样条函数：基本理论

（四）

Larry L.Schumaker 著

赵根榕 等译

西北大学数学系计算数学教研室

一九八二年一月

第九章

Чебышев 样条

本书的前八章专门讨论多项式样条。这里及以后两章发展类似的广义样条空间的理论。我们从研究切比雪夫样条开始这种发展，其中我们将看到，几乎所有的关于多项式样条的结果都能移植过来。

9.1. 广义完备 Чебышев 组

令 I 是实数轴 R 的子区间，设 $U_m=\{u_i\}_1^m$ 是 $C^{m-1}[I]$ 中函数的集。如果对一切 $k=1,2,\ldots\ldots,m$，

$$D\begin{pmatrix} t_1, \ldots\ldots, t_k \\ u_1, \ldots\ldots, u_k \end{pmatrix} > 0, \quad \text{对一切在 } I \text{ 中的 } t_1 < t_2 \ldots\ldots < t_k \tag{9.1}$$

我们就称 U_m 是广义完备 Чебышев 组（ECT组）。在本节中我们证明ECT组是多项式空间 P_m 的自然推广，且证明多项式的许多有性质对ECT组仍保持成立。我们从一函数族组成ECT的等值条件开始。

定理 9.1. $C^{m-1}[I]$ 中的函数族组成ECT组，当且仅当对一切 $x\in I$，它们的朗斯基行列式是正的，即对 $k=1,2,\ldots\ldots,m$，

$$W(u_1,\ldots\ldots,u_k)(x) = \det[D^{j-1}u_i(x)]_{i,j=1}^{k} > 0,$$

一切 $x\in I$ 。

证明。由ECT组的定义，条件的必要性是显然的。其逆由分离 t

的积数的标准讨论建立。——见 Karlin 和 Studden（1966），第 377 页。 □

如果 U_m 是 m 维线性空间，若 U_m 组成 ECT 一组则称 U_m 是 ECT 一空间。下面定理说明任何的 ECT 一空间有特别方便的 ECT 组的基。

<u>定理 9.2</u>，设 $w_i \in C^{m-i}[I]$ 在 I 上是正的，$i = 1, 2, \cdots\cdots m$，则

$$u_1(x) = w_1(x)$$

$$u_2(x) = w_1(x)\int_a^x w_2(s_1)\,ds_1 \qquad (9.2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_m(x) = w_1(x)\int_a^x w_2(s_1)\int_a^{s_1}\cdots$$

$$\cdots\int_a^{s_{m-1}} w_m(s_m)\,ds_m\cdots\cdots ds_1$$

在 I 上组成 ECT 组，称之是典范形式的。进而，如果 U_m 是 ECT 一空间，则存在典范形式的 ECT 组，组成 U_m 的一个基。

<u>证明</u>，见 Karlin 和 Studden（1966），第 379 页。 □

下面 ECT 一系的两个简单性质是非常有用的：

<u>定理 9.3</u>，如果 $U_m = \{u_i\}_1^m$ 是 $[a, b]$ 上的 ECT 组，则可把这些函数延拓到定义在任一较大区间 $[c, d]$ 上，使得 U_m 在 $[c, d]$ 上也是 ECT 一系。

证明．设 $u_1, \cdots, u_m$ 是典范形式的，则可以这样的方法把函数 $w_1, \cdots, w_m$ 的每一个简单地延拓到较大区间上，它们保持正性及其光滑性（即，使得 $w_i \in C^{m-i}[c,d]$，$i=1,2,\cdots,m$）。□

定理 9.4．如果 $\{u_i\}_1^m$ 是 $[a,b]$ 上的典范 ECT 组，则存在函数 u_{m+1}，使得 $U_{m+1}=\{u_i\}_1^{m+1}$ 是 $[a,b]$ 上的 $m+1$ 个函数的典范 ECT 组。

证明．简单地选取 $w_{m+1}=1$，且令

$$u_{m+1}(x)=w_1(x)\int_a^x w_2(s_2)\int_a^{s_2}\cdots\int_a^{s_m} w_{m+1}(s_{m+1})ds_{m+1}\cdots ds_2. \qquad (9.3)$$

□

ECT-组的最重要的例子由经典多项式提供：

例 9.5　多项式空间 P_m 是任何区间 $[a,b]$ 上的 ECT-空间。

讨论．P_m 在 $[a,b]$ 上的典范基由函数 $u_1(x)=1$，$u_2(x)=x-a$，……，$u_m(x)=(x-a)^{m-1}$ 给出。利用权函数 $w_1(x)=1$，$w_i(x)=i-1$，$i=2,\cdots,m$，这些函数可写成典范形式(9.2)。□

多项式的许多性质涉及到导数。在处理 ECT 组时，用某些相关的微分算子代替通常的导数是方便的。定义 $D_0 f=f$，及

$$D_i f = D\left(\frac{f}{w_i}\right), \quad i=1,2,\cdots,m. \qquad (9.4)$$

令

$$L_i = D_i D_{i-1}\cdots D_0, \quad i=0,1,\cdots,m. \qquad (9.5)$$

算子 L_t 可认为是 D^t 的代换。事实上，它正是 D^t 的扰动，这因为依据Leibniz法则，存在 $a_{t,0},\ldots\ldots,a_{t,t-1}$，使得对一切 f，

$$L_t f(x)=\frac{D^t f(x)}{w_1(x)\cdots\cdots w_t(x)}+\sum_{j=0}^{t-1} a_{t,j}(x)D^j f(x) \qquad (9.6)$$

显然，如果 U_m 是典范的ECT-组，则 $\mathcal{U}_m=span(U_m)$ 是 L_m 的零空间，且

$$L_j u_t(a)=w_t(a)\delta_{j,t-1}, \quad \begin{array}{l} j=0,1,\ldots\ldots,t-1 \\ t=1,2,\ldots\ldots,m \end{array} \qquad (9.7)$$

多项式的一个重要性质是：多项式的导数仍是（次数较低）的多项式。类似的情形对于典范ECT组成立。对于每一个 $j=0,1,\ldots\ldots,m-1$，令

$$u_{j,1}(x)=w_{j+1}(x)$$

$$u_{j,2}(x)=w_{j+1}(x)\int_a^x w_{j+2}(s_{j+2})ds_{j+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{j,m-j}(x)=$$

$$=w_{j+1}(x)\int_a^x w_{j+2}(s_{j+2})\int_a^{s_{j+2}}\cdots$$

$$\cdots\cdots\int_{a}^{s_{m-1}} \varphi_m(s_m)ds_m\cdots\cdots ds_{j+2} \tag{9.8}$$

称 $U_m^{(j)}=\{u_{j,i}\}_{i=1}^{m-j}$ 为第 j 个简化组。鉴于定理 9.2，它本身是典范 ECT-组。另外，我们有

$$L_j u_i(x)=\begin{cases} u_{j,i-j}(x), & i=j+1,\cdots\cdots,m \\ 0, & i=1,2,\cdots\cdots,j \end{cases} \tag{9.9}$$

记 $U_m^{(j)}=span(U_m^{(j)})$，$j=1,2,\cdots\cdots,m-1$。这推出如果 $u\in U_m$，则 $L_1u\in U_m^{(1)}$，$L_2u\in U_m^{(2)}$，等等。

在 ECT-组（参看(9.11)）的定义中所涉及的行列式 D 是第 2.3 节所引进的行列式，其中重复的 t 需要取(通常的)导数。从(9.5)所引进的微分算子的重要性看来，自然期望处理 D^* 为 L_i 所代替的行列式时可能有某些优点。我们定义

$$DU_m(t_1,\cdots\cdots,t_m)=det[Ld_iu_j(t_i)]_{i,j=1}^{m}, \tag{9.10}$$

其中

$$d_i=max\{j:t_i=\cdots\cdots t_{i-j}\},$$
$$i=1,2,\cdots\cdots,m$$

利用(9.6)，容易看到，将一些行的适当倍加到另一些行，可以把(9.10)的行列式转变为(9.1)的行列式，即

$$D\begin{pmatrix} t_1, & \cdots\cdots, & t_m \\ \\ u_1, & \cdots\cdots, & u_m \end{pmatrix} = D_{U_m}(t_1, \cdots, t_m),$$

$$一切 t_1 \le t_2 \le \cdots\cdots \le t_m \in I$$

我们断定，对 I 中的一切 $t_1 \le \cdots\cdots \le t_m$，行列式（9.10）也都是正的。下面结果给出关于 D_{U_m} 大小的更精确的信息：

<u>引理 9.6</u>。令

$$M_i = \min_{a\le x\le b} \omega_i(x)$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, m, \tag{9.11}$$

$$M_i = \max_{a\le x\le b} \omega_i(x)$$

则对一切 $a \le t_1 \le t_2 \le \cdots\cdots \le t_m \le b$，

$$C_1 V(t_1, \cdots\cdots, t_m) \le D_{U_m}(t_1, \cdots\cdots, t_m) \le$$
$$\le C_2 V(t_1, \cdots\cdots, t_m), \tag{9.12}$$

其中 V 是范德蒙特行列式〔参看（2.65）〕，C_1，C_2 是仅依赖于 m 和量（9.11）的正常数。进而，对一切 $a \le x \le b$，

$$C_1 |D^k V(t_1, \cdots\cdots, t_{m-1}, x)| \le$$
$$\le |L_k D_{U_m}(t_1, \cdots\cdots, t_{m-1}, x)|$$
$$\le C_2 |D^k V(t_1, \cdots\cdots, t_{m-1}, x)|. \tag{9.13}$$

<u>证明</u>。首先我们说 D_{U_m} 可写成（在正有向区间上的）重积分，它的被积式是权函数 $\omega_1, \cdots\cdots, \omega_m$ 的乘积。为看到这一点，设

$$t_1 \le t_2 \le \cdots\cdots \le t_m = \overbrace{\tau_1, \cdots\cdots, \tau_1}^{l_1} < \cdots\cdots$$

$$< \cdots\cdots < \overbrace{\tau_d, \cdots\cdots, \tau_d}^{l_d}.$$

其次，从第一行分解出因式 $w_1(\tau_1)$，从第 l_1+1 行分解出因式 $w_1(\tau_2)$，等等。

（在按第 1 列展开后）我们得到

$$DU_m = w_1(\tau_1)\cdots\cdots w(\tau_d)$$

$$\cdot\int_{\tau_1}^{\tau_2}\cdots\cdots\int_{\tau_{d-1}}^{\tau_d} DU_m^1(\overbrace{\tau_1, \cdots\cdots, \tau_1}^{l_1-1}, s_1, \overbrace{\tau_2, \cdots\cdots, \tau_2}^{l_2-1}, s_2, \cdots\cdots, \overbrace{\tau_d, \cdots\cdots \tau_d}^{l_d-1})ds_1\cdots ds_{d-1}$$

两

用归纳法推出我们断言。

现在建立（9.12）。设所有的 w 用它们的上界 $\overline{M}_1, \cdots\cdots, \overline{M}_m$ 代替。重积分的值因而变大。但由于诸 w 变为常数，函数 $u_1, \cdots\cdots, u_m$ 退化为（改变某些因子））幂 $1, x, \cdots\cdots, x^{m-1}$，于是重积分是范德蒙特行列式的（常数）倍数。下界则通过把所有的 w 用下界代替而得到。（9.13）的证明是类似的。如果考虑这样的事实的话：根据（9.9），行列式 $L_x DU_m$ 对应于 x 的行在前 k 列有零。 □

在集 2.7 节中我们给出了定义为行列式之商的差商的详细讨论。这种讨论启示着差商关于 ECT－系的自然推广。设 U_m 是典范形式的 ECT 系，设 u_{m+1} 是对 ECT 系 U_{m+1} 的自然扩张［参看

(9.3)]，则给定任意充分可微的函数 f，我们用

$$[t_1, t_2, \cdots\cdots, t_{m+1}]_{U_{m+1}} f =$$

$$= \frac{D\begin{pmatrix} t_1, \cdots\cdots, t_{m+1} \\ u_1, \cdots\cdots, u_m, f \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} t_1 \cdots\cdots, t_{m+1} \\ u_1, \cdots\cdots, u_{m+1} \end{pmatrix}} \qquad (9.14)$$

定义它的关于 U_{m+1} 的 m 阶差商。在不致混淆的时候，我们去掉差商符号上的上标 U_{m+1}。下面定理给出推广了的差商的一些基本性质：

定理 9.7 （9.14）定义的广义差商是使得

$$[t_1, \cdots\cdots, t_{m+1}] u = 0,$$

$$\text{对一切 } u \in U_m, \qquad (9.15)$$

和

$$[t_1, \cdots\cdots, t_{m+1}] u_{m+1} = 1 \qquad (9.16)$$

的线性泛函。进而，如果

$$t_1 \leq t_2 \leq \cdots\cdots \leq t_{m+1} = \overbrace{\tau_1 = \cdots\cdots = \tau_1}^{l_1} < \cdots\cdots$$

$$< \cdots\cdots < \overbrace{\tau_d = \cdots\cdots = \tau_d}^{l_d}, \qquad (9.17)$$

则

$$[t_1, \cdots\cdots, t_{m+1}] f =$$

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} L_{j-1} f(\tau_i),$$

$$\alpha_i l_i \neq 0, \qquad (9.18)$$

及

$$[t_1, \cdots\cdots, t_{m+1}] f =$$

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{l_i} \beta_{ij} D^{j-1} f(\tau_i),$$

$$\beta_i l_i \neq 0, \quad i = 1, \cdots\cdots, d, \qquad (9.19)$$

最后，如果 f 和 g 在点 $\{t_i\}_1^{m+1}$ 处在

$$j = 1, 2, \cdots\cdots, l_i$$

$$D^{j-1} f(\tau_i) = D^{j-1} g(\tau_i),$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, d$$

的意义下一致，则

$$[t_1, \cdots\cdots, t_{m+1}] f = [t_1, \cdots\cdots, t_{m+1}] g.$$

证明．性质（9.15）和（9.16）直接从定义推出．利用差商定义的分子行列式的拉普拉斯展开，得到展开式（9.18）．另一形式（9.19）从（9.6）推出．这些展开清楚地说明差商是对于一切充分光滑函数所定义的线性泛函．并且，如果 f 和 g 在点 $\{t_i\}_1^{m+1}$ 上一致，如（9.17）那样，则它们的差商相等． □

通常差商的最重要的性质之一是定理 9.51 给出的递推关系．下面定理给出了广义差商的类似的递推关系．

定理 9.6．设 $t_1 \neq t_{m+1}$，则

$$[t_1, \cdots\cdots, t_{m+1}]_{U_{m+1}} f =$$

$$\frac{[t_2, \cdots, t_{m+1}]_{U_m} f - [t_1, \cdots, t_m]_{U_m} f}{[t_2, \cdots, t_{m+1}]_{U_m} u_{m+1} - [t_1, \cdots, t_m]_{U_m} u_{m+1}}$$

$$(9.20)$$

证明：Muhlbach［1973］ $\square$

当 $U_{m+1}=\{1, x, \cdots\cdots, x^m\}$ 时递推关系（9.20）退化为通常的关系。作为广义差商的一个应用，我们给出ECT空间函数内插的精确误差展开。

定理9.9 令 U_m 是I上的ECT－空间，$\tau_1<\tau_2<\cdots\cdots<\tau_d$ 是［a，b］中指定的点。令 $l_1, \cdots\cdots, l_d$ 是正整数，$\sum_{i=1}^{d} l_i=m$，则对于任意给定的实数 $\{z_{ij}\}_{j=1, i=1}^{l_i \quad d}$，存在唯一的 $u \in U_m$，使得

$$D^{j-1}u(\tau_i)=z_{ij}, \quad j=1, 2, \cdots\cdots, l_i,$$
$$i=1, 2, \cdots\cdots, d.$$

进而，如果对某个函数 f，

$\{z_{ij}=D^{j-1}f(\tau_i)\}_{j=1, i=1}^{l_i \quad d}$，则

$$f(x)-u(x)=\varphi(x)[t_1, \cdots\cdots, t_m, x]_{U_{m+1}} f, \tag{9.21}$$

其中

$$\varphi(x)=\frac{D_{U_{m+1}}(t_1, \cdots\cdots, t_m, x)}{D_{U_m}(t_1, \cdots\cdots, t_m)}.$$

证明：这个结果直接类似于多项式内插的定理3.6。唯一内插解的存在性从如下事实推出：条件产生关于 $u=\sum_{i=1}^{m} c_i u_i$ 的系数的 m 个方程的方程组，由于 U_m 是ECT－空间，因此它是非奇异的。把差商的分子和分母中的行列式展开，推出该

差表达式（9.21）。 □

定理9.9说明，我们总能用ECT组进行Hermite插值。这里的插值条件是用通常导数指定的，但是，利用导数L_j取代D^j，类似的插值问题对于任何给定的数据也会是唯一的，且在这种情形下误差表示（9.21）也成立。

关于多项式的一个重要结果是定理3.3中给定的Markov不等式。下面定理叙述了对于ECT空间函数的类似结果。

定理9.10。 Markov 不等式。

令U_m是I上的ECT－空间，$1\le p, q\le\infty$，则存在常数C_1（仅依赖于U_m，p，和q），使得

$$\|D^j u\|_{L_p[I]}\le C_1 h^{-j+1/p-1/q}\|u\|_{L_q[I]}$$

（9.22）

其中h是I的长度。

证明。我们在定理10.2中对于更宽的函数类证明这个不等式。□

我们的下一个目的是建立Budan-Fourier 定理的形式，给出ECT－空间的函数u在一个区间上可能有多少个零点的更强的估计。在处理这样的u时，稍更方便的是用导数L_j而不是通常的导数D^j定义重零点。特别，如果

$$u(t)=L_1u(t)=\cdots\cdots=L_{z-1}u(t)=0\neq L_z u(t),$$

（9.23）

则称u在点t上有重数为z的零点。因为根据（9.6），当且仅当

$$u(t)=Du(t)=\cdots\cdots=D^{z-1}u(t)=0\neq D^z u(t)$$

（9.24）

时，（9.23）成立，故此这个定义实际上等价于通常的定义。用

（9.23）定义重零点的优点是，如果u在t有z重零点，则$L_1 u$在同一点有$z-1$重零点。这种看法允许使用归纳型讨论。关于这一点，现在给出广义Rolle 定理的变型，其中D用L_1代替。

令f是使得$L_1 f$在区间$[a, b]$上存在的函数。如果$f(c)=0$，或对于每一个$\varepsilon>0$，存在$c<t<c+\varepsilon$，有$u(t)L_1 u(t)>0$，我们就称$a\le c<b$是f的左Rolle 点。同样地，如果$u(d)=0$，或对于每一个$\varepsilon>0$，存在$d-\varepsilon<t<d$，有$u(t)L_1 u(t)<0$，$a<d\le b$就称为f的右Rolle 点（参看定理2.18）。

定理9.11 广义Rolle 定理

设$L_1 f$在(c, d)存在，且c和d分别是f的左和右Rolle 点，则$L_1 f$在(c, d)上至少变号一次。如果$L_1 f$在(c, d)上连续，则它在那里至少有一个零点。

证明：简单地把广义Rolle 定理用到函数f/w_1上。 □

现在可把多项式的Budan-Fourier 定理3.9推广到ECT空间U_m中的函数上去。

定理9.12 令$U_m=\{u_i\}_1^m$是ECT组，设$u=\sum_{i=1}^m c_i u_i$，$c_m\neq 0$，则

$$Z^*_{(a,b)}(u)\le m-1-S^+[u(a), -L_1 u(a), \cdots\cdots, (-1)^{m-1}L_{m-1}u(a)]$$

$$-S^+[u(b), L_1 u(b), \cdots\cdots, L_{m-1}u(b)],$$

其中Z^*如（8.23）那样计数重数，S^+计标强符号改变。

证明：用L_1代替通常的导数D，用定理9.11代替通常的

Rolle 定理，而非平行于定理 3.9 的证明。也许仅要提到的一点是：仅当 a 是左 Rolle 点时，具有

$$A_j=S^+\{(-1)^j L_j u(a),\cdots,(-1)^{m-1}L_{m-1}u(a)\}$$

的常数 $\alpha=A_0-A_1$ 可能为 1 的讨论。现在基于事实

$$L_1 u(t)=w_1(t)\int_a^t w_2(\xi_1)\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\int_a^{\xi_{\gamma-1}} L_{\gamma+1}u(\xi_\gamma)d\xi_\gamma\cdots\cdots d\xi_1 .$$

定理 9.12 中 $O_m \neq v$ 的假设保证 v 不落在较小的 ECT－空间 U_{m-1} 中。这类似于通常 Budan-Fourier 定理中 p 是准确的的假定。立即从定理 9.12 推出对于 U_m 中任一非平凡函数，$Z^*(u)\leq m-1$。这个事实也从 E^{CT} 组的定理 2.33 推出。

我们通过引进有关典范 ECT－系 $\{u_i\}_1^m$ 的函数的一个重要对偶集来结束本节。给定在（9.2）用权 $w_1,\cdots\cdots,w_m$ 定义的 $u_1,\cdots\cdots,u_m$，我们用

$$u_1^*(x)=1,$$

$$u_2^*(x)=\int_a^x w_m(s_m)ds_m, \tag{9.25}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_m^*(x)=\int_a^x w_m(s_m)\int_a^{s_m}\cdots\int_a^{s_3} w_2(s_2)ds_2\cdots ds_m$$

定义对偶典范ECT组 $U_m^* = \{u_i^*\}_{i=1}^n$ 。相这个ECT组相关，我们有算子

$$L_i^* = D_i^* \cdots\cdots D_0^* \,, \qquad i = 0,1,\cdots\cdots,m$$

(9.26)

其中 $D_0^* f = f$，及

$$D_i^* f = \frac{1}{W_{m-i+1}} Df \,,$$

$$i = 1,2,\cdots\cdots,m \qquad (9.27)$$

显然，$U_m^* = span(U_m^*)$ 是 L_m^* 的零空间，且

$$L_j^* u_i^*(a) = 0 \,, \qquad j = 0,1,\cdots\cdots,i-2 \,,$$

$$i = 1,2,\cdots\cdots,m$$

(9.28)

算子 L_m^* 是算子 L_m 的形式伴随，另一方面，对于 $i = 1,2,\cdots\cdots,m-1$，L_i^* 一般不是 L_i 的伴随。如(9.25)给定对偶典范ECT组 U_m^*，对于 $j = 0,1,\cdots\cdots,m-1$，用

$$u_{j,1}^*(x) = 1 \,,$$

$$u_{j,2}^*(x) = \int_a^x W_{m-j}(s_{m-j})\,ds_{m-j} \,, \qquad (9.29)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{j,m-j}^*(x) \int_a^x W_{m-j}(s_{m-j}) \int_a^{s_{m-j}} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\int_a^{S_2} W_2(S_2)\,dS_2\cdots\cdots dS_{m-j},$$

定义它的第 j 个简化系，记 $U_m^{*(j)}=\{u_{j,i}^*\}_{i=1}^{m-j}$，我们看到

$$L_j^* u_i^* = \begin{cases} 0, & i=1,2,\cdots\cdots,j \\ u_{j,i-j}^*, & i=j+1,\cdots\cdots,m \end{cases} \tag{9.30}$$

9.2. Green 函数

在本节中我们推广第 2.2 节的结果。我们从引进类似的函数 $(x-y)_+^{j-1}$ 开始。设 U_m 是 ECT 组，有对应于权函数 $\{W_i\}_1^m$ 的典范 ECT 组 基 $\{u_i\}_1^m$，对每个 $j=1,2,\cdots\cdots,m$，令

$$g_j(x;y)=\begin{cases} h_j(x), & x\geq y, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \tag{9.31}$$

其中

$$h_j(x;y)=W_1(x)\int_y^x W_2(S_2)\int_y^{S_2}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\int_y^{S_{j-1}} W_j(S_j)\,dS_j\cdots\cdots dS_2. \tag{9.32}$$

下面定理说明 $g_j(x;y)$ 有 Green 函数的特征性质：

定理 9.13 固定 $a \le y \le b$，则对于一切 x 和 y，$j = 1, 2, \cdots\cdots, m$，

$$h_j(x, y) = \sum_{i=1}^{j} u_i(x) u^*_{m-j, j-i+1}(y)(-1)^{j-i}, \tag{9.33}$$

进而

$$L_i g_j(x, y)\big|_{x=y} = \delta_{i, j-1} W_j(y),$$

$$i = 0, \cdots\cdots, j-1 \tag{9.34}$$

证明：为证明（9.33），我们还建立更多一些；即，对一切 $\gamma = 0, 1, \cdots\cdots, j-1$，

$$W_{\gamma+1}(x)\int_y^x \int_y^{s_{\gamma+2}} \cdots\cdots \int_y^{s_{j-1}} W_j(s_j)\cdots W_{\gamma+2}(s_{\gamma+2})\, ds_j \cdots\cdots ds_{\gamma+2}$$

$$= \sum_{i=\gamma+1}^{j} (-1)^{j-i} u_{\gamma, i-\gamma}(x) u^*_{m-j, j-i+1}(y). \tag{9.35}$$

用对 γ 的归纳证明它。对 $\gamma = j-2$，有

$$W_{j-1}(x)\int_y^x W_j(s_j)\, ds_j =$$

$$= W_{j-1}(x)\int_a^x W_j(s_j)\, ds_j - W_{j-1}(x)\int^y W_j(s_j)\, ds_j$$