# 高中数学专题辅导



福州市数学会

福建教育出版社

1

# 高中数学专题辅导

## 第一辑

福州市数学会

福建教育出版社

高中数学专题辅导

第一辑

福州市数学会

福建教育出版社出版

（福州大梦山七号）

福建省新华书店发行　　福建教育出版社印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　　8.25印张　　169千字

1987年12月第一版　　1987年12月第一次印刷

印数：1——10,700

ISBN 7－5334－0096－8
G·53

书号：7159·1294
定价：1.50元

## 内 容 提 要

本书共三辑。旨在帮助高中学生加深对数学课本内容的理解，开拓思路，提高分析问题和解决问题的能力。

本辑所选的专题，系高中数学教材中代数与三角的重点和难点的问题。着重探讨这些问题的基本概念、数学规律，归纳总结它们的应用，并对解题方法作比较详细的介绍。还选配有适量的习题，供读者独立练习和思考。

# 编者的话

为了帮助高中学生加深对数学课本内容的理解，开拓思路，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了本书（共三辑）。

本书选择的专题，取材于课本中的重点、难点，在编排上兼顾课本章节的顺序。丛书的第一辑主要是代数与三角的内容；第二辑主要是立体几何与解析几何的内容；第三辑主要是逻辑代数与微积分的内容。

应福建教育出版社之约，本会邀请周志文、蔡永芳、倪木森三位老师组成本书编委会，编委会约请了各个专题的撰稿人，他们都是教学经验丰富的中学骨干教师或大专院校的教师。本辑的主编是倪木森同志。

本书可供高中学生课外阅读，也可供高中数学教师参考。

限于时间和水平，书中不当之处，在所难免，欢迎读者不吝赐教。

福州市数学会

# 目　录


| | | |
|---|---|---|
| 集合 | 福州五中吴可人 | （1） |
| 初等函数的性质 | 福州一中李必成 | （23） |
| 指数方程与对数方程 | 福州师专姜守清 | （49） |
| 三角函数的不等式与极值 | 福州五中郑宝英 | （62） |
| 反三角函数的值域和运算 | 福州铁中吴有燊 | （96） |
| 不等式的证明 | 福州教育学院吴大钟 | （120） |
| 复数在解平面几何问题中的应用 | 福州十一中魏昭源 | （146） |
| 数学归纳法 | 福州高级中学魏长庚 | （170） |
| 利用复数解三角问题 | 福州教育学院倪木森 | （197） |
| 几种数列的求和 | 福州师专周志文 | （218） |
| 待定常（系）数法及其应用 | 福州师专陈圣益 | （236） |

# 集　合

## 一　有关的概念

### (一)集合与元素

把具有某种属性的一些对象看做一个整体便形成一个集合．集合里各个对象叫做集合的元素．$a$是集合$A$的元素，表示为$a\in A$；如果$a$不是集合$A$的元素，表示为$a\notin A$．

例如$A=\{x|x^2-1=0\}$是由满足方程$x^2-1=0$的一切$x$所组成的集合，其元素只有两个：$-1$和$1$．由于它的元素的个数是有限的，我们称它是一个有限集．单位圆及其内部的点的坐标所组成的集合，可以表示为$B=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$．它的元素是无限的，我们称它是一个无限集．

### (二)子集

如果集合$A$的任何一个元素都是集合$B$的元素，那么集合$A$就叫做集合$B$的子集，表示为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$．即，若$x\in A$，必有$x\in B$，则说$A\subseteq B$．

显然，对于任何一个集合$A$，都有$A\subseteq A$．

如果$A$是$B$的子集，并且$B$中至少有一个元素不属于$A$，那么集合$A$就叫做集合$B$的真子集，表示为$A\subset B$或

$B \supset A$.

例如自然数集 $N$ 是整数集 $Z$ 的真子集，整数集是实数集 $R$ 的真子集．表示为 $N \subset Z$，$Z \subset R$.

对于集合 $A$、$B$、$C$，如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$。这是因为：对于 $A$ 的任一元素 $x$，由于 $A \subseteq B$，所以 $x \in B$，又由于 $B \subseteq C$，所以 $x \in C$。故此 $A \subseteq C$。

演绎推理中的所谓三段论，就符合此关系。

| | 法　则 | 例 |
|---|---|---|
| 大前提 | 凡 $A$ 皆是 $B$ | 高中学生是青年 |
| 小前提 | $C$ 是 $A$ | 王铭是高中学生 |
| 结　论 | $C$ 是 $B$ | 王铭是青年 |

把命题 $A$、$B$、$C$ 变成对应的集，就是

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ C \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow C \subseteq B.$$

### （三）相等

对于两个集合 $A$、$B$，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，那么集合 $A$ 和集合 $B$ 就叫做相等，表示为 $A = B$。

例如证明平面几何轨迹定理：“到两定点的距离相等的点的轨迹是连结这两点的线段的垂直平分线”，就是要证明满足此定理条件“到两定点距离相等”的点组成的集合 $A$ 与“连结这两点的线段的垂直平分线”上的点组成的集合 $B$ 相等。而要证明 $A = B$，必须证明 $A \subseteq B$ 与 $B \subseteq A$。前者即要证明“到两定点距离相等的点都在连结这两点的线段的垂直平

分线上”——完备性；后者即要证“线段垂直平分线上任意一点到线段两端的距离相等”——纯粹性。

### (四)空集与全集

不含任何元素的集合叫做空集，表示成$\phi$。

空集是唯一的，而且是每一个集合的子集。

所研究的各个集合的全部元素组成的集合叫做全集，表示成$I$。而在我们所研究的集合中，任何一个集合都是全集的子集。

### (五)有限集合元素的个数与子集数

有限集合$A$的元素个数是有限的，用$n(A)$表示。

空集不含任何元素，故$n(\phi)=0$。

我们把集合元素的个数与集合的所有可能的子集数列表如下：

| $A$ | $n(A)$ | 子集 | 子集数 |
|---|---|---|---|
| $\phi$ | 0 | $\phi$ | 1 |
| $\{a\}$ | 1 | $\phi$, $\{a\}$ | 2 |
| $\{a,b\}$ | 2 | $\phi$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ | 4 |
| $\{a,b,c\}$ | 3 | $\phi$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$ | 8 |
| $\{a,b,c,d\}$ | 4 | $\phi$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$ | 16 |

对上表作不完全归纳可得出关系：

$$\underbrace{\text{集合 } A \text{ 的所有子集数} = 2^{n(A)}}.$$

这关系式的证明要用到组合数的知识，这里从略。

## 二　集合的运算

### (一)交、并与补

由同属于 $A$ 与 $B$ 的一切元素组成的集合，叫做集合 $A$ 与 $B$ 的交集，表示为 $A\cap B$. 即，

$$x\in A \text{ 且 } x\in B \Longleftrightarrow x\in A\cap B.$$

由属于 $A$ 或者属于 $B$ 的一切元素组成的集合，叫做集合 $A$ 与 $B$ 的并集，表示为 $A\cup B$. 即，

$$x\in A \text{ 或 } x\in B \Longleftrightarrow x\in A\cup B.$$

由全集$I$中所有不属于 $A$ 的元素组成的集合，叫做集合 $A$ 的补集，表示为$\overline{A}$. 即，

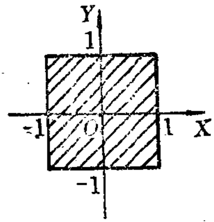
$$x\notin A\ (x\in I) \Longleftrightarrow x\in \overline{A}.$$

由补集定义，显然有$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\phi}=I$，$\overline{I}=\phi$.

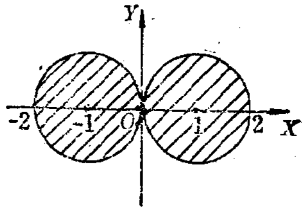
例如，把 $A=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 和 $(x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$的元素 $(x,y)$用直角坐标系中相应的点来表示，则如图1($a$)和($b$)。图1($c$)和($d$)的阴影部分分别表示 $A\cup B$ 和$A\cap B$。图1($e$) 的阴影部分(不包括两段圆弧边界)表示 $A\cap \overline{B}$.

利用各种封闭的曲线来表示集合的所谓文氏图(Venn diagrams)是帮助理解集合关系的一种有价值的直观工具。图2、3、4、5就是利用圆、矩形(通常表示全集 $I$)来表示包

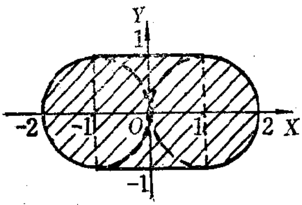
含、交、并与补的。



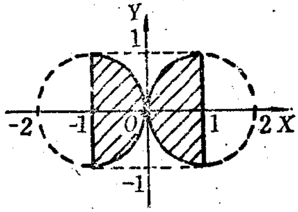
（*a*）



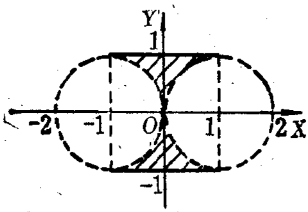
（*b*）



（*c*）

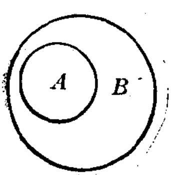


（*d*）



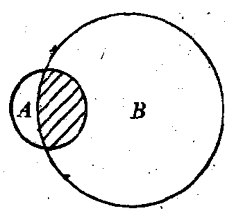
（*e*）

图 1



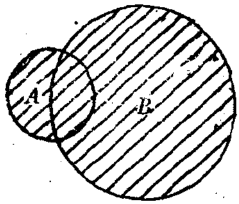

$A\subset B$

图 2



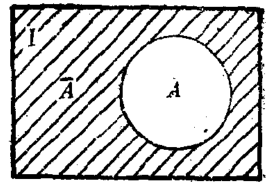

$A\cap B$

图 3




$A \cup B$

图4




$\overline{A}$

图5

## (二)交、并、补与包含、相等的关系

1.对于任意集合 $A$, $B$

$A \cap B \subseteq A$, $\quad A \cap B \subseteq B$, ①

$A \subseteq A \cup B$, $\quad B \subseteq A \cup B$. ②

这是因为，若任意的 $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \in B$，故 $A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$. 若 $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$，故 $A \subseteq A \cup B$. 同理 $B \subseteq A \cup B$.

2.下面三个关系

(1) $A \subseteq B$，(2) $A \cup B = B$，(3) $A \cap B = A$ 是等价的. 就是说，如果它们中间的任一个成立，则其余两个也成立.

**证明**：设 $A \subseteq B$ 成立. 对于任意 $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ 或 $x \in B$，而假设 $A \subseteq B$ 成立，则有 $x \in B$，所以 $A \cup B \subseteq B$. 又由②，$B \subseteq A \cup B$，故 $A \cup B = B$ 成立.

此外，因 $A \subseteq B$ 成立，对任意的 $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$，所以 $A \subseteq A \cap B$. 又由①，$A \cap B \subseteq A$，故 $A \cap B = A$ 成立.

其次，设 $A \cup B = B$ 成立，因为 $A \subseteq A \cup B$，所以 $A \subseteq B$

成立，从而 $A\cap B=A$成立。

最后，设 $A\cap B=A$ 成立，因为 $A\cap B\subseteq B$，故有 $A\subseteq B$ 成立，从而 $A\cup B=B$ 成立。

3.反演律（德·摩根(De Morgan)律）

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

**证明**：如果 $x\in\overline{A\cap B}$，则 $x\notin A\cap B$，即 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，换言之，$x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$，所以 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$。这就证明了

$$\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}.$$

反之，如果 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$，则 $x\in\overline{A}$ 或 $x\in\overline{B}$，即 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，因此 $x\notin A\cap B$，所以 $x\in\overline{A\cap B}$，这就证明了

$$\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}.$$

由此得 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

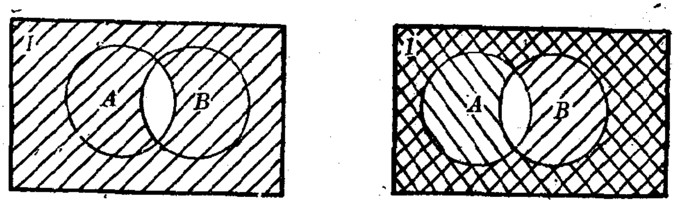



图 6

用 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别代替上式中的 $A$ 和 $B$，得到

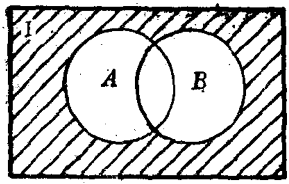
$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}},$$

即
$$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=A\cup B.$$

因为上式两边相等集合的补集也相等，所以

$$\overline{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}}=\overline{A\cup B},$$

即
$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}.$$



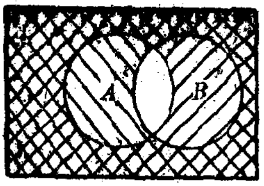



图7

例如对于命题 $ab=0$,即 $a=0$ 或 $b=0$，其意思是下列三种情况之一：

(1) $\begin{cases}a=0,\\ b\neq 0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}a\neq 0,\\ b=0;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}a=0,\\ b=0.\end{cases}$

而其否命题 $ab\neq 0$，即 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$。

这里的“或”与“且”、“等于0”与“不等于0”就是反演关系。

## 三　运算定律

(一)集合的交、并、补运算满足以下基本定律：

(1)等幂律　$A\cap A=A$，$A\cup A=A$；

(2)同一律　$A\cap I=A$，$A\cup I=I$，

$A\cap \phi=\phi$，$A\cup\phi=A$；

(3)互补律　$A\cap\overline{A}=\phi$，$A\cup\overline{A}=I$；

(4)交换律　$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

(5)结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(6)分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

上述运算定律中等幂律，同一律，互补律，交换律可以从有关定义直接推得．

对于结合律，只须注意 $(A\cap B)\cap C$ 是由 $A$、$B$ 及 $C$ 的公共元素所构成的集合，而 $A\cap(B\cap C)$也是同一个集合；$(A\cup B)\cup C$ 是由属于 $A$ 或属于 $B$ 或属于 $C$ 的元素所构成的集合，因此和 $A\cup(B\cup C)$ 是同一个集合．

交换律、结合律与分配律和代数中有关运算定律相似．但要注意代数中只有乘法对于加法的分配律，没有加法对于乘法的分配律（即 $a+bc\neq(a+b)(a+c)$），而在集合运算中既有交对于并的分配律，也有并对于交的分配律．

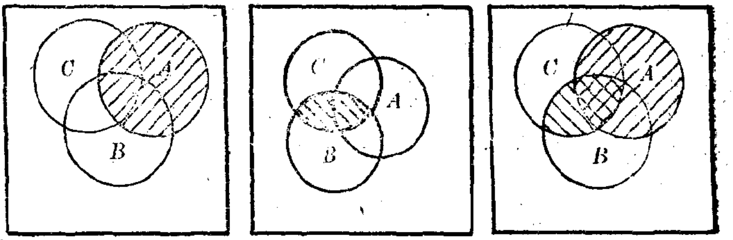
上述法则都可以利用文氏图加以验证．

例如用文氏图验证 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．下面仅举出 $A$、$B$、$C$ 间多种关系中的三种关系来加以说明：

(1)若 $A$、$B$、$C$ 两两相交，则情况如图8．

(2)若仅有两个不相交（例如 $A\cap B=\phi$），其余相交，则如图9．

(3)有一个是另一个的子集（例如$A\subseteq B$），其余不是，则如图10．



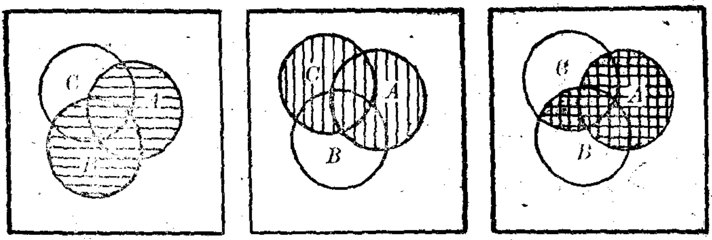



图8

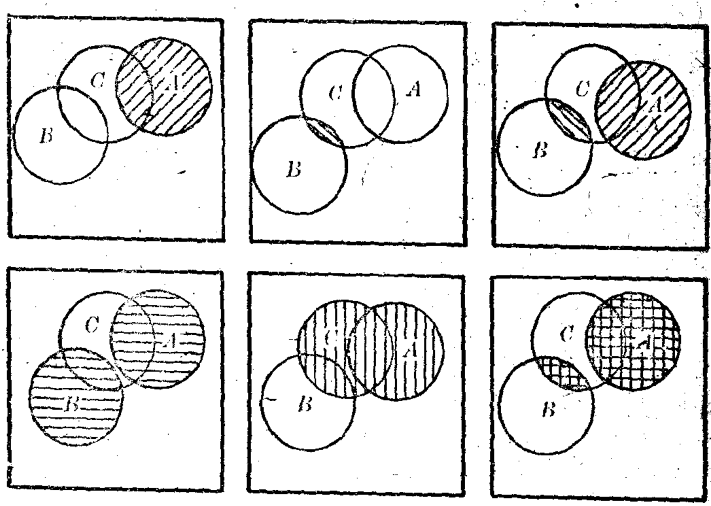



图9

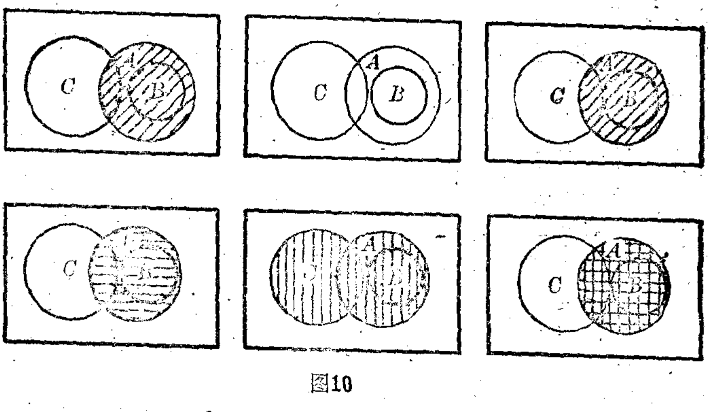



图10

这仅仅是直观的验证，还不是数学上的证明．下面我们用集合论的方法来证明

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup B).$$

**证明：**(1)先证明 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

设 $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in(B\cap C)$.

这时有且仅有两种可能性：

一种 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

另一种 $x\in B\cap C\Rightarrow x\in B$ 且 $x\in C$

$\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

这就证明了，如果 $x\in A\cup(B\cap C)$，必有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

因此 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(2)再证明 $A\cup(B\cap C)\supseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$.

这时也有且仅有两种可能性：

一种 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$.

另一种 $x\notin A$，由于 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$

$\Rightarrow x\in B$ 且 $x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cap C$

$\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$.

这就证明了，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，必有 $x\in A\cup(B\cap C)$，因此 $A\cup(B\cap C)\supseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

将(1)和(2)综合起来，便证明了结论．