

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材



系统动力学

XITONG DONGLIXUE

王运赣 王紫薇

华中理工大学出版社

前 言

经全国高等学校锻压专业教学指导委员会推荐、机械电子工业部教育司批准，本书已列入机电、兵工类专业“七、五”教材出版规划。它主要是为锻压专业的本科生与研究生编写的，同时也适用于其它有关专业。

从锻压行业来看，随着新技术的发展，无论在系统的性能预测，还是系统的控制方面，都迫切需要推广系统动态分析方法。因此，不少高等学校的锻压专业都设立了相应的课程。我校锻压专业较早地在研究生学习计划中安排了“控制理论”课，从1985年开始又为本科生开设了“机械工程控制基础”，后改名“系统动态分析”。应该说，这个领域内的有关书籍是相当多的，内容也十分丰富。然而通过几年的教学实践，我们感到，如果把这些书当作教材来用，还存在一些不便之处。这主要表现在两方面：其一是，许多书都是按学科的发展顺序来编写的，并且各有侧重，自成体系。例如，将古典部分与现代部分、连续系统与离散系统、线性系统与非线性系统分别加以论述，甚至单独出书。从深入学术研究的角度来看，上述编排方式有较大的好处。但是从教学的角度来看，则有零散之憾，不便于学生从方法论的高度来进行概括。其二是，内容重点的选取不完全符合锻压专业的需要。

基于上述情况，我们从1986年开始，尝试以动态数学模型为线索，从模型的表达、建立、解析，以及模型所描述系统的品质指标和改善方法等方面出发，综合阐述系统动力学的基本内容，收到了较好的效果。本教材就是根据这一想法编写的。同时，为避免学生误认为这门课的目的仅仅是解决控制问题，而将名称定为“系统动力学”。

本书共分七章。第一章为概论，第二和第三章论述系统数学模型的表达形式，第四章论述模型的建立方法，第五章论述模型的解析方法，第六章介绍评价系统的品质指标，第七章简述系统性能的改善措施。其中，前六章在吸取现有书籍的精华的基础上，编排方式有了较大的变动，同时还增加了我们的一些科研成果，以及锻压生产中的一些实例。文献[16]对系统的校正作了十分简洁的概括，因此本书第七章基本取材于该文献，只作了少量的增删。

本教材曾印成讲义，多次在华中理工大学的锻压专业本科班及研究生中试用，得到了好评。这次趁正式出版之机会，编者根据校内外的建议，进行了一些修改。但由于水平所限，必定还有不妥之处，编者希望在成书之后听到更多的批评与建议。本书的主审杨文成教授对内容的取舍、编排及一些具体的提法，提出了很好的意见，在此特表谢意。

编 者

1989年12月于华中理工大学

118/11/16/

目 录

第一章 概论	(1)
§ 1-1 系统动力学的研究任务	(1)
§ 1-2 动态系统的分类	(1)
§ 1-3 学习系统动力学的重要性	(2)
§ 1-4 本教材的特点与学习方法	(5)
习题	(6)
第二章 系统数学模型的表达 (一)	(7)
§ 2-1 微分方程	(7)
* § 2-2 差分方程	(9)
* § 2-3 微分方程的直接差分化	(12)
* § 2-4 状态空间表达式及其与微分方程的关系	(12)
§ 2-5 传递函数	(20)
* § 2-6 传递函数与状态空间表达式之间的转换	(33)
习题	(39)
第三章 系统数学模型的表达 (二)	(41)
§ 3-1 方框图	(41)
* § 3-2 由方框图直接建立状态空间表达式	(49)
§ 3-3 频率特性及其与传递函数的关系	(51)
§ 3-4 系统频率特性的求取	(58)
* § 3-5 离散系统的频率特性	(60)
习题	(61)
*第四章 系统数学模型的建立	(64)
§ 4-1 键合图的基本概念	(64)
§ 4-2 系统键合图的绘制	(75)
§ 4-3 由键合图列写状态方程的方法	(81)
§ 4-4 用键合图法建模的综合示例	(87)
§ 4-5 系统辨识的基本概念	(95)
§ 4-6 线性系统的相关辨识	(96)
§ 4-7 线性系统的参数估计	(101)
§ 4-8 线性系统的闭环辨识	(102)
§ 4-9 模型辨识仪及其应用	(103)
习题	(109)
第五章 系统数学模型的解析	(113)
§ 5-1 用拉普拉斯变换法求解微分方程	(113)
* § 5-2 用 z 变换求解差分方程	(115)

* § 5-3 状态方程的解析	(116)
§ 5-4 典型输入信号	(126)
§ 5-5 典型输入信号作用下的系统输出响应	(128)
§ 5-6 状态方程对典型输入信号的响应	(132)
* § 5-7 离散系统对典型输入信号的响应	(134)
§ 5-8 非线性系统的解析	(135)
习题	(145)
第六章 系统的品质指标	(147)
§ 6-1 系统的快速性	(147)
§ 6-2 系统的准确性	(148)
§ 6-3 系统的稳定性定义及判据	(155)
* § 6-4 离散系统的稳定性分析	(161)
§ 6-5 非线性系统的稳定性和自振分析	(163)
§ 6-6 频段特性对系统品质的影响	(168)
* § 6-7 系统的能控性与能观测性	(170)
习题	(175)
第七章 系统性能的改善	(177)
§ 7-1 系统的串联校正	(177)
§ 7-2 系统的反馈校正	(181)
§ 7-3 系统的复合校正	(183)
§ 7-4 非线性系统的性能改善和非线性特性的利用	(184)
§ 7-5 系统性能改善设计示例	(185)
习题	(188)
参考文献	(189)

第一章 概 论

§ 1-1 系统动力学的研究任务

系统动力学是一门研究动态系统数学模型及响应分析的技术基础课程。它论述系统的模型化方法,指出如何进行系统分析以便预测系统行为的途径,以及采用什么有效的办法来改善系统的性能。

所谓“系统”是一些元件的组合,这些元件共同作用以完成给定的任务。由于不局限于某一物理对象,元件可以是机械、液压、电气、气动、热力等范畴的基本组成的单元。系统的概念可以扩充到任何动态的现象。

所谓“动态系统”,是指系统的现时输出由其之前的输入决定的系统。如果系统的即时输出仅仅是由其即时输入决定,则这种系统称为“静态系统”。若输入不改变,则静态系统的输出保持为常量,而且只有当输入改变时输出才改变。若系统不是处在平衡状态,动态系统的输出是随时间而改变的。

对系统性能的分析、预测是建立在系统的数学描述之上的,这种数学描述称为数学模型。

一般来说,真正的静态系统是没有的。不但系统中缓慢演变的变化很重要,而且伴随启动和停机的短时间动态作用也是很重要的。尽管静态系统分析方法在设计研究中有不可忽视的作用,但动态系统分析则更为重要。因为根据静态分析作出的判断和对策,往往是不完善、不深刻的,甚至虽然有利于系统的短期运行,却会得到违背初衷的长期反响。例如,用泵驱动油压机,由于运动部分惯性的影响,在刚启动时,动梁的速度 $v < Q/A$ (式中, Q 为泵的流量,系统的恒定输入; A 为油压机油缸的面积),然后逐渐加速,只有到启动过程结束之后, v 才能达到值 Q/A ,因此启动过程是一动态过程。显然在此过程中,用 Q/A 来计算 v 值是不对的。

§ 1-2 动态系统的分类

动态系统有多种分类方法,下面仅介绍几种常见的分类。

1. 连续系统与离散系统

连续系统通常是指连续时间系统。在这种系统中,有一个或多个变量在连续的瞬时上变化,即它(它们)是时间的连续函数。用微分方程描述的系统是典型的连续系统。

离散系统通常指离散时间系统,又称采样数据系统。在这种系统中,有一个或多个变量仅在离散的瞬时上变化,这些瞬时往往用 KT 或 t_k ($K=0,1,2,\dots$)表示。具有采样开关的系统,例如带模拟量/数字量(A/D)转换器的计算机控制系统,就是一种离散系统。

图1-1给出了单变量的连续系统和离散系统的信号特点。

2. 线性系统与非线性系统

• 1 •

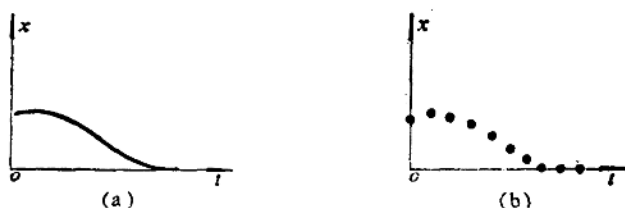


图1-1 单变量连续系统与离散系统

(a)连续系统; (b)离散系统

如果系统的数学模型方程是线性的, 这种系统称为线性系统。线性系统的最重要特性是可应用叠加原理, 即系统在受到多个输入同时作用时, 这些输入对系统输出响应产生的总影响, 等于每个输入单独作用所产生的影响的总和。

用非线性数学模型方程表示的系统, 叫做非线性系统。例如下述方程表达的系统都是非线性系统:

$$y = \sin x, \quad y = x^2, \quad z = x^2 + y^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A \sin \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + x^3 = 0$$

非线性系统的最重要特性是不能应用叠加原理。严格说, 实际系统大多数属于非线性系统。

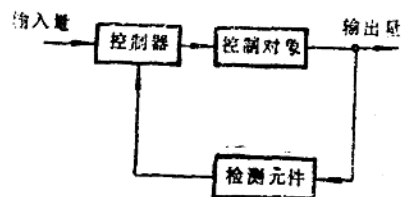


图1-2 闭环系统

3. 开环系统与闭环系统

若系统的输出量对系统没有控制作用, 则这种系统称为开环系统。

凡是系统的输出量对系统有控制作用的系统, 都称为闭环系统(图1-2), 其中输出对系统的反作用称为“反馈”, 常用的是负反馈。

闭环系统的优点是系统响应对外界干扰和内部参数变化不敏感, 因而有可能采用不太精密、成本较低的元件, 构成精确的系统。但它的稳定性是一个重要问题, 在闭环系统中可能出现过调、等幅振荡或变幅振荡。

§1-3 学习系统动力学的重要性

长期以来, 对于锻压工艺与设备的研究, 主要采用静态系统分析法, 即使在某些研究如锻锤的振动问题中采用了动态系统的描述模型(微分方程), 但其求解和分析仍然是传统的老办法, 既费事又难于深刻、全面地揭示系统的内在特性。随着科学技术的发展, 上述问题的严重性愈来愈明显。众所周知, 在现代锻压生产中, 高速、高压、大流量、快速加热等已普遍应用。由于状态的急剧变化, 伴随而来的冲击、振动、惯性等与动态有关的因素日益加剧, 因此, 对于工艺和设备的设计、制造与调试都提出了更高的要求。例如, 为了适应高合金钢快速锻造的需要, 锻造液压机和操作机的行程次数必须高于60~80次/min。根据编

者的测试(图1-3), 当以此行程次数工作时, 由于需要快速频繁地切换系统中的控制阀, 因此在大车运动期间, 驱动油压波动激烈, 其启动加速峰值压力约为启动后平均运行压力的2.3倍, 且几乎全为过渡过程, 即油压波动尚未衰减到足够小时又进入减速制动阶段。显然, 系统的油压不仅与即时条件有关, 而更主要取决于此刻之前的条件。若用传统的静态方法来分析这一系统, 势必造成很大的误差。若改用动态方法, 则不仅能获得较准确的参数值, 还能较容易地得到深刻表征其动态性能的许多指标, 如上升时间、峰值时间、最大超调量、调整时间、振荡次数、谐振频率、截止频率和稳定性等。

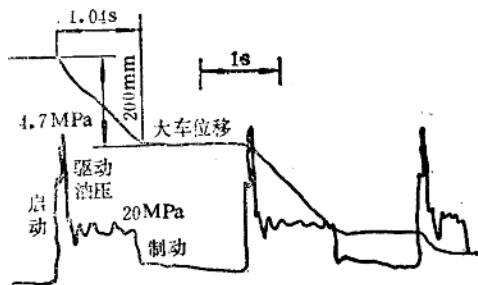


图1-3 操作机大车位移与驱动油压变化曲线

另一个例子是关于液压板料折弯机。为了提高折弯机滑块的定位精度和左、右端运动的同步精度, 在现代折弯机上, 广泛地采用了机-液伺服系统或电-液伺服系统。然而, 由于引入了反馈环节, 若设计或调试不佳则可能使系统处于不稳定状态, 产生强烈的自激振动, 严重影响制件质量和机器、模具的使用寿命。

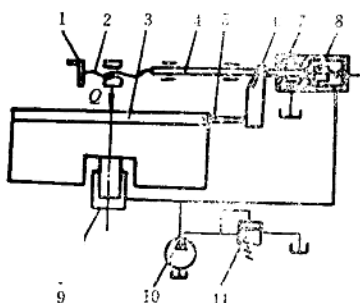


图1-4 下动式液压板料折弯机传动示意图

- 1—手轮; 2—丝杆; 3—滑块; 4—推杆; 5—连接杆;
6—楔铁; 7—伺服阀; 8—阀芯; 9—油缸; 10—油泵;
11—溢流阀

例如在图1-4所示下动式液压板料折弯机上, 采用了机-液伺服系统, 其中反馈环节由连接杆5和楔铁6组成。当液压系统加压时, 油缸9的柱塞上升, 滑块3带动连接杆5与斜铁6上移, 并推动伺服阀7的阀芯8右移, 逐渐开启其锥形密封口, 使系统压力油与油箱相通, 油压不断下降。一旦油压降低到使柱塞上的作用力与滑块上的负载 Q 相平衡时, 滑块便立即停止。若阀芯的开口太大, 致使柱塞上的作用力小于负载 Q 时, 滑块将下降, 阀芯在系统油压和弹簧的作用下向左移动, 密封开度减小, 系统油压升高, 滑块重新上移, 直到平衡位置才停止。一般手轮1转动后, 推杆4的位移可看成一个固定输入量。由于不可避免的外界干扰, 连接杆和楔铁的反馈位移会有轻微的振动, 因此使伺服阀获得交变的输入信号, 从而造成系统在平衡位置附近发生振动。如果系统中的阻尼作用不足的话, 则系统可能不稳定, 这种振动的振幅会越来越大, 使机器产生自激振动。要深入分析丧失稳定性的原因, 找到解决的办法, 采用传统的静态分析法, 或只是建立并求解系统的微分方程, 是难以奏效的。采用动态系统分析法来研究上述问题, 就可很容易地得知, 系统不稳定的根源是反馈环节的受力过大, 连接杆的刚度不足。解决了这个弊病, 系统就能良好地工作。

对于锻压生产中常用锻锤的分析, 传统的办法是建立在微分方程基础上的。例如, 将锤头、锻件、砧座和地基所组成的系统简化为一个三自由度的振动系统(图1-5), 那么从锤头接触锻

严重影响制件质量和机器、模具的使用寿命。例如在图1-4所示下动式液压板料折弯机上, 采用了机-液伺服系统, 其中反馈环节由连接杆5和楔铁6组成。当液压系统加压时, 油缸9的柱塞上升, 滑块3带动连接杆5与斜铁6上移, 并推动伺服阀7的阀芯8右移, 逐渐开启其锥形密封口, 使系统压力油与油箱相通, 油压不断下降。一旦油压降低到使柱塞上的作用力与滑块上的负载 Q 相平衡时, 滑块便立即停止。若阀芯的开口太大, 致使柱塞上的作用力小于负载 Q 时, 滑块将下降, 阀芯在系统油压和弹簧的作用下向左移动, 密封开度减小, 系统油压升高, 滑块重新上移, 直到平衡位置才停止。一般手轮1转动后, 推杆4的位移可看成一个固定输入量。由于不可避免的外界干扰, 连接杆和楔铁的反馈位移会有轻微的振动, 因此使伺服阀获得交变的输入信号, 从而造成系统在平衡位置附近发生振动。如果系统中的阻尼作用不足的话, 则系统可能不稳定, 这种振动的振幅会越来越大, 使机器产生自激振动。要深入分析丧失稳定性的原因, 找到解决的办法, 采用传统的静态分析法, 或只是建立并求解系统的微分方程, 是难以奏效的。采用动态系统分析法来研究上述问题, 就可很容易地得知, 系统不稳定的根源是反馈环节的受力过大, 连接杆的刚度不足。解决了这个弊病, 系统就能良好地工作。

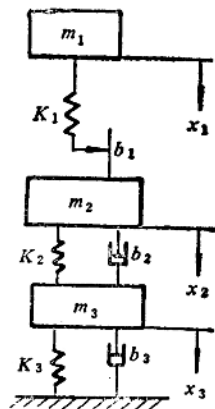


图1-5 锻锤振动系统示意图

件起,到锻件即将开始塑性变形的加载阶段(此时锻件未发生塑性变形, b_1 不起作用),可写出如下微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 - K_1 x_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + b_2 \dot{x}_2 + (K_1 + K_2) x_2 - K_1 x_1 - b_2 \dot{x}_3 - K_2 x_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + (b_2 + b_3) \dot{x}_3 + (K_2 + K_3) x_3 - b_2 \dot{x}_2 - K_2 x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中, m_1 为锤头质量; m_2 为砧座质量; m_3 为地基质量; x_1 为锤头位移; x_2 为砧座位移; x_3 为地基位移; K_1 为锻件的刚度系数; K_2 为砧座弹性垫层的刚度系数; K_3 为地基弹性垫层的刚度系数; b_1 为锻件塑性变形时内部的摩擦阻尼系数; b_2 为砧座弹性垫层的阻尼系数; b_3 为地基弹性垫层的阻尼系数。该段的初始条件为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= v_0 \\ x_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_3(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中, v_0 为锤头的打击速度。

式(1-1)是一种动态系统的数学模型,但要用传统方法来求解的话,是比较麻烦的。如果采用现代动态分析法,引入状态变量的概念,则式(1-1)可以写成下列向量矩阵形式的状态方程

$$\dot{Y} = AY \quad (1-3)$$

式中, A 为6阶、 6×6 方阵; $Y = [y(1), y(2), y(3), y(4), y(5), y(6)]^T$, $y(1) = x_1$, $y(2) = \dot{x}_1 = x_2$, $y(3) = \dot{x}_2 = x_3$, $y(4) = \dot{x}_3 = x_1$, $y(5) = \dot{x}_1 = x_2$, $y(6) = \dot{x}_2 = x_3$, 式(1-3)实质上是一阶微分方程组,它较之式(1-1)易于求解和分析,尤其适合用计算机进行数字仿真。

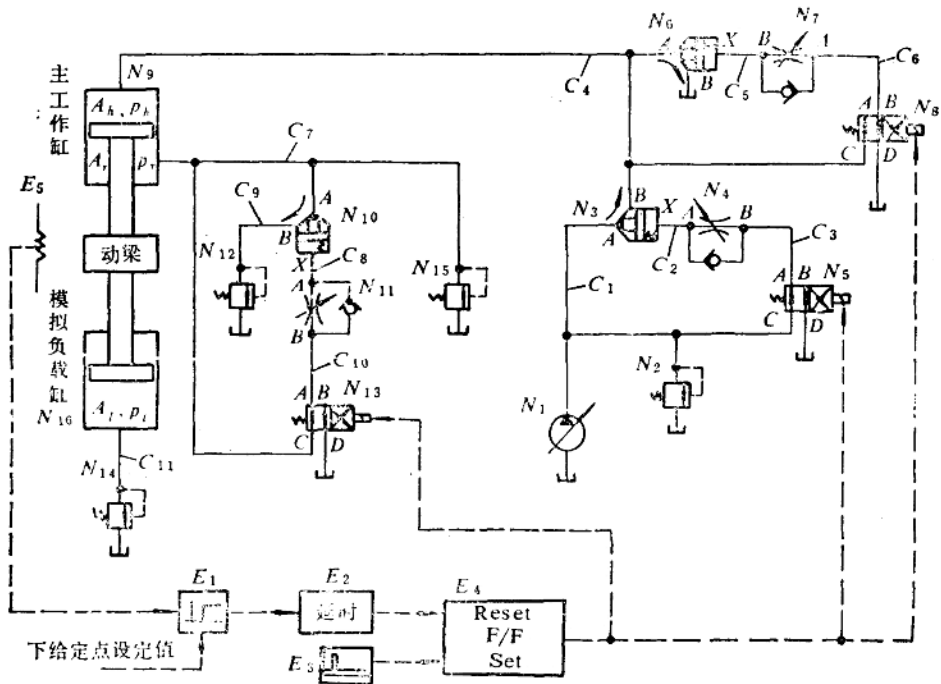


图1-6 快锻液压机的液压系统原理图

随着计算机技术的迅速发展,在锻压生产中愈来愈多地采用计算机进行自动控制。例如快锻液压机与联动操作机的计算机控制就是一个典型。图1-6为一台试验用快锻液压机的液压系统原理图。要想对其滑块的位移作精确的控制,则首先必须建立系统的数学模型,并计算出滑块在快速运行时的超程量,然后设法予以补偿。可是对于如此复杂的一个系统,是难以用传统方法来进行分析的。采用动态分析方法时,则可用下列代数方程来对系统进行描述

$$\left. \begin{aligned} F &= A_1 p_1 - A_2 p_2 - A_3 p_3 + W \\ x_0 &= (F - Dx_0)/m \\ x_0 &= x_0/s \\ x &= x_0/s \\ \Delta a &= K_1 x_0 + K_2 \frac{x_0^2}{p_h} \\ p_h &= p_{c04} \\ p_2 &= p_{c07} \\ p_3 &= p_{c11} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中, F 为驱使液压机动梁运动的力; A_1 、 p_1 分别为主缸上腔的面积和油压; A_2 、 p_2 分别为主缸下腔的环形面积和油压; A_3 、 p_3 分别为模拟负载缸下腔的环形面积和油压; W 、 m 分别为液压机运动部分的重量和质量; x 、 x_0 、 x_0 分别为动梁的位移、速度和加速度; D 为主缸的粘性系数; s 为拉普拉斯变量; Δa 为动梁由向下工作行程转换成停止时的超程量; K_1 、 K_2 为系数; p_{c04} 、 p_{c07} 、 p_{c11} 分别为管道 C_4 、 C_7 和 C_{11} 中的油压。

上述方程中的变量均为拉氏变换后的象函数。显然,当压力 p_{c04} 、 p_{c07} 和 p_{c11} 确定后,便可根据式(1-4)求得动梁的位移 x 和超程量 Δa 。而 p_{c04} 、 p_{c07} 和 p_{c11} 又取决于系统中油泵、阀、逻辑阀、单向节流阀、电磁换向阀和管道等元件的数学模型(第二章),它们也是代数方程。

有了式(1-4)和计算出来的 x 与 Δa , 控制系统的设计就有了充分的理论根据,从而可以保证有较高的控制质量。

从以上四个例子可见,学习系统动力学是十分必要的。

§1-4 本教材的特点与学习方法

系统动力学的基础是模型化问题。因此,本教材以动态数学模型为线索,从模型的表达、建立、解析,以及模型所描述系统的品质指标和改善方法等方面来阐述系统动力学的基本内容。编者认为,这种编排方法能将古典系统动力学与现代系统动力学、连续系统动力学与离散系统动力学、线性系统动力学与非线性系统动力学有机地结合起来,使学生能由时域(t)、复域(s)、 z 域、频域(ω)等角度全面地观察、分析动态问题,从而系统地掌握动态分析的基本方法。

如前所述,系统动力学是一门技术基础课,它与许多专业都是密切相关的,然而这本书主要是为锻压专业的本科生和研究生编写的,所以在每一章中,力求从锻压生产和科研的实际提出问题,并注意用实例来说明基本原理和方法的应用。

尽管本书不得不涉及较多的数学知识,但编者心目中的重点仍然是物理概念。因此,希

望本书的读者不要过多地追求严格的数学推导，主要精力应集中于理解和应用。

由于本书既可用于本科生的教学，又可用于研究生的教学，而内容的选取却是根据研究生培养要求确定的，所以本科生在阅读时，对标有*号的部分可从略，或只作一般性浏览。

习 题

1-1 针对锻压生产实际，试举例说明动态系统、连续系统、离散系统、线性系统、非线性系统、开环系统、闭环系统的概念。

1-2 图1-7表示水压机的一种自动控制系统，试说明它的作用原理。

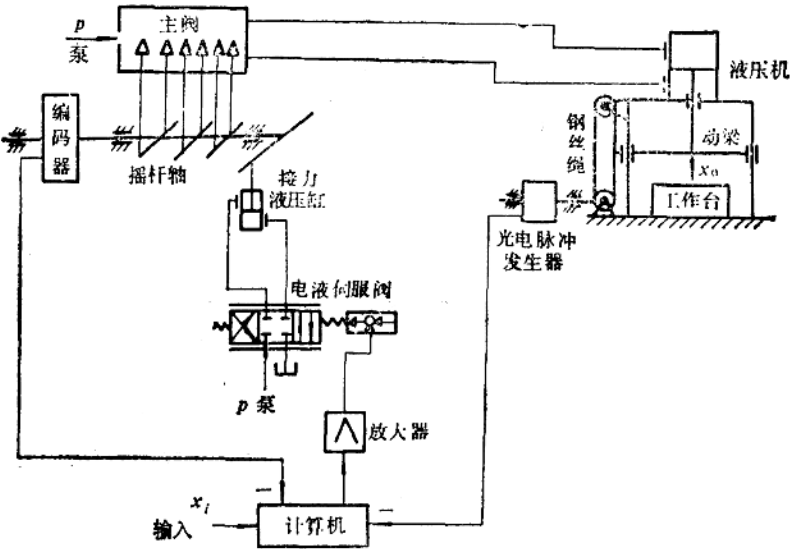


图1-7 水压机的自动控制系统

第二章 系统数学模型的表达 (一)

在实现机械设备或过程的自动控制, 以及其动态性能的试验研究工作中, 为了对系统进行定性分析和定量计算, 首先要建立系统的数学模型。

系统的数学模型是描述系统输入、输出变量以及内部各变量之间关系的数学表达式。这种关系有静态的, 也有动态的。描述诸变量是动态关系的数学表达式称为动态模型。所谓“数学表达式”具有广泛的含义, 它可以是公式、图形或表格。

本章介绍动态数学模型的常用表达方式, 主要有: 微分方程、差分方程、状态方程及传递函数。还有方框图及频率特性等两种表达方式, 我们将在下一章介绍。

§ 2-1 微分方程

描述动态系统的方程不仅包含变量本身, 而且也包含了这些变量的变化率或导数, 这样的方程称为微分方程。它可以描述连续时间函数间的关系, 是最基本、最常用的一种动态数学模型。

微分方程的分类见图2-1。

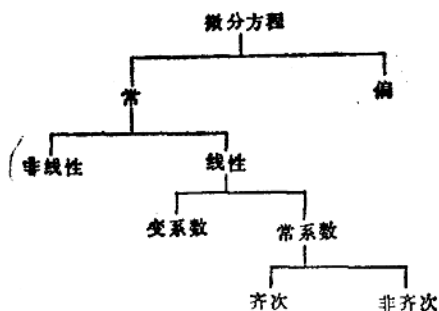


图2-1 微分方程的分类

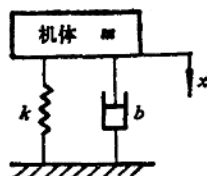


图2-2 带隔振器的锻压机械

如果微分方程只包含了一个自变量, 其导数是常导数, 则该方程称为常微分方程。在系统动态分析的研究中, 主要涉及到的是系统性能为时间的函数, 因此, 系统的微分方程多半以时间作为自变量。例如带隔振器的锻压机械 (图2-2), 锻压力作用后机体的自由振动运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2-1)$$

式中, m 为机体的质量, b 为隔振器中阻尼油缸的粘性阻尼系数, k 为隔振器中弹簧的刚度, x 为机身的垂直位移。

式(2-1)是一个二阶一次常微分方程, 其中 t 是自变量, x 是因变量。此方程表明 x 的瞬时值及其一次导数和二次导数的加权和必须恒等于零, 或说 惯性力 $\left(m \frac{d^2 x}{dt^2}\right)$ 、粘性阻尼力

$(b \frac{dx}{dt})$ 与弹性力 (kx) 之和必须恒为零。由于上述系统中存在二个贮能元件 (贮存动能的质量与贮存位能的弹簧) 以及一个耗能元件 (阻尼油缸), 所以系统因不同范畴的能量相互转换而呈现动态变化过程, 因能量的耗散而使运动逐渐衰减。

若微分方程中包含的自变量多于一个 (例如包含了时间和位置), 其导数为偏导数, 则方程称为偏微分方程。例如液压机械中流动油液的运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

式中, v_x 、 v_y 、 v_z 分别为油液沿 x 、 y 、 z 坐标轴的速度分量; X 、 Y 、 Z 分别为单位质量力沿 x 、 y 、 z 坐标轴的分量; p 为与粘性无关的油液压力分量; ρ 为油液的密度; ν 为油液的运动粘度。

式(2-2)称为纳维-斯托克斯方程, 其中时间 t 和位置 x 、 y 、 z 是自变量, 此方程表达了时变惯性力 (方程左边第一项)、位变惯性力 (方程左边第二、三、四项)、外质量力 (方程右边第一项)、压力 (方程右边第二项)、粘性力 (方程右边第三项) 之间的关系。

在常微分方程中, 如果各项都是一次项, 则该微分方程为线性微分方程, 显然式(2-1)是线性微分方程。如果方程中任一项的幂次不为 1, 则该方程为非线性微分方程。例如, 阀

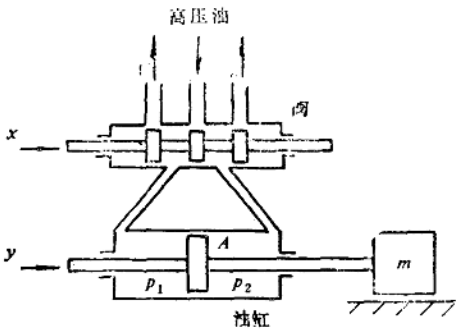


图2-3 阀控油缸系统

控油缸系统 (图2-3), 活塞带动负载 m 时, 运动方程为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} = Ap \quad (2-3)$$

式中, m 为负载的质量; y 、 A 分别为活塞的位移与面积; b 为粘性阻尼系数; p 为负载压降, $p = p_1 - p_2$ 。

忽略油的泄漏和压缩性, 以及缸体与管道的膨胀时, 负载流量为

$$q = A \frac{dy}{dt} \quad (2-4)$$

根据流量方程, 通过阀口的流量为

$$q = q(x, p) \quad (2-5)$$

式中, x 为阀芯的位移。

式(2-5)一般为二次曲线,呈现非线性关系。因此,据式(2-3)~(2-5)所得以 x 为输入, y 为输出的运动方程是一非线性微分方程。

在方程中,若各项的系数均为常数,则该方程为常系数微分方程,其表征的系统称为时不变系统或定常系统;若系数本身是自变量的函数,则该方程为变系数微分方程,其表征的系统称为时变系统。例如,液压系统或隔振系统油缸中的油,由于工作时油的粘性阻尼系数 b 随时间 t 而变化,则描述此系统的运动方程是变系数微分方程。

若方程中所含因变量及其导数的各项之和等于零,则此方程为齐次微分方程,显然式(2-1)是齐次微分方程。当上述各项之和等于常数或自变量的函数时,则此方程为非齐次微分方程。例如,在周期性扰力作用下机身的强迫振动运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = C \sin(\omega t) \quad (2-6)$$

式中, C 、 ω 分别为扰力的幅值与圆频率。

式(2-6)的右边为自变量 t 的函数,是非齐次微分方程。

齐次方程表明系统的性能与任何外部能源或外部激励无关,它仅仅决定于组成该系统的元件的常数或参数;而非齐次方程则包括了施加的驱动力或外部激励。

用微分方程描述连续函数领域的动态数学模型时,其系数直接是系统的结构参数,具有物理概念清晰、直观等显著优点,但对于一些高阶和偏微分方程,不使用经典的数学方法求解,因此,难于判断其动态特性。

* § 2-2 差分方程

差分方程用于描述离散对象的动态数学模型。

例1 有图2-4所示电阻网络,其第 K 个节点有关的电路如图2-5。根据克希霍夫电流定律

$$i_1 = i_2 + i_3$$

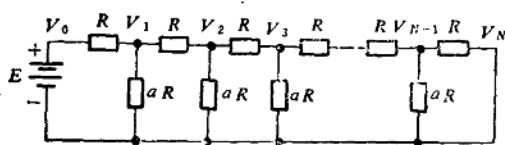


图2-4 电阻网络

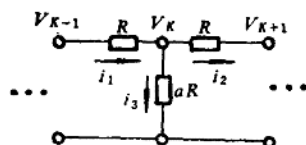


图2-5 第 K 个节点有关的电路

即

$$\frac{V_{K-1} - V_K}{R} = \frac{V_K - V_{K+1}}{R} + \frac{V_K}{aR}$$

式中, V_{K-1} 、 V_K 、 V_{K+1} 分别为节点 $K-1$ 、 K 和 $K+1$ 处的电压; R 为电阻; a 为系数。上式两边同乘以 a 得

$$a(V_{K-1} - V_K) = a(V_K - V_{K+1}) + V_K$$

即

$$aV_{K+1} - (2a+1)V_K + aV_{K-1} = 0, \quad K=1, 2, \dots, N-1 \quad (2-7)$$

边界条件: $V_0 = E$, $V_N = 0$

式中, E 为电源电压,此式是一差分方程。

例2 在一化工过程中,每经一次循环,有 x_K 升的试剂 A 及 $100 - x_K$ 升的试剂 B ,同时加到900升的溶剂里混合,其中 $0 \leq x_K \leq 100$, $K=1, 2, 3, \dots$ 。若试剂 A 与试剂 B 在容器里完全混合,并且每次有100升的混合液排出。观察第 K 次循环知道,在排出混合液之前,试剂 A

的总量等于第 K 次加入试剂 A 的数量(x_K)与 $K-1$ 次排出混合液后容器中所含试剂 A 的数量($900y_{K-1}$)之和,即

$$1000y_K = x_K + 900y_{K-1}$$

$$y_K - 0.9y_{K-1} = 0.001x_K, K=1,2,3,\dots \quad (2-8)$$

式中, y_K 、 y_{K-1} 分别为第 K 次和第 $K-1$ 次循环中, 混合排出液中试剂 A 的浓度。

初始条件: 循环前容器里所含试剂 A 的浓度为 y_0 。

式(2-8)也是差分方程。

例3 考虑一个任意函数 $y(t)$ 的近似数值积分, 它是基于该函数的等间隔采样值进行的, 如图2-6所示。设 x_K 是在时间 KT 时的积分值(其中 T 为采样周期), x_{K-1} 是在前一时刻的积分值。若用简单的相加来逼近这一积分, 并且用矩形逼近, 则可得

$$x_K = x_{K-1} + y_{K-1}T \quad (2-9)$$

式中, y_{K-1} 为 $(K-1)T$ 时刻函数 $y(t)$ 的采样值。此式也是差分方程。

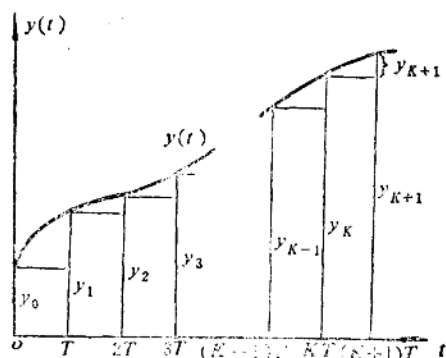


图2-6 近似的矩形数值积分

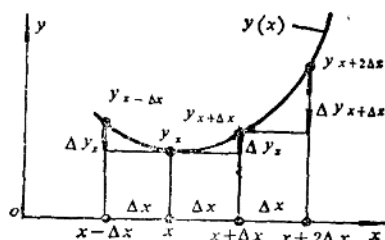


图2-7 差分

在一般情况下, n 阶线性常系数差分方程可表示为

$$y_{K+n} + a_1 y_{K+n-1} + \dots + a_n y_K = b_0 x_{K+n} + b_1 x_{K+n-1} + \dots + b_n x_K$$

式中, x 、 y 分别为输入、输出的采样值, a_i 、 b_i ($i=0,1,2,\dots,n$)为常系数。

一、向前差分、向后差分和中心差分

假设函数 $y(x)$ 在自变量 x 的等间隔 Δx 上有定义(图2-7)。记函数 $y(x)$ 在 $x + K\Delta x$ 的值为

$$y(x + K\Delta x) = y_{x+K\Delta x}$$

沿着 x 运动的方向, 以 x 相邻两个定义值所对应函数 $y(x)$ 值的差

$$\Delta y_x = y_{x+\Delta x} - y_x \quad (2-10)$$

定义 $y(x)$ 在 x 上的第一差分或一阶差分。 Δy_x 也可以沿着 x 运动的反向定义为 y_x 与 $y_{x-\Delta x}$ 的差, 即

$$\nabla y_x = y_x - y_{x-\Delta x} \quad (2-11)$$

式(2-10)定义的差分称为向前差分, 式(2-11)定义的差分称为向后差分。

二阶向前差分是 $y(x)$ 的一阶向前差分由 x 至 $x + \Delta x$ 的增量, 即

$$\Delta^2 y_x = \Delta y_{x+\Delta x} - \Delta y_x = (y_{x+2\Delta x} - y_{x+\Delta x}) - (y_{x+\Delta x} - y_x) \quad (2-12)$$

即

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2\Delta x} - 2y_{x+\Delta x} + y_x \quad (2-13)$$

同理定义 $y(x)$ 的 m 阶向前差分

$$\Delta^m y_x = \Delta^{m-1} y_{x+\Delta x} - \Delta^{m-1} y_x \quad (2-14)$$

在离散系统中常选择 $x = K$, 间隔 $\Delta x = 1$, 于是 $y_{x+\Delta x}$ 可写成 y_{K+1} , 此时各阶向前差分可记为

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_K &= y_{K+1} - y_K \\ \Delta^2 y_K &= y_{K+2} - 2y_{K+1} + y_K \\ \Delta^3 y_K &= y_{K+3} - 3y_{K+2} + 3y_{K+1} - y_K \\ &\dots\dots \\ \Delta^m y_K &= \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{m!}{n!(m-n)!} y_{K+m-n} \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

对于向后差分, 同样有

$$\left. \begin{aligned} \nabla y_K &= y_K - y_{K-1} \\ \nabla^2 y_K &= y_K - 2y_{K-1} + y_{K-2} \\ \nabla^3 y_K &= y_K - 3y_{K-1} + 3y_{K-2} - y_{K-3} \\ &\dots\dots \\ \nabla^m y_K &= \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{m!}{n!(m-n)!} y_{K-n} \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

由上述式子可见, $\Delta^m y_K$ 、 $\nabla^m y_K$ 的系数与二项式 $(a-b)^m$ 的系数是一样的。

此外, 还可下式定义一阶中心差分:

$$y_{x+\Delta x} - y_{x-\Delta x}$$

或

$$y_{K+1} - y_{K-1}$$

二、移动算子

任何有限阶的差分都可以用移动算子表示。移动算子的定义为:

(1) 向前移动算子 z

$$z^n y_i = y_{i+n} \quad (2-17)$$

(2) 向后移动算子 z^{-1}

$$z^{-n} y_i = y_{i-n} \quad (2-18)$$

于是, 一阶差分和二阶差分可记为

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = z y_i - y_i = (z-1) y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = z^2 y_i - 2z y_i + y_i = (z-1)^2 y_i$$

可见 Δ 与 z 有如下关系

$$\Delta = z - 1 \quad (2-19)$$

因此有

$$\Delta^n y_i = (z-1)^n y_i$$

上述运算表明, 差分 Δ 与移动算子 z 之间可以互相转换, 例如

$$y_{i+n} = z^n y_i = (1 + \Delta)^n y_i$$

$$= \left[1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} \Delta^{n-1} + \Delta^n \right] y_i$$

$$\Delta^n y_i = (z-1)^n y_i = \left[z^n - n z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} - \dots + (-1)^n \right] y_i$$

z 又称之为 z 变换算子, z 变换是表示离散对象传递函数的重要数学工具。

* § 2-3 微分方程的直接差分化

由微积分学知道, 导数可用如下向前差分式来近似(参看图2-6)

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=kT} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{T}$$

表2-1 导数的差分近似

连续函数的导数	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{d^2y}{dt^2}$
向前差分近似式	$\frac{y_{k+1} - y_k}{T}$	$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{T^2}$
向后差分近似式	$\frac{y_k - y_{k-1}}{T}$	$\frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}$
中心差分近似式	$\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2T}$	$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{T^2}$

注: T 为采样周期(或步长)

当采样周期 T 足够小时, 上述近似是满意的。

不仅对一阶导数, 而且对高阶导数也有类似的差分化方法。一阶及二阶导数的差分化公式见表2-1。利用此表可将微分方程直接变为差分方程。

例1 设有如下微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2 \frac{dy}{dt} + y = u(t)$$

试将其直接变为差分方程。

解 将表2-1的向前差分近似式代入上述微分方程, 得

$$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{T^2} + 0.2 \frac{y_{k+1} - y_k}{T} + y_k = u_k$$

若取 $T = 1s$, 则有

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k + 0.2(y_{k+1} - y_k) + y_k = u_k$$

合并同类项后, 可得差分方程

$$y_{k+2} - 1.8y_{k+1} + 1.8y_k = u_k$$

例2 对于曲柄压力机的摩擦制动器, 其摩擦盘的热传导方程可简化为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (t > 0, 0 < x < L)$$

式中, 温度 $T = T(x, t)$, x 为沿摩擦盘厚度方向的坐标值, t 为时间, a 为导热系数, L 为摩擦盘的厚度。试将此偏微分方程直接变为差分方程。

解 根据表2-1, 对此偏微分方程的左侧, 用中心差分近似式代替, 且其对应时刻用 $(n+1)$; 方程的右侧, 用向前差分近似式代替, 且其对应坐标用 i 。得到差分方程

$$\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\delta x)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\delta \tau}$$

整理后得

$$-fT_{i-1}^{n+1} + (1+2f)T_i^{n+1} - fT_{i+1}^{n+1} = T_i^n \quad (n=0, 1, 2, \dots; i=2, 3, \dots, L-1)$$

式中, $f = a\delta\tau/(\delta x)^2$, δx 为摩擦盘厚度方向(x)的采样步长; $\delta\tau$ 为时间采样步长; 温度 T 的右下标为沿 x 方向的离散节点号, 右上标为对应所在的时刻。例如, T_{i-1}^{n+1} 表示第 $(i-1)$ 节点、第 $(n+1)$ 时刻的温度值。

* § 2-4 状态空间表达式及其与微分方程的关系

在现代动态分析中, 常用状态空间表达式来表达系统的模型, 即由状态变量构成的一阶

微分方程组或差分方程组来描述。由于它无需解算高阶微分方程，因此求解方便，特别适合用计算机求解。此外，它还能同时给出系统的全部独立变量的响应，所以可同时确定系统的全部运动状态。

一、定义

1. 状态

它是指系统的运动状态。

2. 状态变量

它是完全能表征系统运动状态的数目最小的一组变量。

同一系统，所能选取的状态变量并非唯一，但这些变量必须是相互独立的，且其个数应等于微分方程的阶数，而微分方程的阶数又唯一取决于系统中独立储能元件的个数，所以状态变量的个数应等于系统中独立的储能元件的个数。

3. 状态向量

现有 n 个状态变量： $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ，若将其看作向量 $X(t)$ 的分量，则有

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

或

$$X^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

并称 $X(t)$ 为状态向量。

4. 状态空间

以状态变量（即状态向量的分量） $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴所构成的 n 维空间称为状态空间。在特定时刻 t ，状态向量 $X(t)$ 在状态空间中是一点。已知初始时刻 t_0 的 $X(t_0)$ ，就得到状态空间中的一个初始点。随着时间的推移， $X(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨线。

5. 状态方程

它是由系统状态变量构成的一阶微分方程组或差分方程组。

6. 输出方程

它是在指定系统输出（往往是指状态变量中能直接或间接测量到的一部分量）的情况下，该输出与其所有状态变量间的函数关系式。

7. 状态空间表达式

它是状态方程与输出方程的总称，构成对系统动态的完整描述。

二、线性微分方程的非齐次项中不含有输入函数导数项的 n 阶系统的状态空间表达式

设 n 阶系统为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u \quad (2-20)$$

上式的右边只有输入函数（外部激励） $u(t)$ ，而无其导数项。

因系统为 n 阶，所以取 n 个状态变量