高等学校教学用書

高等数学

（初稿）

下册

朱公謹編

高等教育出版社

統一书号 13010·
定价 ¥1.10

高等学校教学用書

高　等　数　学

（初稿）

下　册

朱公謹 編

高等教育出版社

本書由高等教育部委托交通大学数学教研組朱公謹教授編写的。可作为高等工業学校 320 到 380 学时类型的高等数学課程的教学用書。因編写时間短促，沒能广泛征求意見，先作为初稿出版；希有关方面提出意見，供再版时修正的参考。

高 等 数 学

(初稿)

下 册

朱公謹編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·418 开本 850×1168 1/32 印張 11 12/16
字数 301,000 印数 41,001—45,000 定价(4) ￥1.10
1958年3月第1版 1960年3月上海第8次印刷

下 册 目 录

第一篇　空間解析几何学

第二篇　多元函数的微分学

第三篇　無穷級数

第四篇 多元函数的积分学

第五篇 微分方程

第六篇　复变函数的微积分学

第一篇　空間解析几何学

第一章　基本概念及矢量代数初步

§1. 空間有向綫段的射影

对于空間的有向綫段，以 A 为起点，B 为終点，常記作 AB 的，我們也可从它与另一条有向直綫的关系来加以考察，像在平面中一样(参照上册第 24 頁 §9)。設以 S' 記这有向直綫，从 S' 来看 AB，則有所謂 AB 在 S' 上的射影。試通过 AB 的兩端 A 及 B，作垂直于 S' 的平面，其与 S' 的交点分別記作 A' 及 B' (圖 1)，則 $A'B'$ 称为 AB 在 S' 上的射影。当 $A'B'$ 的方向与 S' 的正向相同时，$A'B'$ 是一正数，相反时是一負数。因此，从 AB 在 S' 上的射影 $A'B'$，我們可以来了解 AB。

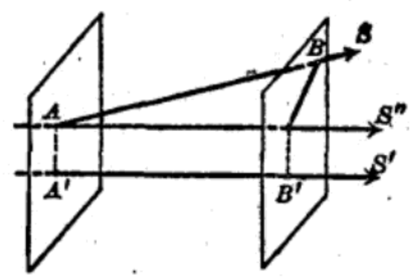

圖 1.

若有兩个綫段 AB 及 CD，彼此平行而同向，則兩者在 S' 上的射影 $A'B'$ 及 $C'D'$ 之間必有如下关系：

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}。$$

这就是說，一个綫段的射影与該綫段本身之比，对于一切平行而同向的綫段来說，总是一个常数。这常数必为 $\cos(AB, S')$，因通过 A 可作一与 S' 平行而同向的有向直綫 S'' 如圖 1，从而可見 $\cos(AB, S'')=$

$=\cos(AB, S')$。于是有:

定理一 若 S 及 S' 为空間任何兩有向直綫，則不論 S 及 S' 是否在同一平面上①，S 上任何綫段 AB 在 S' 上的射影必为

$$A'B'=AB\cos(S, S')。\tag{1.1}$$

其次，若有一折綫段，由 AB, BC, CD, DL 首尾相接而成，則其在另一有向直綫 S' 上的射影，为各綫段分別在 S' 上的射影接合起来的結果:

$$A'B'+B'C'+C'D'+D'L'=A'L'。\tag{1.2}$$

但 $A'L'$ 就是連接 A 及 L 兩点的綫段 AL 的射影。这一綫段 AL，像在平面中的一样，也叫做該折綫段的封閉綫段。因此又得:

定理二 任何折綫段在 S' 上的射影恰等于其封閉綫段在 S' 上的射影。

据此，可知空間的折綫段若是閉合的，就是起点与終点相合的，則其射影必然是零了。

§2. 空間直角坐标系

要講空間解析几何学，首先应使空間的点与数取得联系，因此，应当說明一下空間的笛卡兒直角坐标系。試作三条有向直綫交于一点而互相垂直，称为坐标軸，其交点称为坐标原点，簡称原点，記作 O。通过原点而互相垂直的坐标軸分別叫做 OX、OY、OZ 軸，或横軸、縱軸、竪軸，或第一、第二、第三坐标軸。又通过原点而垂直于坐标軸的平面称为坐标面。垂直于第一、第二、第三坐标軸的坐标面分別称为第一、第二、第三坐标面(圖 2)。依照平面解析几何学的習慣，把第一、第二坐标軸的正向規定好之后(任意决定了 OX 軸的正向，在第三坐标面上

① 兩条有向直綫 S 及 S' 若不在同一平面上，所謂它們的夾角 $\angle(S, S')$，就是指兩条觝过空間任何一点而分別与 S 及 S' 平行且同向的有向直綫 S_1 及 S_1' 所夾成的角 $\angle(S_1, S_1')$。我們把这角的余弦簡写为 $\cos(S, S')$。

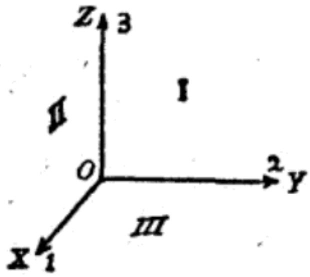

圖 2.

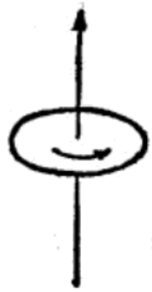

圖 3.

圖 4.

依反时針方向旋轉一直角，卽为 OY 軸的正向），有兩种不同方法，可以来取定第三坐标軸的正向。我們可依右手螺旋（如圖 3）或左手螺旋（如圖 4）的旋向，由第一坐标軸的正向轉到第二坐标軸的正向，那末盤旋的方向就是第三坐标軸的正向，前者称为**右手坐标系**，如圖 2，后者称为**左手坐标系**，如圖 5。以后应用直角坐标系，如無特別声明，**都指右手坐标系**。規定好坐标軸的正向（同时它的負向），則垂直于坐标軸的坐标面就随着而有正側与負側可分，不必瑣述。

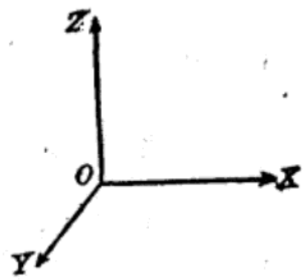

圖 5.

在坐标軸上取定相等或不相等的長度單位（以后如無特別声明，所取單位都假定是相等的），則空間的点的位置，就可用三个数来确定。設有一点 P，我們可通过 P，作平行于三个坐标面的平面，与第一、第二、第三坐标軸分別相交于 Q, R, S（圖 6），就得

$$x=OQ,\ y=OR,\ z=OS,$$

分別称为 P 点的**第一、第二、第三坐标**，依次記作 (x, y, z)，簡称为 P 点的**坐标**。若 P 定，則 (x, y, z) 随着而定。反之，若有三个实数 a, b, c；則可作平行于坐标面的三个平面，与第一、第二、第三坐标軸分別交于 Q, R, S，使 $OQ=a$，$OR=b$，$OS=c$，从而得到这三个平面的交点，其位置由 (a, b, c) 来决定。还有，如作一个起自原点而終于 $P(x,$

$y, z)$ 的有向綫段，称做矢徑，則矢徑 OP 在第一、第二、第三坐标軸上的射影，就分别是 P 点的第一、第二、第三坐标 x, y, z。

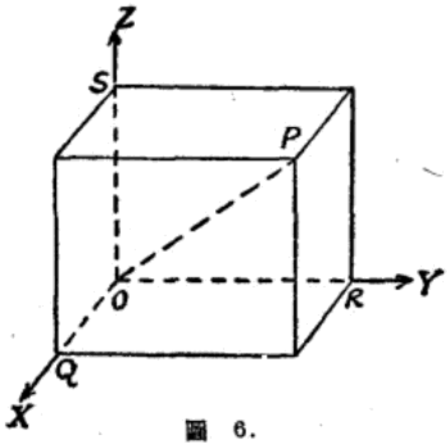

圖 6.

很显然，若有一个垂直于第一坐标軸的平面，則其上各点的第一坐标必为一常数 $x=a$。同样的，試看垂直于第二、第三坐标軸的平面，其上各点必分别满足 $y=b$ 及 $z=c$，其中 b, c 都是常数。这样看来，可知三个坐标面当分别由 $x=0, y=0, z=0$ 来表达。我們又看到，整个空間被三个坐标面分成八个部分，叫做卦限，在每一卦限內各坐标都有确定的正負号，正如平面直角坐标系中的象限一样，可不必細說。

据上述方法，用三条正交的坐标軸或三个正交的坐标面来規定点的位置，称做笛卡皃直角坐标系，常記作 $OXYZ$ 坐标系。若把原点 $(0, 0, 0)$ 沿第一坐标軸移至 $(a, 0, 0)$，則对于移动后的坐标 x'', y'', z'' (圖 7)必有

$$x''=x-a, \quad y''=y, \quad z''=z。$$

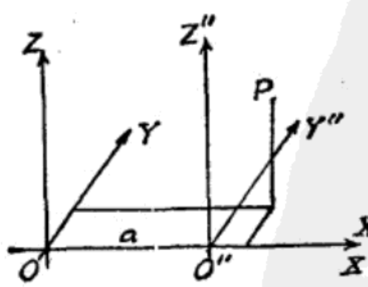

圖 7.

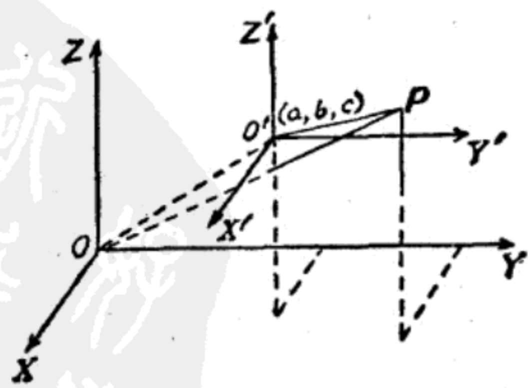

圖 8.

照此再把原点沿其他兩坐标軸平移，可以推想当原点由 (0, 0, 0) 移至(a, b, c)后，則任意一点的前后坐标 x, y, z 与 x', y', z' 間必有如下关系成立(見圖 8)：

$$x'=x-a, \quad y'=y-b, \quad z'=z-c, \tag{2.1}$$

或

$$x=x'+a, \quad y=y'+b, \quad z=z'+c。 \tag{2.2}$$

这叫做空間坐标軸平移的变換式，包括上册第 30 頁 (11.1) 与 (11.2) 各公式在內。

講明了点的坐标，我們可从兩点的坐标来計算其間的距离。若有一点 $P(x, y, z)$，則其与原点相去的距离，就是 OP 的長度，当然是

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}。 \tag{2.3}$$

再用坐标軸平移式，可証 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 之間的距离(参看上册第 30 頁 § 12)为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。 \tag{2.4}$$

此外，又有所謂直綫上的定比分点。若在一有向直綫上取兩不同的点 A 及 B，規定由 A 到 B 的方向是直綫的正向，則对于直綫上任何不同于 B 的点 P 来說，

$$\frac{AP}{PB}=\lambda \tag{2.5}$$

必有确定意义。这个数 λ 叫做 P 对 AB 的分比。假定 A, B 兩点为固定，其坐标分别为(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)，又 P 的坐标为 (x, y, z)，則(参看上册 § 13)有如下关系成立：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}。 \tag{2.6}$$

据此，当 λ 在不等于 -1 的条件下变动时，將从而获得直綫上对应于定比 λ 的各点；例如 $\lambda=1$ 时，得 AB 的中点的坐标：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}。 \tag{2.7}$$

§3. 有向綫段的坐标

应用直角坐标系，不但可以确定点的位置，兩点所連成的有向綫段的長度也可用数明确地表达出来。可是，有向綫段不仅有長度，还有正負方向。因此，讓我們先講一講如何在空間直角坐标系的基础上，用数来表达有向直綫的方向，卽所謂有向直綫的方向余弦。

設有一条通过原点的有向直綫，它与第一、第二、第三坐标軸的正向所夾角称为第一、第二、第三方向角，其余弦称为第一、第二、第三方向余弦，分别記作 α, β, γ。如有不通过原点的有向直綫 L，則通过原点，作一与 L 平行而同向的有向直綫 OS，以 OS 的方向余弦来定义 L 的方向余弦。应当注意，α, β, γ 所記的，是夾角的余弦而不是夾角本身。因高等数学中所遇見的，都是角的余弦，我們对于夾角的起边与終边，或夾角有 2π 倍数的增减，都無須加以說明，前在平面解析几何学中早已講明(参看上册 §8)。

有向直綫的方向余弦照此定义之后，可知兩有向直綫如平行而同向，則其方向余弦必分别相等，否則就不可能相等。例如，一有向直綫的方向余弦若为 α, β, γ，則与此平行而反向的有向直綫必以 $-\alpha, -\beta, -\gamma$ 为方向余弦。平行而同向的，称为方向相同；平行而不一定同向的，称为方位相同。

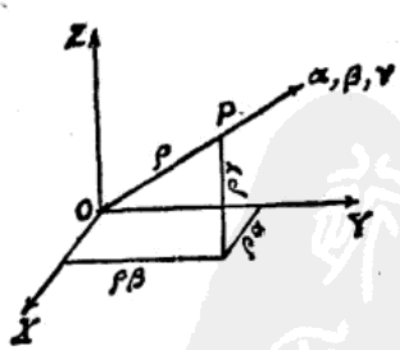

圖 9.

我們要把方向余弦用数表达出来，可根据如下定理：

定理一 若在一条通过原点而方向余弦为 α, β, γ 的有向直綫上取一同向而長度等于 ρ $(\rho\neq0)$ 的綫段 OP (圖 9)，則其終点 P 的坐标 (x, y, z) 必为

$$x=\rho\alpha, \quad y=\rho\beta, \quad z=\rho\gamma。 \tag{3.1}$$

由此可見 $\rho=1$ 时，也就是說，在方向余弦为 α, β, γ 的直綫上，取長度等于1的綫段，則其終点的坐标就是 (α, β, γ)。

定理二　設自原点 O 直指任何不同于原点的点 $P(x, y, z)$ 作一矢徑，則其方向余弦 α, β, γ 必为

$$\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。\tag{3.2}$$

应用坐标軸平移式，可再証由 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 直指 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的有向綫段必有方向余弦

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \beta&=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\\ \gamma&=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}。\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

到此，我們再提出方向余弦的基本特性，由如下兩定理来說明：

定理三　任何有向直綫对直角坐标系的方向余弦 α, β, γ 必滿足

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1。\tag{3.4}$$

定理四　任何三个数 α, β, γ，只要滿足(3.4)式，則必有空間的唯一方向，其对直角坐标系的第一、第二、第三方向余弦分別为 α, β, γ。

因我們可取一点 P，其坐标为 (α, β, γ)，而由于上述关系的成立，P 显然不能是原点。因此由原点作一直达 P 点的有向綫段，其方向余弦必为 α, β, γ；而任何直綫若与此平行而同向，則其方向余弦亦为 α, β, γ，其他不同方向的方向余弦决不能与 α, β, γ 完全相同。这样一来，我們可用方向余弦来明确而唯一地規定方向。

知道了一条有向直綫的方向余弦 α, β, γ，再各乘上同一个不等于零的常数 h，則有所謂第一、第二、第三方向数：

$$A=h\alpha,\quad B=h\beta,\quad C=h\gamma。$$

反过来，我們又可从方向数 A, B, C 推知方向余弦：

$$\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}。\tag{3.5}$$

由此可見，方向数只能确定方位而不能明辨方向（参閱上册 §15）。

总結以上所說，我們在直角坐标系的基础上，可以把有向綫段的方向与長度用数字精确地来度量。实际上，一个有向綫段是由它的起点与終点来决定的。若有一有向綫段 P_1P_2，其起点为 $P_1(x_1, y_1, z_1)$；終点为 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，則从 $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ 三个数的大小正負，可以完全了解 P_1P_2 的方向与長度。这三个数，从它們的几何意义来看，就是有向綫段 P_1P_2 在三条坐标軸上的射影，我們依此称它們为有向綫段 P_1P_2 的第一、第二及第三坐标，总称为有向綫段的坐标，記作 $[x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$。兩个有向綫段，若長度相等而方向相同，則其坐标必分别相等。应当注意，有向綫段的坐标只能确定它的長度与方向，不能确定它的起点。反过来說，若把三个数 a, b, c 看作有向綫段的坐标，則可有無穷多个有向綫段，其坐标都是 $[a, b, c]$。这样無穷多个有向綫段，都是長度相等，方向相同的，而起点的位置却不必一样。据此說来，通过有向綫段的坐标，可以明定方向与長度；至于起点的位置何在，不能由此而定。

还应在这里提一提的，是对于平面上的有向綫段，我們只須用兩个数来規定它的方向与長度。这样兩个数就叫做平面有向綫段的坐标。

§4. 矢量概念

在許多几何学及物理学的問題中所遇見的有向綫段，若長度相等

而方向相同，就看作同一事物的表現；至于起点不同，則認为是无关紧要的。因此，我們把方向相同而长度相等的有向綫段称为一个矢量，在本书中都用粗体字記出①，如 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{a}$；它們的共同长度称为矢量的长度或矢量的模，記作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$。据此，若把有向綫段（不論在平面或空間）的起点果在何处置而不論，就是一个矢量。应用直角坐标系，我們已知道表达同一矢量 $\boldsymbol{A}$ 的一切有向綫段必有相同的坐标；这就称做矢量 $\boldsymbol{A}$ 的坐标，在平面为两个数，記作 $[A_x, A_y]$，在空間为三个数，記作 $[A_x, A_y, A_z]$。这样說来，平面的矢量必有两个数，空間的矢量必有三个数，作为坐标来明确地規定方向与长度；反过来，若有确定的两个或三个数，則必有平面或空間的一个矢量，分別以此作为它的坐标。从矢量 $\boldsymbol{A}$ 的坐标 A_x, A_y, A_z，可以知道它的长度为

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}, \tag{4.1}$$

它的方向余弦为

$$\alpha=\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}},\quad \beta=\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}},\quad \gamma=\frac{A_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}。\tag{4.2}$$

有了一个矢量 $\boldsymbol{A}$，如以 λ 記一常数，則 $\lambda\boldsymbol{A}$ 又是一个矢量，称为 $\boldsymbol{A}$ 的倍矢量，其长度为 $|\lambda|\,|\boldsymbol{A}|$，而其方向当 λ 为正数时与 $\boldsymbol{A}$ 的方向相同，λ 为負数时与 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反。λ 为零时，称为零矢量，零矢量的方向不定。若 $\boldsymbol{A}$ 的坐标为 $[A_x, A_y, A_z]$，則 $\lambda\boldsymbol{A}$ 的坐标为 $[\lambda A_x, \lambda A_y, \lambda A_z]$。零矢量的坐标当然是 $[0, 0, 0]$。对于倍矢量，显然有如下关系成立：

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda,\quad (\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A},\quad \lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}。\tag{4.3}$$

此外，还有所謂单位矢量，是长度等于 1 的矢量。应用这些概念，我們可以把任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 用一个与它同方向的单位矢量 $\boldsymbol{a}$（$|\boldsymbol{a}|=1$）乘上 $|\boldsymbol{A}|$ 表达出来，如 $\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{a}$。

物理学中的量，如力、速度、加速度、电磁場强度等都是矢量，而温

① 在书写时，用字母上加一箭号来表达，如 $\vec{A}$ 或 $\vec{a}$。

度、質量各由一个数可以完全規定的，叫做标量。

矢量与矢量結合起来，又可产生矢量或标量。結合的方法很多，如上述产生倍矢量的方法也可看作一种特殊的矢量与标量的結合。若有兩个矢量 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$，各由一个有向綫段表达，則把 $\boldsymbol{B}$ 的起点与 $\boldsymbol{A}$ 的終点重合起来，可从而产生起自 $\boldsymbol{A}$ 的起点而終于 $\boldsymbol{B}$ 的終点的一个有向綫段；这样結合的結果又是一个矢量，称做 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的和矢量，記作

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}。$$

在这里，我們仍借用普通的加号，并称这种結合法为矢量加法。显而易見，矢量加法有下列特性（見圖 10）：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}。\tag{4.4}$$

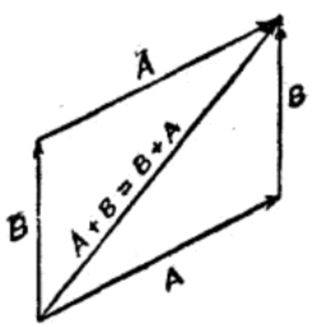

圖 10.

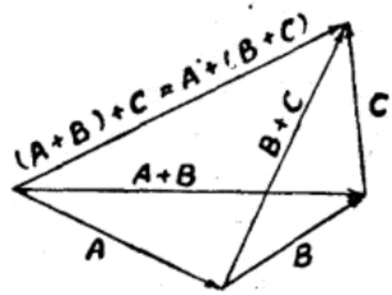

圖 11.

又从圖 11 可知

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})。\tag{4.5}$$

我們还可看到，若有兩矢量 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$，則必有一个矢量 $\boldsymbol{x}$，叫做 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的差矢量，滿足

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A},$$

这就記作

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}。$$

在直角坐标系的基础上討論矢量，为了运算上的便利起見，可引用三个單位矢量，其方向与第一、第二、第三坐标軸的正向相同，称为基本