高等学校经济、管理与理工科
非数学专业必修数学基础课程

习题集 第二分册

线性代数习题集

胡显佑　彭勇行　主编

XIANXINGDAISHUXITIJI

南开大学出版社

高等学校经济、管理与理工科
非数学专业必修数学基础课程　**习题集**第二分册

线性代数习题集

胡显佑　彭勇行　主编

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题集 / 胡显佑,彭勇行主编.—天津:南开大学出版社,2004.3
ISBN 7-310-02056-1

Ⅰ.线... Ⅱ.①胡...②彭... Ⅲ.线性代数—高等学校—习题 Ⅳ.O151.2—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 000043 号

出版发行 南开大学出版社
地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮编:300071
营销部电话:(022)23508339 23500755
营销部传真:(022)23508542
邮购部电话:(022)23502200

出版人 肖占鹏
承　印 天津宝坻第二印刷厂印刷
经　销 全国各地新华书店
版　次 2004 年 3 月第 1 版
印　次 2004 年 3 月第 1 次印刷
开　本 880mm×1230mm 1/32
印　张 11.875
字　数 392 千字
印　数 1—4000
定　价 20.00 元

前　言

线性代数是经济类、管理类和工学类等各专业的一门重要的基础课，也是经济学、管理学和工学硕士研究生入学统一考试的主要课程之一．由于该课程具有高度抽象、逻辑严密、符号独特、方法灵活等特点，学生初学普遍感到困难．为了掌握教材中的有关概念和定理，提高分析和解决问题的能力，解答习题是必不可少的重要环节．除必须演算一定数量的基本习题之外，还需要做一些具有适当难度的综合性习题和证明题．为此，我们编写了这本《线性代数习题集》．本习题集是南开大学出版社出版的高等学校经济、管理类和理工类非数学专业必修数学基础课程习题集的第二分册，可以作为有关专业线性代数的教学参考书，对有志于报考硕士研究生的读者，更是一本有用的参考资料．

本习题集根据经济、管理类核心课程线性代数教学大纲、工科类线性代数教学大纲以及全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求编写．在编写时，我们参考了有关教材和资料，汇集了多年来在教学和试卷命题过程中积累的习题和考题，并按照通用教材的顺序编排章节，各章简要地叙述了有关概念、性质和公式，按计算题、证明题和选择题分类选编习题，其中选择题一律选编单项选择题．全部习题均给出参考答案，部分习题给出较为详细的提示，便于读者使用．

本习题集由胡显佑、彭勇行编写．限于编写者水平，本习题集难免有不足之处，恳请读者批评指正．

编　者

2003 年 9 月

目　录

第一章　行列式

I　概念、性质、公式

一、行列式的概念

（一）n 级排列及其性质

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 称为一个 n 级排列.

在一个排列中，如果一个较大的数排在一个较小的数之前，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)$. 如果一个排列的逆序数是奇数，则称之为奇排列. 如果一个排列的逆序数是偶数，则称之为偶排列.

对换改变排列的奇偶性. 在全部 $n!$ 个 n 级排列中，奇、偶排列的个数相同，各有 $\frac{1}{2}n!$ 个.

（二）n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其中列标 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 构成一个 n 级排列. 当 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 是奇排列时，该项取负号；当 $j_1\ j_2\ \cdots\ j_n$ 是偶排列时，该项取正号. 即 n 阶行列式

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ \cdots\ a_{nj_n},$$

这里，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

注 在 n 阶行列式的定义中有三个要素：一是 n 阶行列式展开式中的项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，表示不同行、不同列的 n 个元素的乘积；二是展开式中项的符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，表示项的正负由列标排列的奇偶性确定；三是展开式中项的总数等于 $n!$，其中正、负项各占一半.

二、行列式的性质

(一) 行列互换、行列式的值不变. 即行列式与其转置行列式相等，$D_n=D_n^{\mathrm{T}}$，其中 D_n^{T} 是行列式 D_n 的转置行列式.

(二) 互换行列式的两行(列)，行列式的值反号.

特别地，如果行列式有两行(列)完全相同，则行列式其值为零.

(三) 行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式之前.

特别地，如果行列式有一行(列)的元素全为零，则行列式其值为零；如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式其值为零.

(四) 如果行列式中某一行(列)的所有元素均为两数之和，则此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式分别以这两组数之一作为该行(列)的元素，其余各行(列)元素与原行列式相同. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(五) 行列式某一行(列)所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上，行列式其值不变.

三、行列式按行(列)展开

(一) 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素

按原有的顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij}的余子式，记作 M_{ij}. 余子式 M_{ij}之前加上符号$(-1)^{i+j}$，称为元素 a_{ij}的代数余子式，记作

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

在 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$中，任取 k 行 k 列$(1\leqslant k\leqslant n)$，其交叉位置上的 k^2 个元素按原有顺序构成的 k 阶行列式，称为行列式 D_n 的一个 k 阶子式，记作 M. 在行列式 D_n 中划去这 k 行 k 列后，余下的元素按原有顺序构成的 $n-k$ 阶行列式，称为 k 阶子式 M 的余子式，记作 N. 如果设 k 阶子式 M 在 D_n 中所有行、列的行标和列标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则在余子式 N 之前加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$，称为 k 阶子式 M 的代数余子式，记作

$$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N.$$

（二）行列式按一行（列）展开

n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$等于它的任意一行（列）各元素与其对应的代数余子式的乘积之和；n 阶行列式 D_n 任意一行（列）各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即行列式按一行展开有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}=\begin{cases}D_n, & \text{当 } i=s \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } i\neq s \text{ 时}.\end{cases}$$

行列式按一列展开有

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{it}=\begin{cases}D_n, & \text{当 } j=t \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } j\neq t \text{ 时}.\end{cases}$$

（三）行列式按 k 行（列）展开（Laplace 定理）

n 阶行列式 D_n 等于任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$行（列）的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D_n=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\quad(t=C_n^k),$$

其中，$A_i(i=1,2,\cdots,t)$是行列式 D_n 的 k 阶子式 M_i 的代数余子式.

四、克莱姆(Cramer)法则

（一）克莱姆法则

设 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

如果系数行列式 $D_n=|a_{ij}|\neq0$，则方程组有惟一解

$$x_j = \frac{D_j}{D_n} \quad (j = 1,2,\cdots,n),$$

其中，D_j 是方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 去替换行列式 D_n 中第 j 列得到的行列式.

（二）n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组解的性质

1. 设 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

如果系数行列式 $D_n = |a_{ij}| \neq 0$，则方程组仅有零解.

2. n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数行列式 $D_n = 0$.

五、几种特殊的行列式

（一）上（下）三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（二）范德蒙（Vandermonde）行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

（三）关于次对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

(四) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

Ⅱ　习题 1

§1.1　行列式的概念

【计算题】

1.1　计算下列排列的逆序数,并讨论奇偶性.

(1) 2 6 4 3 1 5;

(2) 3 2 1 6 5 4 9 8 7;

(3) $2n\ (2n-2)\ (2n-4)\ \cdots\ 6\ 4\ 2$;

(4) $1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ 2n\ (2n-2)\ \cdots\ 4\ 2$.

1.2 选择 i 与 k,使得 $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$成为 5 阶行列式中一个带负号的项.

1.3 写出 4 阶行列式 $D_4=|a_{ij}|$中所有包含有 a_{23},并带有负号的项.

1.4 已知 n 级排列 $i_1\ i_2\ \cdots i_n$ 的逆序数为 k,求 n 级排列 $i_n i_{n-1}\cdots i_2\ i_1$ 的逆序数.

1.5 设行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$,试求 D_4 中 x^3,x^4 的系数.

1.6 设行列式 $D_4=\begin{vmatrix} x+1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & x+2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & x+3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$,试求 D_4 中 x^3,x^4 的系数.

1.7 用定义计算下列行列式:

(1) $$D_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 10 & 11 & -5 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix};$$

(2) $$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \end{vmatrix};$$

(3) $$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}.$$

1.8 用定义计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.9 用定义计算 n 阶行列式:

(1) $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

(2) $$D_n = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} \quad (x \neq 0).$$

1.10 用定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \quad (a \neq 0).$$

1.11 用定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

【证明题】

1.12 设 n 阶行列式 D_n 中，等于零的元素的个数大于 n^2-n. 证明：$D_n=0$.

1.13 设行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

证明：$D_5=0$.

1.14 证明由自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的全部 n 级排列中，奇偶排列各占一半.

1.15 设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，每一个元素 a_{ij} 分别用数 b^{i-j} $(b\neq 0)$ 去乘，得到行列式 D_1. 用行列式定义证明 $D=D_1$.

1.16 设 n $(n\geq 2)$ 阶行列式 D_n 的元素均为 1 或 -1. 用行列式定义证明 D_n 等于偶数.

【选择题】

1.17 在 5 阶行列式 $D_5=|a_{ij}|$ 展开式中，下列各乘积为 D_5 一项的是（　　）.

(A) $a_{12}a_{24}a_{35}a_{53}$　　(B) $-a_{14}a_{23}a_{35}a_{42}a_{51}$

(C) $-a_{15}a_{24}a_{41}a_{52}a_{33}$　　(D) $a_{41}a_{32}a_{53}a_{14}a_{25}$

1.18 设 5 阶行列式 $D_5=|a_{ij}|$ 的展开式中，$a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是其中带有正号的一项，则 i,j 之值应为(　　).

(A) $i=1,j=2$　　(B) $i=2,j=3$

(C) $i=1,j=3$　　(D) $i=2,j=1$

1.19 在 5 阶行列式 $D_5=|a_{ij}|$ 展开式中，包含 a_{13},a_{25} 并带有负号的项是(　　).

(A) $-a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$　　(B) $-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$

(C) $-a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$　　(D) $-a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$

1.20 设 4 阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix},$$

则 D_4 之值等于(　　).

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

1.21 设 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

则 D_n 之值等于(　　).

(A) $(-1)^n n!$　　(B) $(-1)^{n^2} n!$

(C) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$　　(D) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!$

§1.2 行列式的计算

【计算题】

计算下列行列式(题 **1.22**～**1.28**).

1.22 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.23 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$.

1.24 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ c & d & a & b \\ c & b & a & d \end{vmatrix}$.

1.25 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

1.26 $\begin{vmatrix} a_1-b & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2-b & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3-b & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & a_4-b \end{vmatrix}$.

1.27 $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

1.28 $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

计算下列 n 阶行列式(题 **1.29**～**1.34**).

1.29 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

1.30 $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n-b \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}-b & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1-b & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$$

1.31 $$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}.$$