数学命题的解答与发现

平面几何分册

郭家进　著

陕西科学技术出版社

前　言

本书是以命题网络的观点，面向中学教学实际，从培养学生独立解决问题的能力和创造能力出发，结合作者三十多年的研究成果写成的。

本书首次提出了研究数学命题的意义、作用和基本方法。以平面几何为背景，通过大量研究性的例题，论述了数学命题的解答、变化、发展的规律，介绍了发现数学命题的基本方法，揭开了数学发现的神秘面纱，探讨了数学命题中证明题、计算题、轨迹题、作图图之间的联系及其相互转化的条件，把不同类型不同形式的命题归纳为一个有机的整体。

从数学发展史看，数学的真正组成部分是问题和解答，而最困难的部分之一是提出正确的问题，作者正是在这些不易发现问题的地方提出了自己的发现，这些带有启示性的“新发现”，将激励着读者去探索、去发现数学命题之间的联系或新的数学命题，这正是作者的目的所在。每章之后附有习题和评注，以供读者解答、研究和创新的练习思考。（需要题解都可与潍坊市昌潍师专作者联系）

该书可供数学教育工作者参考，亦可作为中学生的课外读物。由于水平所限，错误这处在所难免，欢迎读者批评指正。

作者

1989.3

目　录

第一章　数学命题研究

凡是学数学的人或数学工作者，几乎天天都与数学命题打交道．对学习者来说，如果在解答数学命题的过程中有目的地培养自己的创造意识，将成倍地提高个人的学习效率，有志者不妨试试看．

§1　研究数学命题的意义

解答已知的数学命题就是对它进行了研究；如果发现了所解数学命题与其他数学命题之间的联系，就使自己的探讨加深了一步；如果从已知数学命题推出了未知数学命题，这就是学习中的创造．许多数学家开创性的工作就是从解决某一数学命题开始的，他们在解决这一命题的过程中或创造了新方法或得出了新结论．有的对某一数学分支的发展起了促进作用；也有的形成了新的数学分支．如费马从分析丢番图的“将一个平方数分解为两个数的平方和”这个命题的结构出发，推出了费马定理：“将一个高于二次的整数幂分解为两个整数同次幂的和是不可能的．”后人为了证明这个定理，创造了一系列的新方法，推出了一批新结论，虽然费马定理还没有得到证明，但这些新方法和新结论却促进了数论的发展．再如罗巴切夫斯基和鲍耶等人不约而同的从证明“欧氏第五公设”出发推出了《罗氏几何》．而华罗庚教授的处女作是《苏家驹之

代数的五次方程式解法不能成立之理由》.若读者能在解题的过程中做些力所能及的探讨,并能发现一些新的数学命题(即使是别人早已发现的也好),对培养自己的创造意识和解题能力是大有裨益的.

在研究数学命题时,学者思维活跃、思路开阔、浮想联翩、容易产生突破常规的想法.通过对数学命题的深入分析,除了对所探讨的数学命题认识深刻、理解全面、能掌握命题的解答规律、发现命题之间的联系、触类旁通之外,还能培养自己独立解决数学命题的能力和创造精神,这些积极因素将在学者的一生中发挥作用.

§2 研究数学命题的方法

对于一个数学命题的研究方法是多种多样的,在学习数学中,每人都可根据自己的具体情况选择适合个人特点的研究方法.当一个人开始学习研究数学命题时,往往感到难以着手,因此提出以下由浅入深的方法,供初学者参考.

1. 研究数学命题应从探讨解答数学命题的方法入手,通过分析解题思路,掌握解题规律.

2. 在解答数学命题结束后,要回头总结自己是怎样找到和发现这种解题思路的? 找这种解题思路的过程是怎样的?

3. 分析所解数学命题与自己熟悉的哪些命题有联系,它们之间有些什么共性和区别,按照自己定的分类标准判别它属于哪一种类型,把它纳入自己的知识结构之中.

4. 想一想自己解这个数学命题所用的方法有什么特点,从方法论的角度对解题方法进行总结.

5. 考虑所解数学命题还有没有其他解法. 如存在不同解法,就要比较它们的优缺点,找出比较合理的解法.

6. 判断所解数学命题有多少个逆命题,它们是否成立?若成立试证明之;若不成立试否定之.

7. 对一个特殊性的命题要对它进行推广;对一般性的命题要讨论它的特殊情况. 通过这样的研究,有助于掌握命题之间的联系和更全面地认识这一命题,以利提高个人的创造能力.

8. 分析所解数学命题中每个条件对证得结论的必要性,所有条件对证得结论的充分性. 在此基础上,可进一步探讨由于命题条件的变化对结论产生的影响,就能更深刻地认识命题条件与结论的制约关系,可以更进一步研究命题的发展以及与其他学科的联系.

9. 探讨数学命题之间的相互转化的条件,就使自己的研究进入更广阔的天地,如在平面几何中研究证明题,计算题、轨迹题、作图题之间的联系及转化条件.

在以上研究的基础上,可以写出自己的学习心得和论文.

例 1 已知 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线,P 为 BM 上的一点,$PR \parallel MA$,交 AB 于 Q,交 CA 的延长线于 R(图 1—1)

求证 $PQ + PR = 2MA.$

证明 1 $\because \quad PQ \parallel MA,$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{MA} = \frac{BP}{BM}. \qquad (1)$$

$\because \quad PR \parallel MA,$

$$\therefore \quad \frac{PR}{MA} = \frac{PC}{MC}. \qquad (2)$$

(1) + (2),得

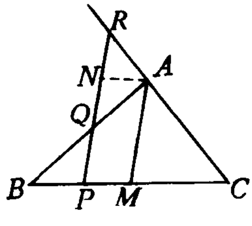

图 1—1

$$\frac{PQ+PR}{MA}=\frac{BP}{BM}+\frac{PC}{MC}. \tag{3}$$

$\because$ M 是 BC 的中点，

$\therefore$ $BM=MC=\frac{1}{2}BC$. 故 $\frac{PQ+PR}{MA}=2$，

即 $PQ+PR=2MA$.

现在按照前面所述的方法对例1进行探讨，这种探讨里带有新发现的成分，所以这个栏目叫做研究与发现.

研究与发现

1. 在寻求例1的解题思路时，首先根据命题的已知条件，画出准确图形. 其次是联系图形结构特点，分析由已知条件可能推出哪些结论. 由 $PR\parallel MA$，可以推出证明中的等式(1)和(2). 第三是联系所要达到的目标——$PQ+PR=2MA$，可以推出等式(3). 若结论成立，则等式(3)的右端应等于2. 这就要用 M 是 BC 中点这个条件将等式(3)的右端化简，从而得出要证明的结论.

2. 例1是在“平行于三角形一边的直线把其他两边分成比例线段”的基础上发展起来的. 应把它化归“证明成比例的线段”这一类命题；而其结论的表现形式是线段的和或线段的几倍的命题，若以结论为标准，也可把它化归“证明线段的和、倍命题”.

3. 在例1中所用的证明方法是综合法. 是由已知条件出法，运用逻辑推理得出结论的.

4. 例1的证明方法很多，现用截长补短法证明如下：

证明2 在图1—1中，过 A 点作 $NA\parallel BC$，交 PR 于 N.

$\because$ $PR\parallel MA$， $\therefore$ 四边形 $NPMA$ 是平行四边形.

因而 $PN=MA$， $PM=NA$， $\angle RAN=\angle ACM$，

又　$\angle ARP = \angle CAM$.　$\therefore$　$\triangle RNA \backsim \triangle AMC$.

因而　$\dfrac{NR}{MA} = \dfrac{NA}{MC} = \dfrac{PM}{MC}$.　$\because$　$\triangle QNA \backsim \triangle QPB$.

$\therefore$　$\dfrac{QN}{PN} = \dfrac{NA}{BP + NA} = \dfrac{PM}{BM} = \dfrac{PM}{MC}$.

故　$\dfrac{NR}{MA} = \dfrac{QN}{PN} = \dfrac{QN}{MA}$.

$\therefore$　$NR = QN$,　故　$PR + PQ = 2PN = 2MA$.

在证明1中所用的方法简捷合理，在证明2中所用的方法比较直观，但比较繁琐. 两种方法各有特点，相比之下，证明1中所用的方法更为可取.

5. 在例1中条件有二：

条件1.　M 是 BC 的中点；

条件2.　P 为 BM 上的一点，$PR \parallel MA$，交 AB 于 Q，交 CA 的延长线于 R.

结论有一个：　$PQ + PR = 2MA$

(1) 保留条件2，把结论和条件1互换，得逆命题1："P、M 分别为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的两点，$PR \parallel MA$，PR 交 AB 于 Q，交 CA 的延长线于 R，且 $PQ + PR = 2MA$(图1—1).

求证　$BM = MC$".　　　　**新命题**(1)

证明　$\because$　$PR \parallel MA$，　$\therefore$　$\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{PQ}{MA}$.　　(1)

$$\frac{PC}{MC} = \frac{PR}{MA}. \qquad (2)$$

(1) + (2)，得

$$\frac{BP}{BM} + \frac{PC}{MC} = \frac{PQ}{MA} + \frac{PR}{MA} = \frac{PQ + PR}{MA} = 2.$$

$\because$　$BP = BC - PC$，　$BM = BC - MC$，

$$\therefore \quad \frac{BC-PC}{BC-MC}+\frac{PC}{MC}=2.$$

化简得， $(PC-MC)(BC-2MC)=0$.

$\because \quad PC \neq MC$， $\therefore \quad BC-2MC=0$， 即 $BC=2MC$.

$\because \quad BC=BM+MC$， $\therefore \quad BM=MC$.

由此可知逆命题 1 成立，这个证明是用减少未知线段的方法变换等式后，解方程求根，以达证明的目的.

(2) 保留条件 1，把结论和条件 2 互换，得逆命题 2：

"AM 为 $\triangle ABC$ 的中线，P 为 BM 上的一点，直线 PR 交 AB 于 Q，交 CA 的延长线于 R，且 $PQ+PR=2MA$.

求证 $PR \parallel MA$". 新命题(2)

这个命题不成立，因证明较繁故略去.

6. 在探讨命题之间的联系时，除讨论它的逆命题之外，最宜入手的研究是保留命题的条件，探讨新结论，这是名符其实的发现.

在例 1 的证明过程中，除了运用 $PQR \parallel MA$ 这个条件之外，结论成立的关键在于有 $BM=MC=\frac{1}{2}BC$ 这个条件的存在，才使得等式(1) 和(2) 相加后右端能够约分化简，得出形式简单的结论. 通过对等式(1)和(2)特点的分析可知，由(1) ÷ (2) 也能得出形式简单的新结论(图 1—1).

$$\frac{PQ}{PR}=\frac{BP}{PC}. \qquad \text{新结论(1)}$$

若由 $PQ \parallel MA$，得 $\frac{BQ}{BA}=\frac{BP}{BM}$. (4)

由 $PR \parallel MA$，得 $\frac{RC}{AC}=\frac{PC}{MC}$. (5)

(4) + (5)，得 $\frac{BQ}{BA}+\frac{RC}{AC}=2$. 新结论(2)

(4) ÷ (5),得 $\dfrac{AC \cdot BQ}{BA \cdot RC} = \dfrac{BP}{PC}$. 新结论(3)

再由 $PQ \parallel MA$,得 $\dfrac{BQ}{QA} = \dfrac{BP}{PM}$, (6)

$PR \parallel MA$,得 $\dfrac{AC}{RA} = \dfrac{MC}{PM}$, (7)

(6) ÷ (7),得 $\dfrac{RA \cdot BQ}{AC \cdot QA} = \dfrac{BP}{MC}$. 新结论(4)

(6) + (7),得 $\dfrac{BQ}{QA} + \dfrac{AC}{RA} = \dfrac{BP + MC}{PM}$.

若限制 P 为 BM 的中点,则有 $\dfrac{BP + MC}{BP} = 3$.

因而得 $\dfrac{BQ}{QA} + \dfrac{AC}{RA} = 3$. 新命题(3)

7. 在例 1 中由于存在"$PQR \parallel MA$",才能得出等式(1) 和(2),若缺少了这个条件,就推不出等式(1) 和(2),所以在这个命题中条件"$PQR \parallel MA$"是必要条件;对于例 1 来说,"M 为 BC 的中点这个条件也是必要条件. 因为有了这两个条件,就能推出例 1 的结论,所以这两个条件构成的集合是证得结论的充分条件.

从上面的分析可以看出,在其他条件不变的情况下,只要 BM 和 MC 之间有一定的数量关系,并且在等式(3) 的右端可以化简的情况下,能推出下面的命题:

"已知 D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的一点(图 1—2),且 $BD = 2DC$,P 为 BD 上的一点,$PF \parallel DA$,交 AB 与 E,交 CA 的延长线于 F. 则有 $3DA > PE + PF > 2DA$. 新命题(4)

这就把例 1 中的结论由相等转化为不等,转化的条件是 BD 和 DC 由相等变为不等,并且这类命题的证明方法也是例 1 证明方法的推广.

证明 $\because$ $PE \parallel DA$，

$BD = 2DC$，

$\therefore$ $\dfrac{PE}{DA} = \dfrac{BP}{BD} = \dfrac{BP}{2DC}$. (8)

$\because$ $PF \parallel DA$，

$\therefore$ $\dfrac{PF}{DA} = \dfrac{PC}{DC}$. (9)

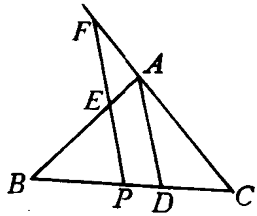

图 1 - 2

(8) + (9)，得

$$\frac{PE}{DA} + \frac{PF}{DA} = \frac{BP}{2DC} + \frac{PC}{DC} = \frac{2(BP + PC)}{2DC} - \frac{BP}{2DC} \leqslant 3,$$

$\therefore$ $PE + PF \leqslant 3DA$. (10)

$\because$ $BP \leqslant BD$，

$\therefore$ $\dfrac{PE}{DA} + \dfrac{PF}{DA} = 3 - \dfrac{BP}{2DC} \geqslant 3 - \dfrac{BD}{2DC} = 2$，

$\therefore$ $PE + PF \geqslant 2DA$. (11)

由(10)、(11)，得 $3DA \geqslant PE + PF \geqslant 2DA$.

$\because$ $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{PE}{DA}$, $\dfrac{FC}{AC} = \dfrac{PF}{DA}$,

$\therefore$ $3 \geqslant \dfrac{BE}{BA} + \dfrac{FC}{AC} \geqslant 2$.

从上证明可以看出，由相等向不等转化是将等式中某一项增加或减少来实现的，并且上述结论可以推广到一般情况.

“已知 D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的一点，且 $BD = nDC$，P 为 BD 上的一点，$PF \parallel DA$，交 AB 于 E，交 CA 的延长线于 F.

求证 $(n+1)DA \geqslant PE + PF \geqslant 2DA$.

$$n + 1 \geqslant \frac{BE}{BA} + \frac{FC}{AC} \geqslant 2\text{”}.$$

证明 从略.

8. 由前面的研究发现例 1 可以进一步发展为讨论性的命

题.

已知　D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的一点(图1—3),P、Q 是在 BD 上的两点,且 $BP < BQ$,$PF \parallel DA$,交 AB 于 E,交 CA 的延长线于 F,$QG \parallel DA$,交 AB 于 G,交 CA 的延长线于 H. 试比较 $PE + PF$ 与 $QG + QH$ 的大小.　　新命题(5)

解　$\because$　$PE \parallel DA$,

$$\therefore \quad \frac{PE}{DA} = \frac{BP}{BD}. \qquad (12)$$

$\because$　$PF \parallel DA$,

$$\therefore \quad \frac{PF}{DA} = \frac{PC}{DC}. \qquad (13)$$

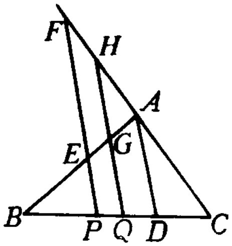

图1—3

(12) + (13),得

$$\frac{PE + PF}{DA} = \frac{BP}{BD} + \frac{PC}{DC}. \qquad (14)$$

同理可得

$$\frac{QG + QH}{DA} = \frac{BQ}{BD} + \frac{QC}{DC}. \qquad (15)$$

(14) − (15) 得

$$\frac{PE + PF}{DA} - \frac{QG + QH}{DA} = \frac{PC - QC}{DC} - \frac{BQ - BP}{BD}$$

$$= PQ\left(\frac{1}{DC} - \frac{1}{BD}\right). \qquad (16)$$

(1) 当 $BD > DC$ 时,　$\frac{1}{DC} - \frac{1}{BD} > 0$,　又　$PQ > 0$,

$\therefore$　$PQ\left(\frac{1}{DC} - \frac{1}{BD}\right) > 0$,　故　$PE + PF > QG + QH$.

(2) 当 $BD = DC$　时,　$PQ\left(\frac{1}{DC} - \frac{1}{BD}\right) = 0$,

$\therefore$　$PE + PF = QG + QH$.

这就是说,当 $BD = DC$ 时,不论 P 点在 BD 上的什么位置,

$PE+PF$ 为定值 $2DA$. 这种特殊情况就是前面讨论的例 1.

(3) 当 $BD<DC$ 时，等式(16) 可变为

$$\frac{QG+QH}{AD}-\frac{PE+PF}{AD}=PQ(\frac{1}{BD}-\frac{1}{DC})>0.$$

$\therefore\quad QG+QH>PE+PF.$

即 $\quad PE+PF<QG+QH.$

9. 当 AD 特殊化为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线时，就会产生如下新命题.

已知在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 $\angle A$ 的平分线，P 为 BD 上的一点，$PF\parallel DA$，交 AB 于 E，交 CA 的延长线于 F，问在这样的条件下，能推出什么新结论呢？ 新命题(6)

解 在图 1—4 中，

$\because\quad PE\parallel DA,$

$$\therefore\quad \frac{PE}{DA}=\frac{BP}{BD}. \qquad (17)$$

$\because\quad PF\parallel DA,$

$$\therefore\quad \frac{PF}{DA}=\frac{PC}{DC}. \qquad (18)$$

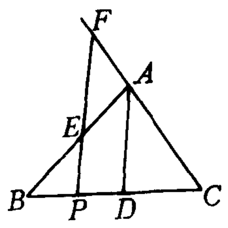

图 1 — 4

因为等式(17) 和(18) 右端分母不同，虽然它们之间有一定关系，但相加后右端的表达式太繁，不适合学者做练习用，故不再去研究它. 而等式(17) 和(18) 左端分母相同，而右端分母之间有一定的关系，当(17) $\div$ (18) 时，可得

$$\frac{PE}{PF}=\frac{BP\cdot DC}{PC\cdot BD},\quad 或 \quad \frac{PE}{PF}=\frac{BP\cdot AC}{PC\cdot AB}. \qquad 新命题(7)$$

$\because\quad PF\parallel DA,\quad$ 又 $\quad DA$ 平分 $\angle A,$

$$\therefore\quad \frac{BP}{BE}=\frac{BD}{BA}=\frac{DC}{AC}=\frac{PC}{FC}.$$

故 $\dfrac{BP+PC}{BE+FC}=\dfrac{BD+DC}{AB+AC}$.

即 $\dfrac{BC}{BE+FC}=\dfrac{BC}{AB+AC}$.

$\therefore\quad BE+FC=BA+AC=$ 定值. 新命题(8)

若进一步把 P 点特殊化为 BC 的中点时，由

$\dfrac{BP}{BE}=\dfrac{PC}{FC}$， 得

$BE=FC=\dfrac{1}{2}(BA+AC)$. 新命题(9)

10. 在例 1 中，若给出确定中线 AM 的条件，可把它转化为计算题.

已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，AM 为 BC 边上的中线，P 为 BC 边长的一点，$PR\parallel MA$，交 AB 于 Q，交 CA 的延长线于 R(图 1—1)，求 $PQ+PR$ 的值.

由例 1 知 $PQ+PR=2MA=\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

11. 在例 1 中，若把结论变为确定动点的条件，可把它转化为轨迹题.

在 $\angle XOY$ 的一边 OX 上有 A、B 两点，且 $OA=AB$，在 OY 上有一点 C，在线段 AB 上有一点 P，$PR\parallel AC$，交 OY 于 R，Q 为 PR 上的一点，当 P 点在 AB 上运动时，求满足 $PQ+PR=2AC$ 的 Q 点的轨迹. 新命题(11)

提示 此轨迹就是线段 BC.

12. 在例 1 中，若把结论变为确定点的位置的条件，可把它转化为作图题.

在 $\angle XOY$ 的一边 OX 上有两点 A、B，且 $OA=AB$，在 OY 上有一点 C，P 点在线段 AB 上，$PR\parallel AC$，交 OY 于 R，求作凸四边形 $CAQR$，使 $PQ+PR=2AC$，且 $PQ=QR$. 新命题(12)

提示 参阅上面的轨迹题.

关于例1的研究,还可以从其他方面进行讨论,由于每个人的思路不同,对于同一个数学命题可能得出不同的新命题.只要你运用研究数学命题的观点进行探讨,就一定能尝到发现的滋味、享受到发现的喜悦心情.

以上仅就例1对照前面所谈几条研究数学命题的方法进行了探讨,以便初学者参考.实际上对每一个数学命题也不必要按照上面所提几条的顺序逐一探讨,只要把你研究得最深刻的一个方面写出来就很好.由于篇幅所限,在后面所举的例题中,就只从某一方面或几个方面进行研究.

例2 P 是矩形 $ABCD$ 内一点(图1—5).

求证 PA^2+PC^2

$=PB^2+PD^2$.

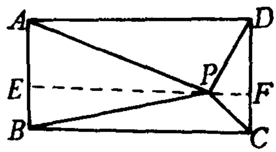

图1－5

思考方法1 为了证明 $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$,就要考虑 $PA^2+PC^2=?$,联系矩形的结构特点,就要分别考虑 $PA^2=?$ $PB^2=?$.为了寻找与 PA 联系的线段,考虑过 P 点作 $EF\parallel BC$,交 AB 于 E,交 CD 于 F.故 $EF\perp AB$, $EF\perp CD$,利用勾股定理即可证得结论.

证明 从略.

研究与发现

1.在命题条件不变的情况下,可以得出如下的新命题.

(1)求证 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 的极小值是 AB^2+BC^2.