

高等学校教学用书

高等数学

(初稿)

下册

朱公謹編



高等教育出版社

17048

13

258

蘇子卿

統一書號 13010

定價 ¥1.10

PDC

高等学校教学用书



高等数学

(初稿)

下册

朱公謹編

高等教育出版社

PDG

本書由高等教育部委托交通大学数学教研組朱公謹教授編写的。可作为高等工業学校 320 到 380 学时类型的高等数学課程的教学用書。因編写時間短促,沒能广泛征求意见,先作为初稿出版;希有关方面提出意見,供再版时修正的参考。

高等数学

(初稿)

下 册

朱公謹編

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 13010·418 开本 850×1168 1/32 印張 11 12/16
字數 301,000 印數 41,001—45,000 定价(4) 1.10
1958年3月第1版 1960年3月上海第8次印刷

下 册 目 录

第一篇 空間解析几何学

第一章 基本概念及矢量代数初步..... 1

§1. 空間有向綫段的射影(1) §2. 空間直角坐标系(2) §3. 有向綫段的坐标(6) §4. 矢量概念(8) §5. 矢量的标积(11)

附注 (1)矢量的矢积,(2)矢量函数的求导

第二章 平面、直綫及曲面的方程.....16

§6. 平面方程的法式(16) §7. 三元一次方程(17) §8. 兩平面的交角(19)
§9. 空間直綫方程(21) *§10. 有向三角形的射影(25) *§11. 空間坐标軸的旋轉(28) §12. 曲面方程举例(30)

第二篇 多元函数的微分学

第三章 偏导数与全微分.....36

§13. 多元函数概念(36) §14. 二重極限(39) §15. 二元函数在一点上及在定义域內的連續性(44) §16. 偏导数(48) §17. 二元函数的可导性与可微性(51) §18. 方向导数(54) §19. 鏈导法的推广(56) §20. 全微分(60) §21. 二元函数的拉格朗日定理与泰勒定理(64)

附注 (1)关于重極限的存在問題,(2)閉集与开集,(3)極限归并原則,(4)再論二元函数在一个自变量固定时的極限

第四章 从隐函数研究曲綫及曲面.....71

§22. 方程在一点鄰近的解开(71) §23. 隐函数求导法(75) §24. 平面曲綫、空間曲綫与曲面的討論(77) §25. 平面曲綫的奇点(82) §26. 坐标变换与反变换(83) §27. 球面坐标与柱面坐标(87) §28. 二元函数的極值問題(90)

附注 (1)平面的参数方程,(2)曲面的参数方程,(3)空間曲綫的曲率与挠率,弗雷耐公式,(4)極值的充分条件

第三篇 無穷級数

第五章 常数項与函数項級数..... 106

§29. 無穷級数的收斂与發散(106) §30. 正項級数的收斂問題(109) §31. 絕(3)

对收敛与条件收敛(114) §32. 函数项级数的一致收敛问题(118) §33. 函数项级数的逐项积分与求导问题(125) §34. 幂级数(129) §35. 函数展开为幂级数问题(133) §36. 无穷级数与旁义积分(138) §37. 复变量幂级数(139)

附注 (1)柯西普遍审敛准则应用于级数, (2)级数项易位问题, (3)级数的相乘, (4)阿贝尔审敛准则, (5)阿贝尔定理的证明, (6)无穷乘积。

第六章 富里哀级数..... 153

§38. 三角级数与周期函数(153) §39. 函数的富里哀级数(155) §40. 富里哀级数的收敛问题(157) §41. 富里哀级数举例(161) §42. 正交函数系(167) §43. 富里哀级数的复数形式(170)

附注 (1)吉勃斯现象, (2)富里哀级数的逐项求积分。

第四篇 多元函数的积分学

第七章 重积分及其应用..... 175

§44. 含参数的定积分(175) §45. 二重积分概念(180) §46. 重积分的基本特性(184) §47. 矩形域上重积分的计算(187) §48. 任意域上重积分的计算(190) §49. 重积分转换为极坐标(193) §50. 三重积分略说(195) §51. 旁义重积分(197) §52. 用重积分计算容积(199) §53. 曲面的面积(202) §54. 重积分在物理学中的简单应用(206)

附注 (1)重极限与累极限的关系, (2)含参数的旁义积分。

第八章 线积分与面积分..... 218

§55. 线积分概念(218) §56. 线积分与路线无关的问题(222) §57. 全微分求积分问题(223) §58. 线积分的基本定理(226) §59. 矢量场与标量场(230) §60. 联系重积分与线积分的高斯定理(234) §61. 格林公式(240) §62. 面积分概念(242) §63. 联系重积分与面积分的奥斯特洛格拉茨基定理(246) §64. 联系面积分与线积分的斯托克斯定理(248)

附注 (1)重积分转换式, (2)斯托克斯定理的证明, (3)矢量场作为旋度场的充分条件。

第五篇 微分方程

第九章 一阶微分方程..... 255

§65. 一阶微分方程的几何意义(255) §66. 变量可分离的一阶微分方程(259) §67. 用变量转换求变量的分离(261) §68. 一阶线性微分方程(265) §69. 全微分方程(268) §70. 单参数曲线族的微分方程(272) §71. 一阶微分方程组(275)

附注 (1)平面曲线族的包络, (2)克莱劳微分方程, (3)欧拉-柯西折线近似积分法。

第十章 二阶线性微分方程..... 281

§ 72. 解的存在定理(281) § 73. 齐次二阶线性微分方程的解(282) § 74. 常系数齐次二阶线性微分方程(288) § 75. 简谐振动与阻尼振动(288) § 76. 非齐次二阶线性微分方程(291) § 77. 强迫振动(296) § 78. 贝塞尔微分方程略说(297)

附注 (1) 二阶微分方程的边值问题, (2) 高于二阶的常系数齐次线性微分方程的基解组。

第十一章 数学物理学中的偏微分方程..... 301

§ 79. 求积分的几种简单方法(301) § 80. 波动方程的初值问题(306) § 81. 圆域上拉普拉斯方程的边值问题(310) § 82. 自由的弦振动(312) § 83. 阻尼的弦振动(318) § 84. 热传导方程(319)

第六篇 复变函数的微积分学**第十二章 解析函数的特性**..... 323

§ 85. 可导性的条件(323) § 86. 解析函数的反函数(329) § 87. 复变函数的定积分与不定积分(330) § 88. 柯西-古萨基本定理(334) § 89. 从复变对数到复变初等函数(337) § 90. 解析函数与保形映射(341) § 91. 柯西-古萨基本定理的一种应用(351) § 92. 柯西积分公式(354) § 93. 解析函数的泰勒展开(356) § 94. 解析函数的罗朗展开(359) § 95. 留数定理(362) § 96. 解析函数与拉普拉斯方程(365)

参考书目..... 368

新
解
和
題
PDG

第一篇 空間解析几何学

第一章 基本概念及矢量代数初步

§1. 空間有向綫段的射影

对于空間的有向綫段,以 A 为起点, B 为終点,常記作 AB 的,我們也可从它与另一条有向直綫的关系来加以考察,像在平面中一样(参照上册第 24 頁 §9)。設以 S' 記这有

向直綫,从 S' 来看 AB ,則有所謂 AB 在 S' 上的射影。試通过 AB 的兩端 A 及 B ,作垂直于 S' 的平面,其与 S' 的交点分別記作 A' 及 B' (圖 1),則 $A'B'$ 称为 AB 在 S' 上的射影。当 $A'B'$ 的方向与 S' 的正向相同时, $A'B'$

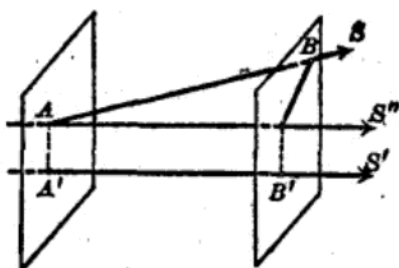


圖 1.

是一正数,相反时是一負数。因此,从 AB 在 S' 上的射影 $A'B'$,我們可以来了解 AB 。

若有兩個綫段 AB 及 CD ,彼此平行而同向,則兩者在 S' 上的射影 $A'B'$ 及 $C'D'$ 之間必有如下关系:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}。$$

这就是說,一个綫段的射影与該綫段本身之比,对于一切平行而同向的綫段來說,总是一个常数。这常数必为 $\cos(AB, S')$, 因通过 A 可作一与 S' 平行而同向的有向直綫 S'' 如圖 1, 从而可見 $\cos(AB, S'') =$

(1)

$= \cos(AB, S')$ 。于是有：

定理一 若 S 及 S' 为空間任何兩有向直綫，則不論 S 及 S' 是否在同一平面上^①， S 上任何綫段 AB 在 S' 上的射影必为

$$A'B' = AB \cos(S, S'). \quad (1.1)$$

其次，若有一折綫段，由 AB, BC, CD, DL 首尾相接而成，則其在另一有向直綫 S' 上的射影，为各綫段分別在 S' 上的射影接合起来的結果：

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'L' = A'L'. \quad (1.2)$$

但 $A'L'$ 就是連接 A 及 L 兩点的綫段 AL 的射影。这一綫段 AL ，像在平面中的一样，也叫做該折綫段的封閉綫段。因此又得：

定理二 任何折綫段在 S' 上的射影恰等于其封閉綫段在 S' 上的射影。

据此，可知空間的折綫段若是閉合的，就是起点与終点相合的，則其射影必然是零了。

§ 2. 空間直角坐标系

要講空間解析几何学，首先应使空間的点与数取得联系，因此，应当說明一下空間的笛卡兒直角坐标系。試作三条有向直綫交于一点而互相垂直，称为坐标軸，其交点称为坐标原点，简称原点，記作 O 。通过原点而互相垂直的坐标軸分別叫做 OX, OY, OZ 軸，或橫軸、縱軸、豎軸，或第一、第二、第三坐标軸。又通过原点而垂直于坐标軸的平面称为坐标面。垂直于第一、第二、第三坐标軸的坐标面分別称为第一、第二、第三坐标面（圖 2）。依照平面解析几何学的習慣，把第一、第二坐标軸的正向規定好之后（任意决定了 OX 軸的正向，在第三坐标面上

① 兩条有向直綫 S 及 S' 若不在同一平面上，所謂它們的夾角 $\angle(S, S')$ ，就是指兩条通过空間任何一点而分別与 S 及 S' 平行且同向的有向直綫 S_1 及 S'_1 所夾成的角 $\angle(S_1, S'_1)$ 。我們把这角的余弦簡写为 $\cos(S, S')$ 。

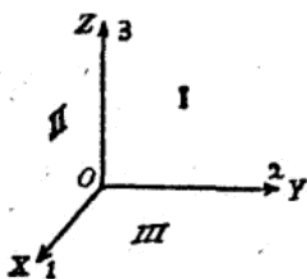


圖 2.



圖 3.



圖 4.

依反時針方向旋轉一直角, 即為 OY 軸的正向), 有兩種不同方法, 可以來取定第三坐標軸的正向。我們可依右手螺旋 (如圖 3) 或左手螺旋 (如圖 4) 的旋向, 由第一坐標軸的正向轉到第二坐標軸的正向, 那末盤旋的方向就是第三坐標軸的正向, 前者稱為右手坐標系, 如圖 2, 後者稱為左手坐標系, 如圖 5。以後應用直角坐標系, 如無特別聲明, 都指右手坐標系。規定好坐標軸的正向 (同時它的負向), 則垂直於坐標軸的坐標面就隨着而有正側與負側可分, 不必瑣述。

在坐標軸上取定相等或不相等的長度單位 (以後如無特別聲明, 所取單位都假定是相等的), 則空間的點的位置, 就可用三個數來確定。設有一點 P , 我們可通過 P , 作平行於三個坐標面的平面, 與第一、第二、第三坐標軸分別相交於 Q, R, S (圖 6), 就得

$$x = OQ, y = OR, z = OS,$$

分別稱為 P 點的第一、第二、第三坐標, 依次記作 (x, y, z) , 簡稱為 P 點的坐標。若 P 定, 則 (x, y, z) 隨着而定。反之, 若有三個實數 a, b, c , 則可作平行於坐標面的三個平面, 與第一、第二、第三坐標軸分別交於 Q, R, S , 使 $OQ = a, OR = b, OS = c$, 從而得到這三個平面的交點, 其位置由 (a, b, c) 來決定。還有, 如作一個起自原點而終於 $P(x,$

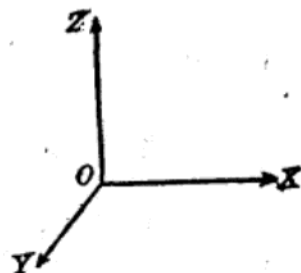


圖 5.

y, z) 的有向綫段, 称做矢徑, 則矢徑 OP 在第一、第二、第三坐标軸上的射影, 就分別是 P 点的第一、第二、第三坐标 x, y, z 。

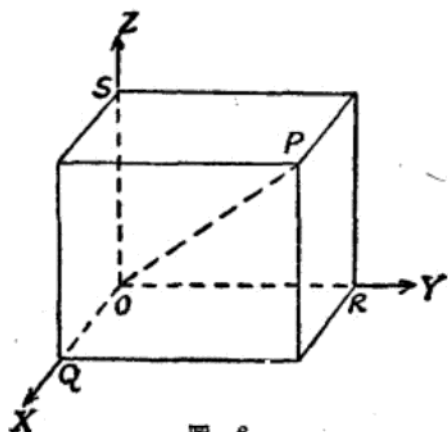


圖 6.

很显然, 若有一个垂直于第一坐标軸的平面, 則其上各点的第一坐标必为一常数 $x=a$ 。同样的, 試看垂直于第二、第三坐标軸的平面, 其上各点必分別滿足 $y=b$ 及 $z=c$, 其中 b, c 都是常数。这样看来, 可知三个坐标面

当分別由 $x=0, y=0, z=0$ 来表达。我們又看到, 整个空間被三个坐标面分成八个部分, 叫做卦限, 在每一卦限內各坐标都有确定的正負号, 正如平面直角坐标系中的象限一样, 可不必細說。

据上述方法, 用三条正交的坐标軸或三个正交的坐标面来規定点的位置, 称做笛卡兒直角坐标系, 常記作 $OXYZ$ 坐标系。若把原点 $(0, 0, 0)$ 沿第一坐标軸移至 $(a, 0, 0)$, 則对于移动后的坐标 x'', y'', z'' (圖 7) 必有

$$x'' = x - a, \quad y'' = y, \quad z'' = z.$$

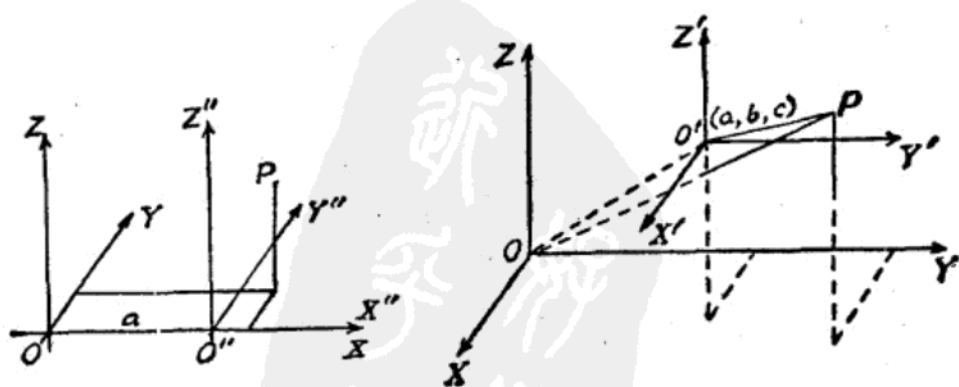


圖 7.

圖 8.

照此再把原点沿其他兩坐标軸平移, 可以推想当原点由 $(0, 0, 0)$ 移至 (a, b, c) 后, 則任意一点的前后坐标 x, y, z 与 x', y', z' 間必有如下关系成立(見圖 8):

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c, \quad (2.1)$$

或

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c. \quad (2.2)$$

这叫做空間坐标軸平移的变换式, 包括上册第 30 頁 (11.1) 与 (11.2) 各公式在內。

講明了点的坐标, 我們可从兩点的坐标来計算其間的距离。若有一点 $P(x, y, z)$, 則其与原点相去的距离, 就是 OP 的長度, 当然是

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.3)$$

再用坐标軸平移式, 可証 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之間的距离 (参看上册第 30 頁 § 12) 为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.4)$$

此外, 又有所謂直綫上的定比分点。若在一有向直綫上取兩不同的点 A 及 B , 規定由 A 到 B 的方向是直綫的正向, 則对于直綫上任何不同于 B 的点 P 來說,

$$\frac{AP}{PB} = \lambda \quad (2.5)$$

必有确定意义。这个数 λ 叫做 P 对 AB 的分比。假定 A, B 兩点为固定, 其坐标分別为 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2) , 又 P 的坐标为 (x, y, z) , 則(参看上册 § 13) 有如下关系成立:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.6)$$

据此, 当 λ 在不等于 -1 的条件下变动时, 將从而获得直綫上对应于定比 λ 的各点; 例如 $\lambda = 1$ 时, 得 AB 的中点的坐标:

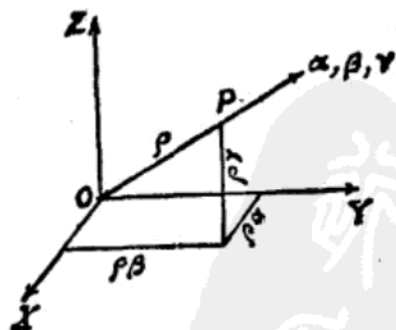
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.7)$$

§3. 有向线段的坐标

应用直角坐标系,不但可以确定点的位置,兩点所連成的有向线段的长度也可用数明确地表达出来。可是,有向线段不仅有长度,还有正负方向。因此,讓我們先講一講如何在空間直角坐标系的基础上,用数来表达有向直线的方向,即所謂有向直线的方向余弦。

設有一条通过原点的有向直线,它与第一、第二、第三坐标轴的正向所夾角称为第一、第二、第三方向角,其余弦称为第一、第二、第三方向余弦,分別記作 α, β, γ 。如有不通过原点的有向直线 L , 則通过原点,作一与 L 平行而同向的有向直线 OS , 以 OS 的方向余弦来定义 L 的方向余弦。应当注意, α, β, γ 所記的,是夾角的余弦而不是夾角本身。因高等数学中所遇見的,都是角的余弦,我們对于夾角的起边与終边,或夾角有 2π 倍数的增减,都無須加以說明,前在平面解析几何学中早已講明(參看上册 §8)。

有向直线的方向余弦照此定义之后,可知兩有向直线如平行而同向,則其方向余弦必分別相等,否則就不可能相等。例如,一有向直线的方向余弦若为 α, β, γ , 則与此平行而反向的有向直线必以 $-\alpha, -\beta, -\gamma$ 为方向余弦。平行而同向的,称为方向相同;平行而不一定同向的,称为方位相同。



■ 9.

定理一 若有一条通过原点而方向余弦为 α, β, γ 的有向直线上取一同向而长度等于 ρ ($\rho \neq 0$) 的线段 OP (圖 9), 則其終点 P 的坐标 (x, y, z) 必为

$$x = \rho\alpha, \quad y = \rho\beta, \quad z = \rho\gamma. \quad (3.1)$$

由此可見 $\rho=1$ 时, 也就是說, 在方向余弦为 α, β, γ 的直綫上, 取長度等于 1 的綫段, 則其終点的坐标就是 (α, β, γ) 。

定理二 設自原点 O 直指任何不同于原点的点 $P(x, y, z)$ 作一矢徑, 則其方向余弦 α, β, γ 必为

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \quad (3.2)$$

应用坐标軸平移式, 可再証由 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 直指 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的有向綫段必有方向余弦

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \\ \gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

到此, 我們再提出方向余弦的基本特性, 由如下兩定理來說明:

定理三 任何有向直綫对直角坐标系的方向余弦 α, β, γ 必滿足

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (3.4)$$

定理四 任何三个数 α, β, γ , 只要滿足 (3.4) 式, 則必有空間的唯一方向, 其对直角坐标系的第一、第二、第三方向余弦分別为 α, β, γ 。

因我們可取一点 P , 其坐标为 (α, β, γ) , 而由于上述关系的成立, P 显然不能是原点。因此由原点作一直达 P 点的有向綫段, 其方向余弦必为 α, β, γ ; 而任何直綫若与此平行而同向, 則其方向余弦亦为 α, β, γ , 其他不同方向的方向余弦决不能与 α, β, γ 完全相同。这样一来, 我們可用方向余弦来明确而唯一地規定方向。

知道了一条有向直綫的方向余弦 α, β, γ , 再各乘上同一个不等于零的常数 h , 則有所謂第一、第二、第三方向数:

$$A = h\alpha, \quad B = h\beta, \quad C = h\gamma.$$

反过来,我們又可从方向数 A, B, C 推知方向余弦:

$$\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (3.5)$$

由此可見,方向数只能确定方位而不能明辨方向(參閱上册 § 15)。

总结以上所說,我們在直角坐标系的基础上,可以把有向綫段的方向与長度用数字精确地来度量。实际上,一个有向綫段是由它的起点与終点来决定的。若有一有向綫段 P_1P_2 , 其起点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$; 終点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 則从 $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ 三个数的大小正負, 可以完全了解 P_1P_2 的方向与長度。这三个数, 从它們的几何意义来看, 就是有向綫段 P_1P_2 在三条坐标軸上的射影, 我們依此称它們为有向綫段 P_1P_2 的第一、第二及第三坐标, 总称为有向綫段的坐标, 記作 $[x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$ 。两个有向綫段, 若長度相等而方向相同, 則其坐标必分別相等。应当注意, 有向綫段的坐标只能确定它的長度与方向, 不能确定它的起点。反过来說, 若把三个数 a, b, c 看作有向綫段的坐标, 則可有無穷多个有向綫段, 其坐标都是 $[a, b, c]$ 。这样無穷多个有向綫段, 都是長度相等, 方向相同的, 而起点的位置却不必要一样。据此說来, 通过有向綫段的坐标, 可以明定方向与長度; 至于起点的位置何在, 不能由此而定。

还应在这里提一提的, 是对于平面上的有向綫段, 我們只須用两个数来規定它的方向与長度。这样两个数就叫做平面有向綫段的坐标。

§ 4. 矢量概念

在許多几何学及物理学的問題中所遇見的有向綫段, 若長度相等

而方向相同,就看作同一事物的表现;至于起点不同,则认为是无关紧要的。因此,我们把方向相同而长度相等的有向线段称为一个矢量,在本书中都用粗体字记出^①,如 $\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{a}$;它们的共同长度称为矢量的长度或矢量的模,记作 $|\mathbf{A}|$ 或 $|\mathbf{a}|$ 。据此,若把有向线段(不论在平面或空间)的起点果在何处置而不论,就是一个矢量。应用直角坐标系,我们已知道表达同一矢量 $\mathbf{A}$ 的一切有向线段必有相同的坐标;这就称做矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标,在平面为两个数,记作 $[A_x, A_y]$,在空间为三个数,记作 $[A_x, A_y, A_z]$ 。这样说来,平面的矢量必有两个数,空间的矢量必有三个数,作为坐标来明确地规定方向与长度;反过来,若有确定的两个或三个数,则必有平面或空间的一个矢量,分别以此作为它的坐标。从矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标 A_x, A_y, A_z , 可以知道它的长度为

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad (4.1)$$

它的方向余弦为

$$\alpha = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \beta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad \gamma = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}. \quad (4.2)$$

有了一个矢量 $\mathbf{A}$, 如以 λ 记一常数, 则 $\lambda\mathbf{A}$ 又是一个矢量, 称为 $\mathbf{A}$ 的倍矢量, 其长度为 $|\lambda| |\mathbf{A}|$, 而其方向当 λ 为正数时与 $\mathbf{A}$ 的方向相同, λ 为负数时与 $\mathbf{A}$ 的方向相反。 λ 为零时, 称为零矢量, 零矢量的方向不定。若 $\mathbf{A}$ 的坐标为 $[A_x, A_y, A_z]$, 则 $\lambda\mathbf{A}$ 的坐标为 $[\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z]$ 。零矢量的坐标当然是 $[0, 0, 0]$ 。对于倍矢量, 显然有如下关系成立:

$$\lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda, \quad (\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}, \quad \lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}. \quad (4.3)$$

此外, 还有所谓单位矢量, 是长度等于 1 的矢量。应用这些概念, 我们可以把任何矢量 $\mathbf{A}$ 用一个与它同方向的单位矢量 $\mathbf{a}$ ($|\mathbf{a}| = 1$) 乘上 $|\mathbf{A}|$ 表达出来, 如 $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{a}$ 。

物理学中的量, 如力、速度、加速度、电磁场强度等都是矢量, 而温

① 在书写时, 用字母上加一箭头来表达, 如 $\vec{A}$ 或 $\vec{a}$ 。

度、質量各由一个数可以完全規定的,叫做标量。

矢量与矢量結合起来,又可产生矢量或标量。結合的方法很多,如上述产生倍矢量的方法也可看作一种特殊的矢量与标量的結合。若有两个矢量 A 及 B , 各由一个有向綫段表达, 則把 B 的起点与 A 的終点重合起来, 可从而产生起自 A 的起点而終于 B 的終点的一个有向綫段; 这样結合的結果又是一个矢量, 称做 A 及 B 的和矢量, 記作

$$A+B=C.$$

在这里, 我們仍借用普通的加号, 并称这种結合法为矢量加法。显而易见, 矢量加法有下列特性(見圖 10):

$$A+B=B+A. \quad (4.4)$$

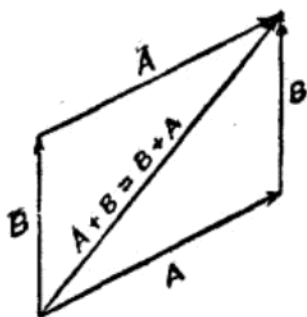


圖 10.

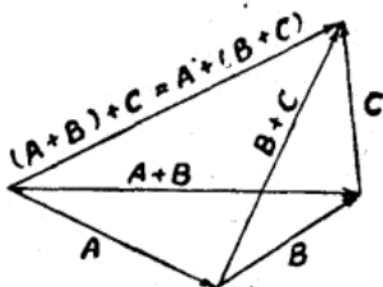


圖 11.

又从圖 11 可知

$$(A+B)+C=A+(B+C). \quad (4.5)$$

我們还可看到, 若有兩矢量 A 及 B , 則必有一个矢量 x , 叫做 A 及 B 的差矢量, 满足

$$x+B=A,$$

这就記作

$$x=A-B.$$

在直角坐标系的基础上討論矢量, 为了运算上的便利起見, 可引用三个單位矢量, 其方向与第一、第二、第三坐标軸的正向相同. 称为基本