模糊集合论基础

施恩伟　林谦

西南交通大学出版社

模糊集合论基础

模糊集合论基础

施恩伟　林　谦

西南交通大学出版社

(川) 新登字018号

模糊集合论基础
施恩伟　林　谦
*
西南交通大学出版社出版发行
(成都　九里堤)
云南教育学院印刷厂印刷
*
开本: 850×1168　1/32　印张: 5.125
字数: 120千字　印数: 1－2000册
1994年12月第1版　1994年12月第1次印刷
ISBN　7－81022－691－6/O·059
定价: 6.80元

内容简介

本书的蓝本是编著者近几年来为云南师范大学数学系本科生讲授模糊数学选修课所编的讲义．本书系统地介绍了模糊集理论，LF集理论，F关系，综合决策，F关系方程，LF拓扑空间初步等内容．本书叙述语言精练，由浅入深，易于理解，书中还配有习题．

本书适合作为数学专业学生（包括专科生）的选修课教材．同时，也适合作为非数学专业的研究生、以及从事计算机科学、管理科学、系统科学及农林方面工作的科技人员的参考书．

前　言

本书的蓝本是编著者近几年来为云南师范大学数学系本科生讲授模糊数学选修课所编写的讲义. 承蒙西南交通大学出版社的大力支持，现在得以同读者见面.

本书不但介绍了本学科的一些基础理论，而且，还详细地介绍了一些在其它学科及工程技术中被广泛使用的应用方法. 本书语言精练，推理严密，且易于理解；许多定理的证明方法有其独特之处. 第一章主要是介绍模糊子集理论的基本概念. 第二章是LF集理论. 读者通过学习第一章，对基本概念有所了解，然后学习第二章的LF集理论. 这样，一方面，可以比较容易理解有关LF集的概念；另一方面，可以增强学习后面的内容的能力. 几年来的教学实践表明，效果是令人满意的. 对于有志于从事学术研究的读者来说，学习这些内容，想来是不会没有益处的. 对于仅仅需要了解本学科在应用方面的理论的读者来说，则可以不必阅读第二章而直接阅读后面几章的有关内容. 对于初学者来说，书中注有星号的内容可以不必阅读.

由于本书只涉及普通集合论中的一些基本知识，所以，也可作为数学专业专科生的选修课讲义. 同时，也可供非数学专业的研究生以及工程技术人员，尤其是从事计算机科学、管理科学及系统科学等方面工作的科技人员作为参考书.

此外，书中附有大量习题，可供读者练习.

书中对一些比较基本的概念未加说明，比如有限集的概念就是如此. 我们假定读者已具备这些基本知识.

由于受讲课学时的限制，以致许多内容及一些重要的研究成

果未能编入本书，为此作者深感遗憾. 本书的出版，完全是出于教学上的需要，缺点错误在所难免. 作者恳请专家学者及广大读者批评指正.

编著者

1992年10月

目　录

第一章　模糊集合基本概念

本章包括两部分内容，第一部分是学习模糊数学理论所必备的有关普通集合论方面的一些基础知识，第二部分是有关模糊集合的一些基本概念.

§1-1　普通集合概念

集合的概念是现代数学中的一个最基本的概念. 不能用更基本的概念来定义它，只能给出一种描述. 一般地说，我们把在一定范围内所讨论的对象联合成的一个整体给与一个名称，叫做集合. 例如：教室里的桌子；全国的高等院校；自然数的全体；等等，都分别构成一个集合.

组成一个集合的各个个体，叫做这个集合的**元素**.

今后，我们一般用大写英文字母表示集合的名称；用小写英文字母表示组成集合的元素. 若元素 a 属于 A，则记作 $a \in A$；若不属于 A，则记作 $a \bar{\in} A$.

说明一个集合的方法有两种：一种是将这个集合的元素列举出来，称作列举法；(例如：$A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$ 就是采用列举法.) 另一种方法是利用一项规则，以致决定某一物体是否属于该集合，称作叙述法. 例如：

$$K_1 = \{x | x\text{是正的奇数}\}.$$

$$K_2 = \{x | x\text{是中国的省或自治区}\}$$

就是用叙述法说明 K_1 及 K_2 所含有的元素.

两个集合相等是按照下述原理定义的:

集合 A 与 B 是相等的，当且仅当它们有相同的元素. 并

记为 $A=B$. 否则，A 与 B 不相等，并记为 $A\neq B$.

例如，$\{x\mid x$ 是正的奇数$\}=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$，又如，$\{1, 2, 4\}=\{1, 2, 2, 4\}=\{1, 4, 2\}$.

定义 1.1　设 A 与 B 是任意两个集合，若 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的**子集**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 B 包含 A 或者说 A 包含于 B 内.

例如，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2\}$，则 $B\subset A$.

定义 1.2　如果集合 A 的每一个元素都属于 B，而集合 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**.

定义 1.2 说明，若 $A\subset B$ 但 $A\neq B$，则 A 是 B 的真子集. 例如，整数集是有理数集的真子集.

定义 1.3　不含有任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

显然，对于任意一个集合 A 都有 $\varnothing\subset A$.

定义 1.4　给定一个集合 X. 以 X 的所有子集为元素组成一个集合，称之为 X 的**幂集**，并记为 $P(X)$.

例如，若 $X=\{a, b\}$，则 $P(X)=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}\}$.

定义 1.4 说明，$A\subset X$ 及 $A\in P(X)$ 这两种表达式都说明 A 是 X 的子集.

当我们在讨论某个问题时，若所涉及的集合都是某一个集合 X 的子集时，则称 X 为**全集**或称为**论域**. 例如，当我们讨论初等函数的性质时，所涉及的集合是实数集的子集. 所以，可以把实数集看作是论域或全集.

§1-2　普通集合的运算

所谓集合的运算，是指以给定的某些集合为对象，按照某种确定的规则得到另外一些新的集合.

定义 1.5　设 A、B 是 X 的子集，一切既属于 A 又属于 B

的元素组成的集合叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\bigcap B$. 一切属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做 A 与 B 的**并集合**，记为 $A\bigcup B$. 一切属于 B 但不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 在 B 中的**余集**，记为 $B\setminus A$. 特别地，A 在 X 中的余集简称为 A 的余集，记为 A'. 即

$$A\bigcap B=\{x|x\in X,\ x\in A\text{且}x\in B\}\ ;$$

$$A\bigcup B=\{x|x\in X,\ x\in A\text{或}x\in B\}\ ;$$

$$B\setminus A=\{x|x\in X,\ x\in B\text{且}x\,\overline{\in}\, A\}\ .$$

设集合 A、B 和 C 是给定的论域 X 的子集，则集合的上述三种运算适合下列算律：

(1) $A\bigcap A=A,\quad A\bigcup A=A$; (幂等律)

(2) $A\bigcap B=B\bigcap A,\quad A\bigcup B=B\bigcup A$; (交换律)

(3) $A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$, (结合律)

$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$;

(4) $A\bigcap(A\bigcup B)=A$, (吸收律)

$A\bigcup(A\bigcap B)=A$;

(5) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$, (分配律)

$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

(6) $A\bigcap\varnothing=\varnothing,\ A\bigcup\varnothing=A$,

$A\bigcap X=A,\ A\bigcup X=X$;

(7) $A\bigcap A'=\varnothing,\ A\bigcup A'=X$; (互补律)

(8) $(A')'=A$; (对合律)

(9) $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$, (De－Morgan律)

$(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$.

集合的并与交运算也可以推广到对任意多个集合的并与交

运算.

当一个集合的元素是某些别的集合时，我们称这个集合为**集族**. 以后，我们用 Ω 表示非空指标集，设 $A_i(i\in\Omega)$ 是集合 X 的一些子集合，则集合族 $\{A_i|i\in\Omega\}$ 的元素的交定义为集合

$$\bigcap_{i\in\Omega} A_i=\{x|x\in X,\ \forall i\in\Omega,\ x\in A_i\}.$$

类似地，它的并集定义为集合

$$\bigcup_{i\in\Omega} A_i=\{x|x\in X,\ \text{存在}i\in\Omega\text{满足}x\in A_i\}.$$

在日常生活中，有许多事物是成对出现的，并且具有一定的顺序. 例如：上、下；左，右等等. 一般地，抽象地说，把具有固定顺序的两个客体叫做一个**序偶**. 它表达了两个客体间的某种关系. 记作 $(x,\ y)$，其中 x 和 y 代表这两个客体. 并称 x 为第一坐标，y 为第二坐标. 而且，若 $(x,\ y)$ 及 $(u,\ v)$ 是两个序偶，则我们规定 $(x,\ y)=(u,\ v)$ 当且仅当 $x=u$ 且 $y=v$.

定义 1.6 设 A 与 B 是任意两个集合. 若序偶的第一个坐标是 A 的元素，第二个坐标是 B 的元素，则所有这样的序偶组成的集合叫做 A 和 B 的**加氏积或直积**，记为 $A\times B$. 即

$$A\times B=\{(x,\ y)|x\in A\text{且}y\in B\}.$$

我们约定当 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 时 $A\times B=\varnothing$. 一般地，$A\times B\neq B\times A$.

当 $A=B$ 时，$A\times A$ 就是所有的由 A 的元素组成的序偶之集. 当 $a_1\neq a_2$ 时，$(a_1,\ a_2)$ 与 $(a_2,\ a_1)$ 是 $A\times A$ 的不相同的元素. 若以 A 表示实数集，对于 $x\in A$，$y\in A$，以 $(x,\ y)$ 表示坐标平面上的点，则 $A\times A$ 恰好就是整个坐标平面，这就是加氏积这一术语的来由！.

§1-3 映射 二元关系

前面我们说过，集合概念是近代数学的一个最基本的概念．而映射及二元关系同样也是近代数学的较为基本的概念．

除了有具体的说明之外，我们约定，我们所讨论的集合都是某个全集的子集．

设 A 和 B 是给定的两个非空集合．如果有一个规则 f，对于每一个 $x\in A$，由这一规则可以唯一确定一个 $y\in B$．那么，我们说 f 是 A 到 B 的一个映射，记为

$$f: A \to B.$$

A 叫做映射 f 的**定义域**．B 叫做 f 的**值域**．y 称作 x 在 f 作用**下的像**，并用记号 $y=f(x)$ 或者 $x \mapsto y$ 表示这一事实．当然，自然地我们称 x 是 y 的**原像**．

而且，$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ 叫做映射 f 的**像**，它是 B 的一个子集．设 $D\subset B$，则 $f^{-1}(D)=\{x|f(x)\in D\}$ 叫做 D 在 f 作用下的**原像**．

若要表示一个具体的映射，必须指明映射的对应规律．所以，以后我们一般地用记号 $f: A\to B$，$x \mapsto y$ 或 $y=f(x)$，$x\in A$ 表示一个具体的从 A 到 B 的映射．

定义 1.7 设 $f: A \to B$ 是一个映射．若对任意的 a，$b\in A$，只要 $a\neq b$ 便有 $f(a)\neq f(b)$，则说 f 是 A 到 B 的**单射**．若对 $\forall\ b\in B$，都有 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$，则说 f 是**满射**，若映射 f 既是单射又是满射，则称 f 是**满单射**．或称为**一一对应**．

设 $f: A\to B$ 及 $g: B\to C$ 是映射．则由 f 和 g 我们可以得到一个新的映射

$$h: A\to C,\ x\mapsto h(x)=g(f(x)).$$

称为 f 和 g 的**复合映射**，记为 $h=g\circ f$．

可以证明，映射 $f: A \to B$ 是满单射的充分必要条件是存在映射 $g: B \to A$ 使得 $\forall\ x \in A$ 及 $\forall\ y \in B$ 都有

$$f(g(y)) = y \text{及} g(f(x)) = x\ .$$

而且，这样的映射 g 是唯一的，我们称它为 f 的**逆映射**．一般地，我们用 f^{-1} 表示 f 的逆映射．

下面，我们介绍二元运算的概念．它是一类特殊的映射．

设 A 是一个给定的非空集合．一个从 $A \times A$ 到 A 的映射 f 叫做 A 上的一个二元运算．也就是说，对于 $A \times A$ 的任一个元素 (a, b)，通过 f，可以唯一确定 A 中的一个元素 c．通常，把 c 记为 $a \circ b$．这里需要注意，一般来说，(a, b) 及 (b, a) 是 $A \times A$ 的两个不同的元素．所以，未必有 $a \circ b = b \circ a$．A 上的一个二元运算有时叫作 A 的一个结合法．

例如，以 Z 表示整数集．则整数的加法运算是 Z 上的一个结合法．整数的乘法运算也是 Z 上的一个结合法．

现在，我们介绍二元关系的概念．实际上，它是映射概念的推广．在日常生活中，我们都熟悉关系这个词的含义，如兄弟关系，位置关系等等，它们涉及的是两个客体间的联系．从数学的角度而言，关系可以表达集合中的元素间的联系．例如，3 小于 5、x 大于 y 等等．它们都可以构成一些序偶．因而，抽象地看，二元关系实际上是一些序偶的集合．我们给出严格的定义如下：

定义 1.8　设 A，B 是任意的集合．$A \times B$ 的任意一个子集 R 叫做 A、B 间的一个**二元关系**．当 $(a, b) \in R$ 时，我们说 a 与 b 具有关系 R，记为 aRb．否则，说 a 与 b 不具有关系 R．

当 $A = B$ 时，称 R 为 A 上的二元关系．

设 $f: A \to B$ 是一个映射，则 $A \times f(A) \subset A \times B$．因而，

映射 f 的像及原像构成的加氏积 $A \times f(A)$ 是 A，B 间的一个二元关系．

例1 以A表示实数集．令

$$R_1 = \{\ (a,\ b)\ |\ (a,\ b) \in A \times A \text{且} a = b\ \},$$

$$R_2 = \{\ (a,\ b)\ |\ (a,\ b) \in A \times A,\ a \leqslant b\}.$$

容易看出，R_1 与 R_2 都是 A 上的二元关系．R_1 就是我们通常说的实数中的相等关系．R_2 是实数间的大小关系．

例2 设 $A = \{a,\ b,\ c\}$，$R_1 = \{(a,\ b),\ (b,\ a),\ (a,\ a),\ (b,\ b)\}$．显然，$R_1$ 是 A 上的一个二元关系．由于 $(b,\ c) \notin R_1$，所以，元素 b 和 c 不具有关系 R_1．

由于 $A \times A$ 的每一个子集都是 A 上的一个二元关系，所以，在 A 上可以有各种不同的二元关系．但最常用的也是比较重要的二元关系是所谓的等价关系及偏序关系．

A 上的一个二元关系 $\sim$ 叫做 A 的一个**等价关系**，如果 $\forall\ a,\ b,\ c \in A$，关系 $\sim$ 具有性质：

(1) $a \sim a$； (自反性)

(2) 若$a \sim b$，则$b \sim a$； (对称性)

(3) 若$a \sim b$且$b \sim c$，则$a \sim c$． (传递性)

也就是说，一个具有自反性，对称性及传递性的二元关系叫做一个等价关系．

显然，在例 2 中所给出的二元关系 R_1 不是 A 上的等价关系，因为 $(c,\ c) \notin R_1$．

利用集合 A 上的一个等价关系我们可以把 A 分划为一些两两不相交的子集．

§1-4 特征函数及F集合的定义

在以后，我们总以非空集 X 作为我们讨论的集合的全集.

我们知道，对 X 的每个子集 A，都可以确定一个映射 χ_A ：$X \to \{0, 1\}$ 为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \bar{\in} A, \end{cases}$$

并且称χ_A为A的特征函数.

相反地，任意一个从 X 到 $\{0, 1\}$ 的映射 χ_A 都唯一地确定了 X 的一个子集.

$$A = \{x | \chi_A(x) = 1\} .$$

我们记

$$P_0(X) = \{f | f ： X \to \{0, 1\} \} ,$$

则不难证明映射：G: $P(X) \to P_0(X)$, $A \to \chi_A$ 是一一对应. 不仅如此，X 的子集与它的特征函数还有性质：

性质 1.1 X 的任意子集 A, B 及它们的并、交、补集的特征函数有下列性质:

(1) $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$;

(2) $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$;

(3) $\chi_{A'} = 1 - \chi_A$;

(4) $A = X$当且仅当$\chi_A \equiv 1$;

(5) $A = \varnothing$当且仅当$\chi_A \equiv 0$;

(6) $A \subset B$当且仅当$\chi_A \leqslant \chi_B$.

上面这些性质的证明是容易的.

设 $A \subset X$, $x_0 \in A$, 则 $\chi_A(x_0) = 1 = 100\%$, 这说明元素 x_0