解析几何

〔苏〕A.B.波格列诺夫 著

姚志亭 译

吴祖基 校

人民教育出版社

内 容 提 要

本书运用笛卡尔坐标系讨论了平面上的直线、二次曲线及空间中的平面、直线、二次曲面的性质，并且还讨论了上述图形的仿射性质和射影性质.

本书可供高等院校数学、物理系的师生参考.

解析几何

[苏] A. B. 波格列诺夫 著

姚志亭译 吴祖基校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.875 字数 150,000

1982 年 3 月第 1 版 1983 年 5 月第 1 次印刷

印数 00,001—18,800

书号 13012·0731 定价 0.88 元

中译本校后感

本书作者 A. B. Погорелов 院士是苏联列宁格勒几何学派的杰出成员。他在整体微分几何领域中有卓越的贡献，西方学者对他的工作作了很高的评价。他所解决的正则线素在欧氏空间中可以正则嵌入问题使西方学者叹为观止。作者并且把这些结果推广到黎曼空间和椭圆空间，因此荣获苏联 1959 年的罗巴切夫斯基奖金。

作者写本书时紧紧抓住几何概念，并广泛运用在大学一年级同时开设的数学分析与线性代数课程作为解决几何问题的有力工具。本书绝大部分篇幅在欧氏空间中运用直角坐标系讨论直线形、二次形的基本几何性质，然后适当地开展仿射几何及射影几何的讨论，手法简捷，篇幅不大，内容都统一地用不变量的观点加以总结，使初学者容易抓住这些几何问题的实质。因此，只要讲授者略加指点，便能使学生初步了解百年来具有深远影响的 F. Klein 1872 年对几何学所阐述的爱尔浪根纲领 (Erlanger Programme)。这种用变换群之下不变性的概念统率几何学的实质，久已不为大多数数学专业的学生所知道。如果只讲述现象而不透过现象去追求实质，那么会使学生感到烦琐而无章可循，就不容易激发学生的学习主动性。本书讲授部分抓住几何实质的写法是成功的。

讲授是培养学生分析问题解决问题能力的重要组成部分，但不是全部。另外一个重要组成部分是学生通过练习自己训练自己。作者在本书每一节末尾都附有习题，除了熟练讲授内容的一般习题外，还有大量富有启发性的习题，并附有提示和解答。题目是经过精选的，有的题目较难，但有提示以启发学生思考。有些题目甚至是对正文内容的补充。所以，这一部分是学生接受几何训

练所不可缺少的，不能忽视。

数学是研究空间形式与数量关系的科学。几何学属于空间形式范畴。数学专业对学生的数学教育除了教授数量关系的内容外，不能忽视空间形式的内容。近代数学发展的趋势说明几何学特别是微分几何方法越来越深入到其它的数学分支及近代物理领域，如流形上的微分几何学就是许多数学分支的思考源泉。为了使数学专业的学生对空间形式的理解有良好开端，从一年级解析几何课程开始就应该打下良好的基础。

这本教材按1978年第四版译出，离1957年的初版已20余年，中间经过几次修改，是比较成熟的教材，有助于为大学数学教学打下良好的几何学基础。

以上是我对本书的认识，仅供读者参考，请批评指正。

吴祖基

一九八〇年九月二日

第四版前言

本书这一版与以前各版的区别在于把一些从前放在教程练习中的问题，改放在正文中了。

在书的最后，给出了习题的提示，在许多场合，作出了完整的解答。

第二版前言

本书这一版中，正文作了不大的变更。它与第一版的区别主要在于习题，习题的条目大大地增加了。

众所周知，解习题是掌握解析几何的基本手段。因此，特别注意了习题的选择以及它们的配置问题。正文的每一节后面都配置了一系列习题。它们专门的编排缩小了求解的范围，并使得学生完全可以弄懂那些个别的难题。

作　者

前　　言

解析几何没有严格确定的内容，对它来说，决定性的因素不是研究对象，而是方法。

这个方法的实质在于用某种标准方式把方程(方程组)同几何对象相对应，使得图形的几何关系在其方程的性质中表现出来。

例如，在笛卡尔坐标系中，平面上的每一条直线都唯一地被一个线性方程

$$ax+by+c=0$$

所对应。

三条直线交于一点，表现为这些直线所给出的三个方程的相容性。

由于它可以解决各类问题的普遍性，解析几何方法已经成为几何研究中的一个基本方法，并且广泛地运用于其它精确的自然科学领域(力学、物理学)中。

解析几何把几何同代数、分析统一起来，对这三个数学分支的发展起了有益的影响。

解析几何的基本思想溯源于笛卡尔，他在1637年的著作《几何学》中阐述了解析几何方法的基础。

在这本教程中，阐述了应用到最简单的几何对象的解析几何基本方法。教程是按照大学物理-数学系的教学大纲编写的。

目　录

第一章　平面上的笛卡尔坐标

§1. 平面坐标的引进

在平面上作两条互相垂直的直线 Ox 和 Oy（坐标轴）（图 1）。交点 O（坐标原点）把每个坐标轴分成两个半轴。商定图中箭头所示的叫正半轴，而另外的叫负半轴。

根据下述法则，我们把一对数（点的坐标）横坐标（x），纵坐标（y）与平面上任意一点 A 相对应。

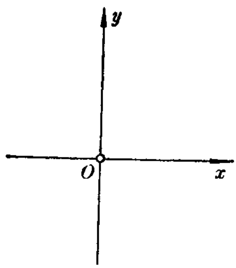


图　1

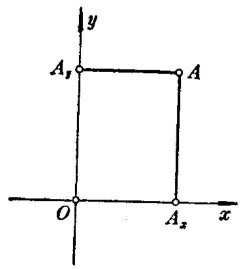


图　2

过 A 点引纵轴（Oy）的平行线（图 2）。它交横轴（Ox）于某一点 A_x。我们以数 x 表示点 A 的横坐标，它的绝对值等于由原点 O 到 A_x 的距离。若 A_x 在正半轴上，则 x 为正；若 A_x 在负半轴上，则 x 为负；若 A_x 与 O 点重合，则 x 等于零。

类似地确定 A 点的纵坐标（y）。

我们把点的坐标依次写在用字母表示的点的标记旁边的括号里，例如 $A(x, y)$。

坐标轴把平面分成四个直角（象限）I, II, III, IV（图 3）。在同一象限范围内，两个坐标的符号不变，有如图所示的值。

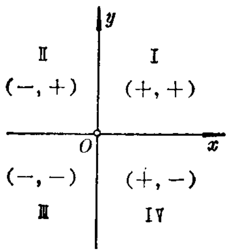


图 3

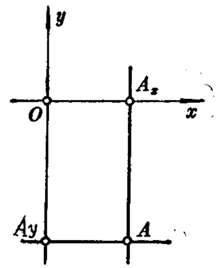


图 4

x 轴（横轴）上所有的点都有等于零的纵坐标(y)，而 y 轴(纵轴）上所有的点都有等于零的横坐标(x)；原点的横坐标和纵坐标都等于零。

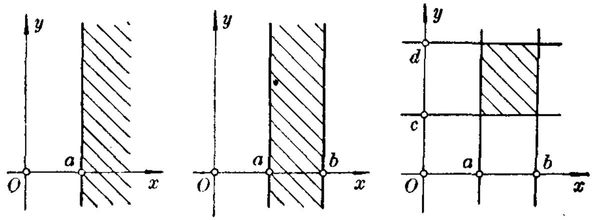
用上述方法引进坐标 x 和 y 的平面称为 xy 平面。这个平面上任意一个点，其坐标为 x 和 y，我们有时把该点简单地表示为 (x, y)。

对于任意一对实数 x 和 y，在 xy 平面上存在有唯一的一个点 A，使得 x 是它的横坐标，y 是它的纵坐标。

实际上，为了确定起见，设 $x>0$，而 $y<0$。在 x 正半轴上取点 A_x 距原点 O 为 x，在 y 负半轴上取点 A_y 距原点为 $|y|$。过点 A_x、A_y 分别作平行于 y 轴、x 轴的直线(图 4)。这两条直线交于某一点 A，显然，它的横坐标是 x，纵坐标是 y。在其它情况 $x<0$，$y>0$；$x>0$，$y>0$ 和 $x<0$，$y<0$ 下证法类似。

我们指出用不等式表示 xy 平面上区域的分析课题的几种重要情况：xy 平面上满足 $x>a$ 的点的集合，是以过点 $(a, 0)$ 并与纵坐标轴平行的直线为界的半平面（图 5а)。满足 $a<x<b$ 的点的集合，是由不等式 $a<x$ 和 $x<b$ 所确定的两个半平面的公共部分。因此，这个集合是过点 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$ 并且与 y 轴平行的两条直线间的长条(图 5б)。满足 $a<x<b$，$c<y<d$ 的点的集合是以点 (a, c)、(a, d)、(b, c)、(b, d) 为顶点的矩形(图 5в)。

最后，我们解决下述课题。求出以点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$ 为



a　　б　　в

图 5

顶点的三角形的面积。设三角形对于 xy 坐标系处于如图 6 所示的位置。在这个位置下，三角形的面积等于梯形 $B_1A_1A_3B_3$ 的面积减去梯形 $B_1A_1A_2B_2$ 与梯形 $B_2A_2A_3B_3$ 面积之和。

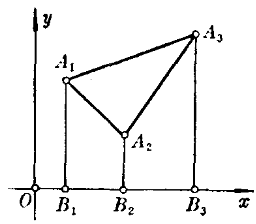


图 6

梯形 $B_1A_1A_3B_3$ 的底等于 y_1 和 y_3，而它的高等于 x_3-x_1。因此，梯形的面积

$$S(B_1A_1A_3B_3)=\frac{1}{2}(y_3+y_1)(x_3-x_1)$$

相仿地求出另外两个梯形的面积：

$$S(B_1A_1A_2B_2)=\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_2-x_1)$$

$$S(B_2A_2A_3B_3)=\frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_3-x_2)$$

三角形 $A_1A_2A_3$ 的面积

$$S(A_1A_2A_3)$$

$$=\frac{1}{2}(y_3+y_1)(x_3-x_1)-\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_2-x_1)-\frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_3-x_2)$$

$$=\frac{1}{2}(x_2y_3-y_3x_1+x_1y_2-y_2x_3+x_3y_1-y_1x_2)$$

可以赋予该公式以更方便记忆的形式：

$$S(A_1A_2A_3)=\frac{1}{2}\{(y_3-y_1)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\}$$

虽然三角形的面积公式是由三角形在坐标系中的特殊位置导出的，但它给出的结果，除了符号外，对于三角形的任何位置都是正确的。稍后我们将

证明这一点(第二章§5)。

练　　习

1. 满足下列方程的点在 xy 平面的什么地方?

а) $|x|=a$,　　　　б) $|x|=|y|$。

2. 满足下列不等式的点在 xy 平面的什么地方?

а) $|x|<a$,　　　　б) $|x|<a$, $|y|<b$。

3. 求出与点 $A(x, y)$ 关于 x 轴(y 轴,坐标原点)对称的点的坐标。

4. 求出与点 $A(x, y)$ 关于第一(第二)坐标角的角平分线对称的点的坐标。

5. 如果把 y 轴当作 x 轴, x 轴当作 y 轴,点 $A(x, y)$ 的坐标将怎样变化?

6. 如果把坐标原点移至点 $A_0(x_0, y_0)$,而不改变坐标轴的方向,点 $A(x, y)$ 的坐标将怎样变化?

7. 取正方形的对角线为坐标轴,求出它的边的中点坐标。

8. 已知一条直线上的三点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)。怎样知道其中哪一个点位于另外两个点之间?

§2. 两点间的距离

假定在 xy 平面上给出两点: A_1 的坐标是 x_1, y_1; A_2 的坐标是 x_2, y_2。我们用点 A_1, A_2 的坐标把它们之间的距离表示出来。

设 $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$。过点 A_1 和 A_2 引平行于两坐标轴的直线(图 7)。点 A 与 A_1 之间的距离等于 $|y_1-y_2|$,点 A 与 A_2 之间的距离等于 $|x_1-x_2|$。在直角三角形 A_1AA_2 中,由毕达哥拉斯定理得到

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=d^2 \tag{*}$$

其中 d 表示点 A_1 与 A_2 之间的距离。

虽然两点间的距离公式(*)是在 $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$ 的条件下导出的,但它在其它场合也成立。实际上,当 $x_1=x_2$, $y_1\neq y_2$ 时(图 8), d 等于 $|y_1-y_2|$。这与公式(*)给出的结果相同。当 $x_1\neq x_2$, $y_1=y_2$

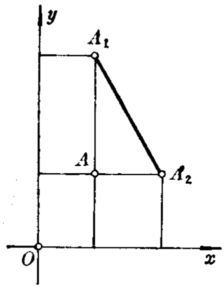


图 7

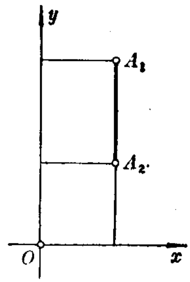


图 8

时，结果也类似。当 $x_1=x_2, y_1=y_2$ 时，点 A_1 和 A_2 重合，公式(*)给出 $d=0$。

作为练习，我们来求以 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 为顶点的三角形的外接圆中心的坐标。

设 (x, y) 是上述圆心。它到三角形各顶点的距离相等。由此可得对于圆心的未知坐标 x 和 y 的方程。我们有

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$$

显然上式变换后变为

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2$$
$$2(x_3-x_1)x+2(y_2-y_1)y=x_3^2+y_3^2-x_1^2-y_1^2$$

因此，得到关于未知数 x 和 y 的两个线性方程的方程组，由此可以确定 x 和 y。

练　习

1. 在 x 轴上求出与两个定点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 等距离的点的坐标。研究例子 $A(0, a)$，$B(b, 0)$。

2. 给出等边三角形 ABC 的两个顶点 A 和 B 的坐标，怎样求出第三个顶点的坐标？研究例子 $A(0, a)$，$B(a, 0)$。

3. 给出正方形 $ABCD$ 两个相邻顶点 A 和 B 的坐标，怎样求出其余顶点的坐标？研究例子 $A(a, 0)$，$B(0, b)$。

4. 为了使三角形 ABC 成为以顶点 C 为直角顶点的直角三角形，其顶点坐标应满足什么条件？

5. 为了使三角形 ABC 的角 A 大于角 B，其顶点坐标应满足什么条件？

6. 四边形 $ABCD$ 由其顶点坐标确定，如何判定它是或不是内接于圆？

7. 证明：对于任意实数 a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 不等式

$$\sqrt{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2}+\sqrt{(a_2-a)^2+(b_2-b)^2}\geqslant\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

成立。它与怎样的几何事实相对应？

§3. 线段的定比分割

假定在 xy 平面上给出两个不同的点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$。我们来求分割线段 A_1A_2 为 $\lambda_1:\lambda_2$ 的 A 点的坐标 x 和 y。

假定线段 A_1A_2 不平行于 x 轴。把点 A_1, A, A_2 投影到 y 轴上(图 9)。我们有

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{\bar{A}_1\bar{A}}{\bar{A}\bar{A}_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

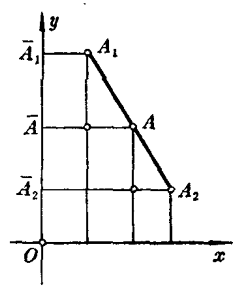


图 9

因为点 $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}$ 分别具有与点 A_1, A_2, A 相同的纵坐标，所以

$$\bar{A}_1\bar{A}=|y_1-y|,\quad \bar{A}\bar{A}_2=|y-y_2|$$

因而

$$\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

因为点 $\bar{A}$ 在 $\bar{A}_1$ 和 $\bar{A}_2$ 之间，所以 y_1-y 与 $y-y_2$ 同号。因此

$$\frac{|y_1-y|}{|y-y_2|}=\frac{y_1-y}{y-y_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

由此得到

$$y=\frac{\lambda_2y_1+\lambda_1y_2}{\lambda_1+\lambda_2} \tag{*}$$

若线段 A_1A_2 平行于 x 轴，那么

$$y_1=y_2=y$$

这和公式(*)给出同样的结果，因此，公式(*)对于点 A_1, A_2 的任何位置都是正确的。

A 点的横坐标能类似地求出。对于它可得到公式

$$x=\frac{\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

令 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=t$，那么 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=1-t$。因此，以点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 为端点的线段上的任意点 C 的坐标能用式子

$$x=(1-t)x_1+tx_2, \qquad y=(1-t)y_1+ty_2, \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

来表示。

我们来说明，当 $t<0$ 和 $t>1$ 时，点 $C(x, y)$ 在什么地方。为此，在 $t<0$ 的情况下，对 x_1, y_1 解公式。得到

$$x_1=\frac{1\cdot x+(-t)x_2}{1-t}$$

$$y_1=\frac{1\cdot y+(-t)y_2}{1-t}$$

由此可见，点 $A(x_1, y_1)$ 在线段 CB 上，并且分割线段 CB 为定比 $(-t):1$。因此，在 $t<0$ 时，公式给出线段 AB 从 A 向外的延长线上点的坐标。同理可证，当 $t>1$ 时，公式给出线段 AB 从 B 向外的延长线上点的坐标。

作为练习，我们来证明初等几何中的契维定理。该定理说：若三角形诸边依次被分割成 $a:b, c:a, b:c$（图 10），则三角形的顶点与对边分点的连线交于一点。

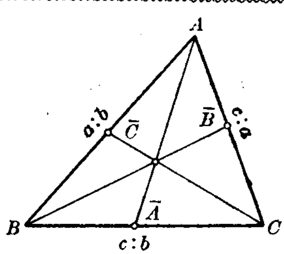


图 10

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$ 是三角形的顶点，$\bar{A}$，$\bar{B}$，$\bar{C}$ 是对边的分点（图 10）。$\bar{A}$ 点的坐标：

$$x=\frac{bx_2+cx_3}{b+c}, \qquad y=\frac{by_2+cy_3}{b+c}$$

我们把线段 $A\bar{A}$ 分割成 $(b+c):a$。分点的坐标为

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$$

$$y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}$$

如果把线段 $B\bar{B}$ 分割成$(a+c):b$，则得到同样的分点坐标。当分割线段 $C\bar{C}$ 为$(a+b):c$ 时，仍得到同样的坐标。因此，线段 $A\bar{A}$, $B\bar{B}$ 和 $C\bar{C}$ 有公共点，这正是需要证明的。

我们指出，初等几何中关于三角形的中线、角平分线和高线分别交于一点的定理是契维定理的特殊情况。

练　　习

1. 给出平行四边形三个顶点的坐标(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)。求其第四个顶点和中心的坐标。

2. 给出三角形顶点的坐标(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)。求其中线交点的坐标。

3. 给出三角形各边中点的坐标(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)。求出它的顶点坐标。

4. 给定以(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)为顶点的三角形。求出相似系数为 λ，相似中心在点(x_0, y_0)并且处于类似位置的相似三角形的顶点坐标。

5. 如果点 A 在连接点 A_1, A_2 的直线上，并且在线段 A_1A_2 的外面，它到 A_1 和 A_2 的距离之比等于 $\lambda_1:\lambda_2$，就说它外分线段 A_1A_2 为 $\lambda_1:\lambda_2$。证明：点 A 的坐标可由点 A_1 和 A_2 的坐标(x_1, y_1)，(x_2, y_2)用公式

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad y = \frac{\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

表示出来。

6. 两条线段分别由其端点坐标给出。不作图，怎样知道它们是否相交？

7. 分割线段 A_1A_2 为 $\mu_2:\mu_1$ 的 A 点叫做分别位于点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$ 的两个质点 μ_1, μ_2 的重心。因此，它的坐标

$$x = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad y = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

n 个位于点 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$的质点 $\mu_i(i=1, 2, \cdots, n)$的重心用归纳法来定义。那就是，如果 A'_n 是前面 $n-1$ 个质点的重心，那么就定义位于 A_n 的 μ_n 和位于点 A'_n 的 $\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}$ 的重心为所有 n 个质点的重心。推出分别位于点 $A_i(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 的质点 $\mu_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的重心坐标