〔美〕R·洪斯贝格尔 著

江嘉禾 译

数学瑰宝

第一辑

四川教育出版社

数学小品译丛

数学瑰宝

（第一辑）

〔美〕R·洪斯贝格尔 著

江嘉禾 译

李培信 胥鸣伟 校

四川教育出版社

一九八四年 成都

责任编辑：韩承训　胡师度
封面装帧：文小牛

数学小品译丛　数学瑰宝（第一辑）

四川教育出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　成都印刷一厂印刷

开本787×960毫米 1/32 印张7 插页1 字数110千
1985年1月第一版　1985年1月第一次印刷
印数：1—7,800册

书号：7344·6　定价：0.86元

内容提要

《数学小品译丛》译自美国数学协会《多尔恰尼介绍性著作》丛书，全套七集，每集收数学精品若干篇，各篇独立成章，并配有丰富的习题．该丛书文笔清新优美，叙述简洁生动，内容引人入胜，确不失为数学小品中之佳作．

这本《数学瑰宝》第一辑计收《一个古老的中国定理及费马》等十三篇小品，文中插入不少趣闻轶事，并附有相应的参考文献、阅读建议及练习选解等，以利读者学习．

本丛书特别适宜中学生及中学教师学习、参考，对于大学生及一般数学工作者也不无阅读价值．

作者为中译本写的附言

获悉《多尔恰尼丛书》中我的两卷《数学瑰宝》由译者译成中文，这实在是非常意外的事情．我为本书有了中译本殊感荣幸，欣然写出下面的简短附言，作为译本的开场白（不是用来代替本书原有的序言）．

译者希望把本书介绍给中国读者，我为此感到非常荣幸．相当初等的数学中有多少动人心弦的东西，这是值得注意的事情．这个译本里也寄托着我殷切的希望：愿读者将能揭示出数学中许多可喜的新东西．

洪斯贝格尔　1983.4.18

前　　言

美国数学协会的《多尔恰尼数学介绍性著作》丛书，是因机缘巧合而问世的.

纽约市立大学亨特学院多尔恰尼（Mary P. Dolciani）教授,本人是一位才华出众、工作热情的教师和作者，她一直在追求数学讲解工作中理想的上乘境界.

与此同时，协会已经获得本书的手稿，这是一卷短文集子，似乎并不完全适宜于收入协会现有的任何丛书，但是手稿内容引人入胜，文风清新，显然是值得出版的.

后来，水到渠成，多尔恰尼教授决定设立一笔周转资金来创办这套《数学介绍性著作》丛书，藉以实现她的目的.

本丛书的选题既要求清新的口语风格，也要求引人入胜的数学内容. 预期，各卷都有丰富的习题. 很多卷还附有解答. 因此，这套丛书将能提供有价值的丰富材料，尤其是综述性课题的材料. 我们设想，这套丛书是有数学才能的中学生可以看懂的，但水平更高的数学工作者也不能对此掉以轻心.

美国数学协会当然乐于接受多尔恰尼教授设置这套丛书的慷慨馈赠．她既是协会出版委员会的委员，又是管理委员会的委员，为协会服务，成绩斐然．管理委员会真诚愉快地决定将这套丛书冠以她的名字，以示敬意．

美国数学协会出版委员会主席

贝肯巴赫

(Edwin F. Beckenbach)

序　　言

本书介绍初等数学中十三个专题．各章都有单一的主题，至少讲到一件数学上的瑰宝之作．介绍这些专题，是希望读者能够领略到初等数学中某些最优美发现的那种令人心花怒放的感情．

把数学同音乐相比，往往是很合适的：蹩脚的演奏会把最迷人的音乐搞得一团糟；同样拘泥于呆板的合乎程式的讲解，也会把很多光彩夺目的数学思想弄得黯然失色．本书是想使读者陶醉于某些数学精品的极妙的意境之中．我讲解这些作品总是尽力使读者能够循序渐进，赏心悦目，而不致垂头丧气．

不管读者水平如何，必须有适当的底子，才能轻松愉快地读下去．说一个主题是初等的，不一定就是说它容易或者简单．就本书大部分内容而言，除了中学数学以外，读者不需要具备什么专门知识，只假定读者熟悉二项式定理、数学归纳法以及算术同余式．然而，对于许多刚从中学毕业的大学生说来，这本书不见得很容易读，要有一定程度的数学修养，有时还需要相当仔细的思考．我们希

望，本书对于中学教师以及未来的教师将会具有特别的意义．

各篇文章实际上是独立成章的，可以按任何次序来读．每章末尾都附有练习、参考文献以及进一步阅读的建议．读者应该仔细考虑那些练习，因为其中安排有某些极好的问题．

我想借此机会感谢博厄斯（Ralph Boas）博士．他对本书的审阅使本书产生了许多重大的改变．我还想感谢四位同事：默蒂（U．S．R．Murty）博士协助撰写了“柯泽勒夫—格林贝格关于哈密尔顿回路的理论”一章，密勒（Fred Miller）、舍伦贝格（Paul Schellenberg）博士以及安得森（Ed Anderson）评阅了本书部分手稿．最后，我感谢厄尔迪什（Paul Erdös）教授指出了几处不确切的叙述，提供了各种有益的评论和建议．

洪斯贝格尔（Ross Honsberger）

于滑铁卢大学

目　　录

一、一个古老的中国定理及费马

1. **费马小定理** 法国数论大师费马（Pierre de Fermat）1640 年致贝斯（Bernard Frenicle de Bessy）书中不加证明地提出了下列定理：

若 p 是素数，a 是任何整数，则 a^p-a 被 p 整除①.

例如，23 是素数，所以 $a^{23}-a$ 被 23 整除，不管 a 是什么数（正，负或零）．费马声称他是有证明的，但是并没有把证明写在信里．第一个公开发表的证明属于欧拉（Euler），那几乎是一百年以后的事了，虽然有证据说明莱布尼兹（Leibniz）大约在 1683 年就得到证明了．由此可见，要想得到一个容易的证明，那是近乎奢望．因此，如果告诉你这个定理可以只用二项式定理和数学归纳法直接加以证明，这肯定是你意想不到的．由于这个证明相当吸引人，而这个定理又是如此基本，所以稍费笔墨把它捋一遍．

让 p 表示素数．当 $a=0$ 及 $a=1$ 时，a^p-a 的

① 费马实际上提出的是一个等价的定理：若 p 是素数，则对任何与 p 互素的整数 a 而言，p 整除 $a^{p-1}-1$．——原注．

值是零，可以被 p 整除．让我们先考虑 a 是正数的情形，用归纳法进行．

假设命题对某个正整数 a 成立，即是 p 整除 a^p-a，我们来证明命题对 $a+1$ 这个值也成立，即是

$$(a+1)^p-(a+1) \text{ 被 } p \text{ 整除．}$$

二项式定理给出

$$(a+1)^p$$
$$=a^p+C_p^1a^{p-1}+C_p^2a^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}a+1,$$ ①

移项得

(1) $$(a+1)^p-a^p-1$$
$$=C_p^1a^{p-1}+C_p^2a^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}a.$$

我们发现，等式右端每个系数 C_p^k，$k=1,2,\cdots,p-1$，都可被素数 p 整除．事实上，考虑 C_p^k 本身的定义，即

$$C_p^kk!=p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1),$$

这里 p 整除右端，所以它也必定整除左端；但就所涉及的所有系数而言，k 的值都小于 p，所以素因子 p 不可能出现在乘积 $k!$ 中．因此，p 必须整除 C_p^k．

因为 p 整除上面的等式（1）右端每个系数，所以它必定整除整个右端，从而它也整除左端，即整除 $(a+1)^p-a^p-1$．再把这个事实和 p 整除 a^p-a

①这里的 C_p^k 原文作 $\binom{p}{k}$，今用通用记号，下仿此．——译注．

这个归纳假设结合起来，我们看出，p 整除和式

$$\left[(a+1)^p-a^p-1\right]+\left[a^p-a\right]$$
$$=(a+1)^p-(a+1),$$

这就是所要证明的．于是，按照归纳法，命题对所有正整数 a 成立．

现在考虑 a 的负值，把证明做完．让我们把所说的负值记为 $-a$，所以 a 本身表示一个正整数．如果素数 p 是 2，我们有

$$(-a)^p-(-a)=(-a)^2-(-a)$$
$$=a^2+a=a(a+1).$$

这里，因于 a 和 $(a+1)$ 是相邻的整数，所以其中有一个是偶数，它们的乘积可以被 2 整除．如果 p 是奇素数，我们有

$$(-a)^p-(-a)=-a^p+a=-(a^p-a).$$

由于 a 是正整数，我们已经知道 p 整除 a^p-a，所以它也整除 $-(a^p-a)$．

2．一个古老的中国定理　当 $a=2$ 时，费马定理说，若 p 是素数，则 2^p-2 可以被 p 整除．自然可以问一下逆定理的情形如何：

若正整数 $n>1$ 且整除 2^n-2，则 n 是否为素数？

中国人曾经对 n 的许多值检验过这个命题，在 2500 年前就断定说，答案是“肯定”的．现代的计算也曾证实，当 $1<n<300$ 时，整除 2^n-2 的那些 n 的值都是素数．

可是，不难验证，这个古老的中国定理是不对的．数 $n=341$ 提供了一个反例． 341 是 11 乘 31，不是素数，但它却整除 $2^{341}-2$．为了推出这个事实，我们利用一个熟知的结果：对任何正整数 m，x^m-y^m 具有因子 $x-y$．我们有

$$\begin{aligned}2^{341}-2&=2(2^{340}-1)=2[(2^{10})^{34}-1^{34}]\\&=2[(2^{10}-1)(\cdots)]=2[(1023)(\cdots)]\\&=2[3(341)(\cdots)].\end{aligned}$$

象 341 这样的整数 n，不是素数，但却整除 2^n-2，就叫做**假素数**．

于是，就发生了和假素数有关的一些问题：341 是否是唯一的假素数？是否有无穷多的假素数？结果，对于每个奇假素数，都有一个更大的奇假素数（见练习 6）．因此，从一个奇假素数 341 出发，就可以产生无穷多的奇假素数．

其次，曾经考虑过是否存在偶假素数的问题．只是在 1950 年美国人雷默尔（D. H. Lehmer）才发现了假素数 161038．尽管发现这个假素数是很困难的，但却容易看出 161038 是假素数． 161038 的素因子分解是 (2)(73)(1103)，由于

$$2^{161038}-2=2(2^{161037}-1),$$

我们只须证明，73 和 1103 都整除 $2^{161037}-1$．

由于 161037 有素因子分解 $(3^2)(29)(617)$，所以

$$2^{161037}-1=(2^9)^{(29)(617)}-1^{(29)(617)}$$

$$=(2^9-1)(\cdots)=(511)(\cdots)=7(73)(\cdots),$$

这就表明上式被 73 整除. 同样，我们有

$$2^{161037}-1=(2^{29})^{(9)(617)}-1^{(9)(617)}$$

$$=(2^{29}-1)(\cdots)=1103(486737)(\cdots),$$

这就表明 1103 也是一个因子. 由于 73 和1103 都是素数，其中一个可以整除并不影响另一个是否可以整除，所以它们的乘积可以整除 $2^{161037}-1$. ① 这样一来，161038 是一个偶假素数.

1951 年，阿姆斯特丹（Amsterdam）的比格尔（N. G. W. H. Beeger）证明了偶假素数也有无穷多.

3. 最极端的假素数 整除 2^n-2 的合成数 n 是假素数. 整除3^n-3 或 4^n-4等等的合成数 n，我们认为，也具有某种假素数的性质. 一个合成数 n 如果整除 2^n-2，3^n-3，4^n-4，…以及对**任何整数** a，即使是负整数，也整除 a^n-a，肯定是这方面最极端的情形，称为**绝对假素数**.

现在你自然很想知道，是否存在什么绝对假素数. 答案是“存在”. 最小的一个是 561. 这就是说，561是一个合成数，而 $a^{561}-a$ 可以被 561 整除，不论 a 是什么整数. 这是不难证明的，直接从费马

①这里原文是“这两个数都能整除 $2^{161037}-1$”. ——译注.

小定理推出.

561的素因子分解是 (3)(11)(17). 我们必须证明: $a^{561}-a$ 可以被这三个素数的每一个整除. 我们有

$$a^{561}-a=a(a^{560}-1)=a[(a^{10})^{56}-1^{56}]$$
$$=a[(a^{10}-1)(\cdots)]=(a^{11}-a)(\cdots).$$

但是据费马定理, $a^{11}-a$ 可被11整除, 因为11是素数. 于是, 11整除 $a^{561}-a$. 同样可以证明3和17也都是因子.

另外几个绝对假素数是:

(1) $2821=(7)(13)(31)$;

(2) $10585=(5)(29)(73)$;

(3) $15841=(7)(31)(73)$.

现在还不知道是否存在无限多的绝对假素数.

4. 费马数 数 $F_n=2^{(2^n)}+1$, $n=0, 1, 2, \cdots$, 称为**费马数**. 头几个是

$$F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537,$$
$$F_5=2^{(2^5)}+1=2^{32}+1=4294967297.$$

从费马的时代开始就陆续发现, F_0, F_1, F_2, F_3 和 F_4 都是素数. 要判定任何更大的费马数是素数还是合成数,并非易事. 不过,费马曾经宣称, 所有的 F_n 都是素数, 他承认他并未得到任何实际上的证明, 但他断然声称, 他对此是确信无疑的. 很可能, 费马听说过那个古老的中国定理,并且信以为真,因

为不难证明每个 F_n 都整除 $2^{F_n}-2$. 我们可以着手证明如下.

由于头几个费马数已知都是素数，所以就这些费马数而言，结论直接从费马小定理推出，我们只须考虑 $n=5,6,7,\cdots$ 即可. 对于 n 的这些值，由归纳法容易推出 $n+1<2^n$，从而 2^{n+1} 整除 $2^{(2^n)}$. 于是，存在一个整数 k，使得 $2^{(2^n)}=2^{n+1}\cdot k$. 因此

$$
\begin{aligned}
2^{F_n}-2&=2^{(2^{(2^n)}+1)}-2=2[2^{(2^{(2^n)})}-1]\\
&=2[2^{(2^{n+1}\cdot k)}-1]=2[(2^{(2^{n+1})})^k-1^k]\\
&=2[(2^{(2^{n+1})}-1)(\cdots)]=2\{[(2^{(2^n)})^2-1^2](\cdots)\}\\
&=2[(2^{(2^n)}+1)(2^{(2^n)}-1)(\cdots)]\\
&=2[(F_n)(2^{(2^n)}-1)(\cdots)].
\end{aligned}
$$

这样就可以理解为什么费马声称所有的 F_n 都是素数了.

目前，已经确定了 49 个费马数的性质，其中除了到 F_4 为止的那些数以外，每一个都是合成数①. 早在 1732 年就知道费马不对了：那一年欧拉证明了 F_5 可被 641 整除. 下面的吕卡定理属于初等数

---

①迄今尚未发现 F_4 以后的任何费马数是素数. 费马猜测不对似乎有损于他作为数论大师的声誉，但他提出这个猜测还是有道理的，因为一个半世纪以后，年轻的高斯 (Gauss) 证明了：只要 n 是费马素数，就可以用圆规直尺作正 n 边形. 高斯还提出了逆命题，是由万泽尔 (Wantzel) 证明的：正 n 边形可以用圆规直尺作图的必要条件是 $n=2^k p_1\cdots p_m$，这里 $k\geq 0$，诸 p_i 是不同的费马素数. ——译注.