不論解决哪一类不等式的問題，所根据的都是不等式的基本性质. 因此，不等式的基本性质是我們必須透徹理解而且掌握的. 这些基本性质是：

(1) **如果 $a>b$，那末 $b<a$.**

(2) **如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a>c$.**

(3) **如果 $a>b$，那末 $a+c>b+c$，这里，c 是任何实数.**

(4) **如果 $a>b$，$c>d$，那末 $a+c>b+d$.**

(5) **如果 $a>b$，$c<d$，那末 $a-c>b-d$.**

(6) **如果 $a>b$，$c>0$，那末 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，那末 $ac<bc$.**

(7) **如果 $a>b$，a、b 都是正数 (就是 $a>b>0$)，那末**

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

(8) **如果 $a>b$，$c>d$，a、b、c、d 都是正数，那末**

$$ac>bd.$$

(9) **如果 $a>b$，$c<d$，a、b、c、d 都是正数，那末**

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}.$$

(10) **如果 $a>b>0$, n 是任何正整数，那末 $a^n>b^n$.**

(11) **如果 $a>b>0$, n 是大于 1 的整数，那末**

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

怎样来証明这些基本性质呢？开头几个性质，只能根据"不等"这个概念的定义来証明它們．我們知道，要比較两个实数 a、b 的大小，只要考察它們的差就可以了①．也就是說，"$a>b$"或者"$a<b$"，可以根据 $a-b>0$ 或者 $a-b<0$ 来确定．利用这一点，基本性质(1)—(7)都可以得到証明．例如証明性质(6)．就是已知 $a>b$, $c>0$．求証 $ac>bc$．根据上面所說的，这就要証明 $ac-bc>0$．但是

$$ac-bc=(a-b)c.$$

从 $a>b$，可以知道，

$$a-b>0.$$

所以，当 $c>0$ 的时候，

$$(a-b)c>0,$$

就是 $ac>bc$.

同样，当 $c<0$ 的时候，

$$ac-bc=(a-b)c<0,$$

就是 $ac<bc$.

証明了几个基本性质后，就可以利用它們来証明其他的基本性质．例如証明性质(8)，就是已知 $a>b$, $c>d$, a、b、c、d 都是正数，求証 $ac>bd$．如果要从証明 $ac-bd>0$ 而得到

---

① 因为对于两个任意的复数沒有大小的規定，所以不等式只在实数范圍里研究.

$ac>bd$，是很困难的．这就使我們想到利用前面已經証明了的那些性质．在性质(1)—(7)里，只有性质(6)涉及“乘法”，因此，我們考虑能否利用性质(6)来証明性质(8)．

根据性质(6)，从 $a>b$ 和 $c>0$ 可以推得 $ac>bc$．而現在要求証明 $ac>bd$．所以，根据性质(2)，我們只要証明 $bc>bd$．因为已知 $c>d$，$b>0$，所以 $bc>bd$．这样，从 $ac>bc$ 和 $bc>bd$，我們就得到 $ac>bd$．这就証明了性质(8)．

性质(9)可以利用性质(7)和性质(8)証得．性质(10)利用性质(8)很容易証得．在証明了性质(10)以后，应用反証法容易得到性质(11)．这些証明請讀者完成．

性质(10)也可以不应用性质(8)而独立地加以証明．我們知道，要証明 $a^n>b^n$，就只要証明 $a^n-b^n>0$．而

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

已知 $a>b>0$，就是 a、b 和 $a-b$ 都是正数．因此，上式的右边两个因式

$$(a-b)\ \text{和}\ (a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

都是正数(因为 a^{n-1}、a^{n-2}、……、a 和 b、b^2、……、b^{n-1} 都是正数，它們的积与和也是正数)，这就証明了 $a^n-b^n>0$．就是 $a^n>b^n$．应用这个方法也可以証明性质(11)．

对于不等式的基本性质，我們除了能够証明它們以外，还应当能够熟练地运用它們．其中有几个性质和等式的性质相似，比較容易記得；有几个性质却和等式的性质不同，应当特别加以注意．总的来說，应当注意这样两点：第一，就是在性质(6)—(11)里，都有“a、b、c、d(或者其中的一个、两个字母所表示的数)都是正数”这个条件，許多錯誤往往都是由于忽略了这个条件所引起的；第二，在把两个不等式的两边分别相

加、相减、相乘或者相除的时候，必須注意到两个同向不等式才可以相加或者相乘，两个异向不等式才可以相减或者相除，而且在相乘或者相除时，还必須有“a、b、c、d 都是正数”这个条件.

現在請讀者来看看下面几个解法有沒有錯誤，究竟錯在哪里?

例 1 設 a 和 b 都是負数而 c 是正数，那末 ab 是正数，ac 和 bc 都是負数. 因此

$$ab>ac, \quad ab>bc.$$

两边分别相减，就得到

$$ab-ab>ac-bc,$$

就是 $$ac-bc<0, \quad (a-b)c<0.$$

由此推得 $a-b<0$，就是 $a<b$.

例 2 如果 $a>b$，那末 $a-b>0$.

因为 $$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

所以 $$a^2-b^2>0,$$

因此，$$a^2>b^2.$$

例 3 根据对数的性质，可以知道 $\lg\frac{1}{4}>\lg\frac{1}{5}$. 因为 $2>1$，把这两个不等式的两边分别相乘，得到

$$2\lg\frac{1}{4}>\lg\frac{1}{5},$$

就是 $$\lg\left(\frac{1}{4}\right)^2>\lg\frac{1}{5},$$

$$\lg\frac{1}{16}>\lg\frac{1}{5}.$$

所以 $\frac{1}{16}>\frac{1}{5}$.

上面的例 1 的結論显然是错的．因为对于任意两个負数 a、b，$a<b$ 不一定成立．所以得到这个錯誤結論是由于把两个同向不等式相减所致．事实上，两个同向不等式相减的結果会有不同的情况．例如，已知 $5>3$，$3>1$，那末 $5-3=3-1$；$-3>-5$，$-4>-7$，那末

$$(-3)-(-4)<(-5)-(-7).$$

同样，我們可以从一些数值不等式的例子里看到，两个同向不等式相除，以及两个异向不等式相加或者相乘，它們的結果也都会有不同的情况．

上面的例 2，我們只要用 $a=-3$，$b=-4$ 来驗証这个結論[这时 $-3>-4$，而 $(-3)^2<(-4)^2$]，就可以知道这个推理过程是錯了．事实上，从 $a>b$ 推得 $a-b>0$ 是对的．但是，这里 a、b 沒有給定是正数，所以 $a+b$ 就不一定是正数．因此，$(a+b)(a-b)$ 也就不一定是正数，就是 $a^2>b^2$ 不一定成立．

从这里我們也可以看到，在性质(10)里，如果 a、b 不都是正数，那末从 $a>b$ 就不一定可以得到 $a^n>b^n$．

例 3 的錯誤是由于在利用性质(8)时忽略了"a、b、c、d 都是正数"这个条件．因为 $\lg\frac{1}{4}$ 和 $\lg\frac{1}{5}$ 都是負数，所以把两个不等式相乘就产生錯誤．

这里，会使我們想到这样的問題：在性质 (6)—(11) 里，"a、b、c、d 都是正数"这个条件是不是必要？如果沒有这个条件，会不会得不到肯定的結論？我們来看这个問題．

一般地，我們先看这个性质的証明过程中，哪一步推导要用到"a、b、c、d 都是正数"这个条件，这样我們就可以从这一

步着手进行分析．例如对于性质(7)，从已知$a>b$，求証$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，就是要証明

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}>0,\quad \text{或者}\quad \frac{a-b}{ab}>0.$$

从$a>b$知道分子$a-b>0$．再从a、b都是正数，知道分母$ab>0$．因此可以推得$\frac{a-b}{ab}>0$．从而証得

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

在这个証明过程中，"a、b都是正数"这个条件只是在推出$ab>0$时用到．因此，我們可以看到，如果把"a、b都是正数"这条件改成"a、b都是負数"，不等式$ab>0$仍旧成立．由此也可以推得$\frac{a-b}{ab}>0$，从而就証得$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$．如果a是正数、b是負数，那末$ab<0$成立，因此可以推得$\frac{a-b}{ab}<0$，从而得到$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$．这样，我們就得到如下的結論：

如果$a>b$，a和b同号(都是正数或者都是負数)，那末$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

如果$a>b$，a和b异号(a是正数而b是負数)，那末$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$．

事实上，上面的討論，我們还可以用另一种方法进行．首先，如果a是正数而b是負数，那末$\frac{1}{a}$是正数而$\frac{1}{b}$是負数，这就得到$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$．其次，如果a、b都是負数，那末，从已知$a>b$可以得到$-a<-b$，而$-a$和$-b$都是正数．由此可知，

$-\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}$，从而就推得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

对于性质(8)，也可以从分析它的証明过程中，哪一步推导用到"a、b、c、d 都是正数"这个条件进行討論. 此外，我們也可以用另一种方法来討論. 首先，如果 a、b、c、d 都是負数，那末从已知 $a>b$ 和 $c>d$ 可以推得 $ac<bd$. 其次，如果 a、b、c、d 里只有一个是負数(就是 b 或者 d 是負数)，很容易看出，这时 $ac>bd$. 第三，如果 a、b、c、d 里只有一个是正数(就是 a 或者 c 是正数)，也容易看到，这时 $ac<bd$. 这样，我們就得到如下的結論：

如果 $a>b$, $c>d$, a、b、c、d 里至少有三个是正数，那末 $ac>bd$;

如果 $a>b$, $c>d$, a、b、c、d 里至少有三个是負数，那末 $ac<bd$.

除了上面所說的以外，如果 a、b、c、d 四个数里有两个是正数，两个是負数，这时我們就无法断定 ac 和 bd 間的大小关系. 讀者可以自己用数字的例子加以驗証.

从上面这些討論得到的結論是用不着記住的. 重要的是，要掌握对一个問題进行分析討論的方法：一般可以从証明过程中的某一个步驟着手分析. 另外，从上面所說的我們还可以看到，如果 a、b、c、d（或者 a、b）四个数里有正数也有負数，这时，結論往往可以直接得到；主要掌握这一点：如果 a、b、c、d（或者 a、b）都是負数，那末就把这些数变为都是正数的情况来处理. 对于性质(9)、(10)、(11)都可以类似地进行討論. 但是对于性质(10)、(11)的討論，还应当注意到冪指数或者根指数 n 是奇数或者偶数的情况. 这些討論留給讀者

完成.

下面我們再从另外的角度来对性质 (10)、(11) 作进一步的研究.

性质 (10)、(11) 可以归納成:"如果 $a>b>0$, 那末, 当 $x=n$ 或者 $x=\frac{1}{n}$ (n 是正整数) 的时候, 不等式 $a^x>b^x$ 都成立." 从这里容易使我們想起: 那末当 $x=\frac{p}{q}$ 是任何正分数的时候, 这个性质是否仍旧成立呢? 这个問題是容易得到解答的. 因为 $a>b>0$, 根据性质(10), 可以推得

$$a^p>b^p,$$

根据性质(11),就可以推得

$$\sqrt[q]{a^p}>\sqrt[q]{b^p},$$

就是

$$a^{\frac{p}{q}}>b^{\frac{p}{q}}.$$

这样,我們就可以把性质(10)、(11)合并成:

"如果 $a>b>0$,那末,对于任何正有理数 x,不等式 $a^x>b^x$ 成立."

事实上, 这个性质对于任何正实数 x 也成立. 因为当 x 是无理数时, x 可以看做是有理数 (x 的近似值) 序列的极限. 关于这一点,我們在这里不談.

自然还会想到: 当 x 是負数时又怎样? 我們知道, 如果 $x=-y$ ($y>0$), 那末 $a^x=\frac{1}{a^y}=\left(\frac{1}{a}\right)^y$. 因此, 这就将涉及到性质(7),讀者可以自己討論.

习　題

1. 根据"不等"概念的定义,証明基本性质(5).

2. 根据基本性质(7)和(8)，証明性质(9).

3. 利用“不等”概念的定义和性质(8)，証明性质(9).

4. 用类似于性质(10)的最后一种証明方法，并且利用等式

$$a-b=(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\sqrt[n]{b}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{b^{n-1}}),$$

証明性质(11).

5. 对于性质(10)，討論：如果不具备“$a>b>0$”这条件时的情況.

6. 如果把式里的“>”换成“≧”，“<”换成“≦”，基本性质(1)—(11)是否成立?

7. 如果 $\frac{a}{b}\geqq\frac{c}{d}$，那末从 $b<d$ 能否推出 $a>c$? 并且加以討論.

二 不等式的解

是不是必要的? ——怎样解不等式? 关于同解不等式的几个定理. ——这样做对嗎? ——解几个不等式和看看它們的图象.

根据不等式的基本性质，我們容易解决引言里提出的某种机械損坏后，在什么条件下修理后継續使用比較合算的問題. 因为机械的价格是 N 元，可以使用 n 次(n 年)，那末平均每使用 1 次(1 年)要化 $\frac{N}{n}$ 元；損坏后經过修理可以再使用 m 次(m 年)，如果修理費是 x 元，那末修理后每使用 1 次(1 年)平均要化 $\frac{x}{m}$ 元. 很明显，只有在 $\frac{x}{m}<\frac{N}{n}$ 的时候，修理后継續

使用才比較合算．因此，問題就是要我們求出 x 的数値，在什么范圍里能够适合不等式 $\frac{x}{m}<\frac{N}{n}$．也就是要解这个含有未知数 x 的不等式．

解这个不等式并不困难．解法是：

因为 m 是正数，所以可以用 m 乘不等式 $\frac{x}{m}<\frac{N}{n}$ 的两边，得

$$x<\frac{mN}{n}.$$

設 a 是适合不等式 $x<\frac{mN}{n}$ 的任何实数．就是 $a<\frac{mN}{n}$．两边都乘以 $\frac{1}{m}$，就得到

$$\frac{a}{m}<\frac{N}{n}.$$

就是 a 适合不等式

$$\frac{x}{m}<\frac{N}{n}.$$

所以，原不等式的解是 $x<\frac{mN}{n}$．这就是説，在修理費小于 $\frac{mN}{n}$ 元的条件下，修理后继續使用比較合算．

看了上面的这个解法，你或許会产生疑問：从不等式 $\frac{x}{m}<\frac{N}{n}$ 的两边都乘以 m，得到 $x<\frac{mN}{n}$，不是已經把原不等式解出了；那末后面一个步驟是不是多余的呢？

不！这个步驟不是多余而是必要的．現在让我們一般地来分析一下．例如要解不等式(甲)．根据基本性质，我們从不等式(甲)推导出不等式(乙)，再从不等式(乙)推导出不等