数学

精选试题解

——供高考复习·教学参考

吉林人民出版社

精选试题解

数　　学

精选试题解

——供高考复习、教学参考

李开成　编译

吉林人民出版社

数学精选试题解
——供高考复习、教学参考
李 开 成 编译

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行
吉林日报印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　印张$5\frac{3}{4}$　125.000字
1981年12月第1版　1981年12月第1次印刷
印数：1—139.410册
书号：7091·1309　定价：0.40元

编 者 的 话

为了帮助高中毕业生和在校高中学生，更好地掌握数理化基础知识和提高解答各种类型题的技能技巧，我们编译了一套《数学、物理、化学精选试题解》共三册。

这套书所编译的试题，是根据我国现行数理化教学大纲，并结合我国中学的实际情况，从1979和1980年度的日本各大学入学试题中精选编写而成。试题形式新颖；内容丰富充实，综合性强；解题技巧灵活、简明易懂，较难的题还加了分析指导，以便于理解，可供学生高考复习和教师教学参考。

由于时间比较匆促，水平有限，错误和不妥之处在所难免，望读者批评指正。

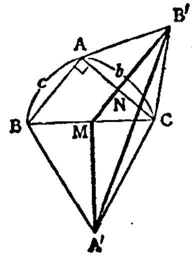
编者 1981年1月

目　　录

几 何 部 分

> 1. △ABC中 $\angle A=90°$，$AB=c$，$CA=b$。如图在 BC，CA上作正△BA′C和正△CB′A。M为BC中点，用 b，c 表示△MA′B′的面积。

〔解〕 取AC中点N，因为MN是边AC的垂直平分线，故MN过点B′



$$\therefore\quad MN=\frac{c}{2},\ NB'=\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

又 $BC=\sqrt{b^2+c^2}$ 故

$$MA'=\frac{\sqrt{3}\sqrt{b^2+c^2}}{2},$$

$$\sin\angle A'MB'=\sin(\angle B+90°)$$

$$=\cos\angle B=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\triangle MA'B'=\frac{1}{2}MA'\cdot MB'\cdot\sin\angle A'MB'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}b+c}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$=\frac{(3b+\sqrt{3}c)\,c}{8}.$$

> 2. 用反证法证明一条直线与一个圆不能有三个以上的公共点。

〔证明〕 假设在同一平面内的圆O与直线l有三个以上的公共点．设其中的三点为A，B，C则在△AOB中，

∵ $OA = OB$ ∴ $\angle OAB = \angle OBA$

又在 △BOC中 ∵ $OB = OC$

∴ $\angle OBC = \angle OCB$

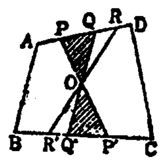
而 $\angle OBA + \angle OBC = 180°$

∴ $\angle OAB + \angle OCB = 180°$

如是在△AOC中，两个内角和等于180°，这是不合理的。故直线l与圆O不能有三个以上的公共点。

> 3. 有一凸四边形ABCD，其中有一点O，如果过O的任一直线都能等分此四边形面积，那么ABCD必为一平行四边形，并且O是其对角线的交点。试证明之。

〔解〕 过点O引与AD，BC边相交的三条直线，（如图）．



∵ PP′，QQ′等分四边形面积

∴ $\triangle OPQ = \triangle OP'Q'$

∴ $OP \cdot OQ = OP' \cdot OQ'$ …………①

同理 $OP \cdot OR = OP' \cdot OR'$ …………②

$OQ \cdot OR = OQ' \cdot OR'$ …………③

由①，② $\dfrac{OQ}{OQ'} = \dfrac{OP'}{OP} = \dfrac{OR}{OR'}$

∴ $QR \parallel Q'R'$

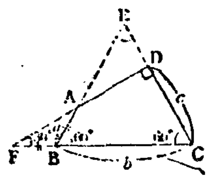
由③ $\frac{OQ}{OQ'}=\frac{OR'}{OR}$ ∴ $OR=OR'$

由此可知 $AD /\!/ BC$，且O点到AD，BC等距离，同理可证 $AB /\!/ CD$。以及O点到AB，BC等距离

∴ ABCD为一平行四边形

4．在四边形ABCD中 $\angle B=\angle C=60°$，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$。 （1）试证 $AD^2=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ （2）当 $c>a$ 且AD与BC成30°角时，求a，b，c间的关系式。

〔解〕 （i）设BA，CD延长交于E。



在△BEC中

∵ $EA=b-a$，$ED=b-c$

∴ $AD^2=(b-a)^2+(b-c)^2$
$-2(b-a)(b-c)\cos 60°$
$=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

(ii) 设 DA，CB 延长交于F，由题设可知 △CDF是 $\angle C=60°$，$\angle D=90°$ 的直角三角形。

∵ $FB=AB=a$

∴ $FC=2CD$

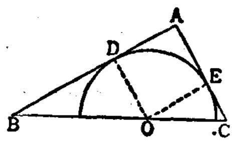
故所求关系式是 $a+b=2c$。

5. 已知直角 $\triangle ABC$ 的二直角边的长分别为 b，c，以斜边 BC 上一点 O 为圆心，作一个与二直角边相切的圆，设此圆半径为 r。

（1）求 r。

（2）当 $\triangle ABC$ 面积 s 一定时，求 r 的最大值。

〔解〕（1）如图 $\because \dfrac{OD}{CA}=\dfrac{BD}{BA}$



$$\therefore \frac{r}{b}=\frac{c-r}{c}$$

$$\therefore \quad r=\frac{bc}{b+c}$$

（2）$\because \quad bc=2s$

又 $\because \quad b+c\geqslant 2\sqrt{bc}=2\sqrt{2s}>0$

$\therefore$ $b+c$ 的最小值是 $2\sqrt{2s}$（此时 $b=c$）

故 r 的最大值是 $\dfrac{2s}{2\sqrt{2s}}=\sqrt{\dfrac{s}{2}}$.

6. 图中半径为 a 的圆周上有八个等分点 A_1，A_2，A_3，……A_8，弦 A_1A_4 交弦 A_2A_7，A_3A_6 于 P，Q，弦 A_5A_8 交弦 A_3A_6，A_2A_7 于 R，S。

（1）求正方形PQRS的面积。

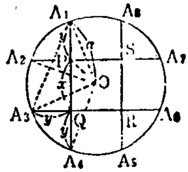
（2）求曲边三角形 A_1A_2P 的面积。

〔解〕 $\because \quad \angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\angle A_3OA_4=45°$

$\therefore \quad \angle A_1OA_4=135°$

$\therefore\quad A_1A_4^2=a^2+a^2-2a\cdot a\ \cos135^\circ$

$\qquad\qquad=(2+\sqrt{2})\ a^2$



又 $\angle A_1OA_3=90^\circ\quad\therefore A_1A_3=\sqrt{2}a$

今设　$PQ=X\quad A_1P=QA_4=QA_3=y$

$A_1A_4^2=(x+2y)^2=(2+\sqrt{2})a^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$①

$A_1A_3^2=(x+y)^2+y^2=2a^2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$②

②×2－①　$x^2=(2-\sqrt{2})a^2\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$③

由③，①　$X=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,a\quad 2y=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,a\ -x$

设曲边三角形A_1PA_2的面积为S，

$S=$扇形$A_1OA_2-2\triangle POA_2$

$=\frac{1}{8}\pi a^2-2\cdot\frac{1}{2}y\cdot\frac{x}{2}$

$=\frac{\pi}{8}a^2-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,a\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,a$

$-\sqrt{2-\sqrt{2}}\ a)$

$=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a^2.$

7．图中是一个棱长为a的正方体，

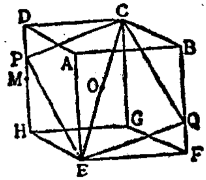
（1）过顶点B，D，E作一截面，求$S_{\triangle BDE}$。

（2）过顶点C，E作截面，求此截面面积的最小值和最大值，以及当面积取得最小和最大值时此截面的形状。

〔解〕（1）$\triangle BDE$是边长为$\sqrt{2}$ a的正三角形

$\therefore \quad S_{\triangle BDE}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a$

$\doteq 0.86a^2$



设三棱锥A—BDE的体积为V，高为h，

则 $V=\frac{1}{3}\cdot\triangle BDE\cdot h$

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ADE\cdot BA$

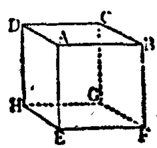
$\therefore \quad \triangle BDE\cdot h=\triangle ADE\cdot BA$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\cdot h=\frac{a^2}{2}\cdot a \qquad \therefore \quad h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

（2）注意到截面是以正方体中心O为对称的中心对称形。

考虑点P在DH上移动时的情况，（点P在边AD上的情况与此相同），点P在D或H的位置时截面面积最大（此时截面为菱形，面积等于21a²），当点P在DH中点M的位置时截面面积最小（此时截面为矩形，面积等于41a²）。

8. 右下图是一个棱长为2的正方体，试答下列各问：



（1）求△BDE的面积。

（2）求四面体ABDE 的体积

（3）求点A到平面BDE的距离。

（4）设直线AG与平面BDE的夹角为θ，求θ。

（5）求此正方体外接球半径。

（6）求外接球的球心到平面BDE的距离。

〔解〕 （1）$\triangle BDE$是边长为$2\sqrt{2}$的正三角形，故其面积$S=2\sqrt{3}$。

（2）四面体ABDE的体积$V=\frac{1}{3}\triangle ABE\cdot AD=\frac{4}{3}$。

（3）由A向平面BDE引垂线，设垂足为P，则

$V=\frac{1}{3}S\cdot AP \qquad \therefore \quad AP=\frac{2}{3}\sqrt{3}$。

（4）$AG=2\sqrt{3}$。

$\because$ $AB=AD=AE$， $\therefore$ P为$\triangle BDE$的重心。

又$\because$ $GB=GD=GE$ 故 $GP\perp$平面BDE，

$\therefore$ A, P, G三点共线而与平面BDE垂直。

$\therefore$ $\theta=90°$

（5）外接球球心O是AG中点，故此球半径$OA=\sqrt{3}$

（6）$\because$ $OP\perp$平面BDE $\therefore OP=OA-AP=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

9. 将一个棱长为1的正方体，切去以其各顶点为顶点的八个正三棱锥使正方体各面变为正多边形。试求剩余部分的体积。

〔解〕 设截去的正三棱锥侧棱之长为X。

（1）当正方体各面变为正八边形时，

$\sqrt{2}x=1-2x$

$\therefore \quad x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

设剩余部分体积为V则

$$V=1-\frac{4}{3}x^3=1-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{7}{3}(\sqrt{2}-1)。$$

（2） 当正方体各面变为正方形时。

$$x=\frac{1}{2}\qquad V=1-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{5}{6}\ .$$

10. 设容积V是定值的长方体的表面积为S，试证 $S\geqslant 6\sqrt[3]{V^{2}}$，并证明表面积最小的是正方体。

〔证明〕 设长方体的三度为x，y，z，则

$$V=xyz$$

$$S=2(xy+yz+zx)$$

根据（相加平均）≥（相乘平均）有

$$\frac{xy+yz+zx}{3}\geqslant\sqrt[3]{xy\ yz\ zx}$$

$$=\sqrt[3]{(xyz)^{2}}$$

$$=\sqrt[3]{V^{2}}$$

故 $S=2(xy+yz+zx)$

$$\geqslant 6\sqrt[3]{V^{2}}$$

这里取等号时S最小，此时有

$$xy=yz=zx\quad 即\quad x=y=z$$

这表明当三度相等时表面积最小。

11. 已知一正四面体ABCD，点P是CD的1:K的内分点，设 $\cos^{2}\angle ABP=\cos\angle APB$ 求k的值。

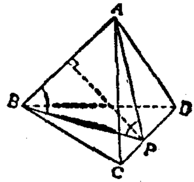
〔解〕 设 $AB=a$，$\angle ABP=\alpha$，$\angle APB=\beta$，

∵ $\triangle CAP\equiv\triangle CBP$ ∴ $AP=BP$

∴ $\angle BAP=\alpha$ ……………………………………………①

在 $\triangle CAP$中，$CA=a$，$\angle C=60°$

$$CP=\frac{a}{1+k}$$



$\therefore\quad AP^2=CA^2+CP^2-2CA\cdot CP\cos\angle C$

$$=\frac{1+k+k^2}{(1+k)^2}a^2$$

在$\triangle PAB$中，　$AB=2AP\ \cos\alpha$ ……………………………②

$$\therefore\quad \cos^2\alpha=\frac{(1+k)^2}{4(1+k+k^2)}$$

在$\triangle PAB$中，　$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\ \cos\beta$

$$=2AP^2\ (1-\cos\beta)$$

$$\therefore\quad \cos\beta=1-\frac{(1+k)^2}{2(1+k+k^2)}=\frac{1+K^2}{2(1+k+k^2)}$$

$\because\quad \cos^2\alpha=\cos\beta$

$\therefore\quad 1+2k+k^2=2+2k^2$

$\therefore\quad (k-1)^2=0$

$\therefore\quad k=1$ ……………………………………………［答］

〔另解〕　由①　$\beta=\pi-2\alpha$

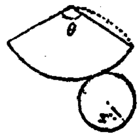
$\therefore\quad \cos^2\alpha=\cos\beta=-\cos 2\alpha=-2\cos^2\alpha+1$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad \therefore\quad AP=\frac{\sqrt{3}}{2}a\quad (\because②)$$

故P为CD的中点。　$\therefore K=1$。

> 12．有一个底面积与侧面积之和是 $50\pi\,cm^2$ 的直圆锥，试求底面半径 x (cm) 的取值范围．

〔解〕设侧面展开图扇形的半径为 y (cm)，中心角为 θ．由题设可得，



$$\begin{cases}\pi x^2 + \dfrac{1}{2}y^2\theta = 50\pi \\ 2\pi x = y\theta\end{cases}$$

由此消去 y，并整理之得，

$$\theta\ (50 - x^2) = 2\pi x^2$$

由此得， $0 < x < 5\sqrt{2}$ $\quad \theta = \dfrac{2\pi x^2}{50 - x^2}$

$\because\ 0 < \theta < 2\pi \quad \therefore\ 0 < \dfrac{2\pi x^2}{50 - x^2} < 2\pi$

即 $0 < 2\pi^2 x < 100\pi - 2\pi x^2$

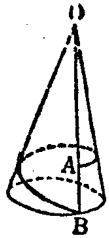
$\therefore\ 0 < x < 5$

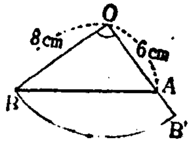
〔答〕 底面半径的取值范围是小于5cm．

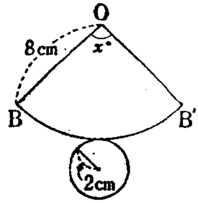
> 13．右图是一个顶点为O，底面半径为 2cm，母线长是8cm的圆锥．试答下列各问：
>
> （1）求侧面展开图圆心角的度数．
>
> （2）在母线O B上有一点A， O A = 6cm，由点A绕侧面转一周至点B，求其最短距离．

〔解〕（1）设所求圆心角度数为X°

$$\frac{X^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 8 = 2\pi \times 2 \quad \therefore\ X^\circ = 90^\circ$$







（2）$AB^2=6^2+8^2$

∴ $AB=10$（cm）.

14．将图1中的梯形，以MN为轴旋转一周生成一个圆台，图2是其侧面展开图。设圆台容积为V，侧面积为S．

（1）用a和θ表示r，h．

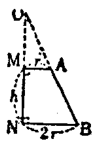
（2）用a和θ表示S，V．

〔解〕（1）在第1图中，$OA=AB=a$，

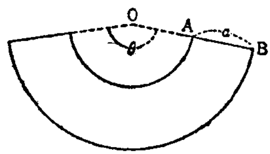
$OM=MN=h$．

由第2图可知，

$a\theta=2\pi r$



第1图



第2图

∴ $r=\dfrac{a\theta}{2\pi}$……①

∵ $AB^2=a^2=h^2+r^2$

∴ $h^2=a^2-r^2=a^2-\dfrac{a^2\theta^2}{4\pi^2}$

$$=\frac{a^2(4\pi^2-\theta^2)}{4\pi^2}$$