

高等院校计算机专业教育改革推荐教材

计算机图形学

张全伙 张剑达 编著

91.4



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



7-89.4
8293

高等院校计算机专业教育改革推荐教材

计 算 机 图 形 学

张全伙 张剑达 编著



机械工业出版社

本书共分 11 章。考虑到内容的相对独立性和系统性,分为两篇。第 1 篇为计算机图形学的数学基础,包括图形变换、投影变换以及曲线和曲面的构造等内容。第 2 篇为计算机图形学的算法基础,首先简要介绍了图形学与相关学科的关系,图形学的发展与应用以及图形设备等,然后系统地介绍了光栅扫描原理、基本图形生成、区域填充、二维和三维裁剪、消隐算法,以及真实感图形绘制所涉及的光照模型、透明效果、阴影显示、纹理映射、颜色模型等。在附录中介绍了 Turbo C 绘图函数,并给出了两个绘图实例。本书注重理论与实践的结合,对各种数学方法和算法描述详细,并列举了大量例子。全书内容充实、结构严谨、语言流畅、图文并茂,紧跟学科发展动态与趋势。

本书既可作为中、高年级本科生或一年级研究生的计算机图形学课程教科书,也可作为专业程序员、工程技术人员和相关课程教师的参考书,特别适合于各种水平的人员进行自学。

图书在版编目(CIP)数据

计算机图形学/张全伙,张剑达编著. —北京:机械工业出版社,2003.8

高等院校计算机专业教育改革推荐教材

ISBN 7-111-12849-4

I. 计... II. ①张...②张... III. 计算机图形学—高等学校—教材

IV. TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 069550 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策 划:胡毓坚

责任编辑:周艳娟 陈振虹

责任印制:路 琳

北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·19.5 印张·484 千字

0001—5000 册

定价:27.00 元

凡购本图书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

高等院校计算机专业教育改革推荐教材

编委会成员名单

主 编 刘大有

副主编 王元元

编 委 （按姓氏笔画排序）

李师贤 刘晓明 张桂芸 徐汀荣

耿亦兵 黄国兴 顾军华 薛永生

编者的话

计算机科学技术日新月异的飞速发展和计算机科学技术专业教育的相对滞后,已是不争的事实。

有两个发人深省的现象:一是,由于非计算机专业的学生既具有一门非计算机专业的专业知识,又具有越来越高的计算机应用技术水平,从而使计算机专业的学生感受到一种强烈的冲击和压力;二是,创建软件学院的工作已有近两年的历史,但软件学院的计算机专业教育的定位仍在探讨之中。

我们认为计算机科学与技术专业(以下简称计算机专业)教育的改革势在必行,正确认识和划分计算机专业教育的层次,对该专业的教育改革无疑是一个非常重要的问题。我国的计算机专业教育主要分三个层次。一般说来,这三个层次通常分布在以下三类高等院校:

第一层次主要以具有计算机一级学科博士学位授予权的教育部属重点高等院校为代表(包括具有两个博士点的大学)。这一类大学本科着重培养理论基础比较坚实、技术掌握熟练、有一定研究和开发能力的计算机专业学科型人才,其中部分学生(约本科生的 10%)可攻读博士学位。

第二层次主要以具有一个计算机二级学科专业博士点的教育部属高等院校为代表。这一类高等院校本科着重培养有一定的理论基础、技术掌握比较熟练、有一定的研究或开发能力的计算机专业人才,其中一部分培养成学科型人才,另一部分培养成应用型人才,一小部分学生(约本科生的 5%)可攻读博士学位。

第三层次主要以具有计算机二级学科专业硕士点的省属高等院校为代表。这一类高等院校本科面向企业应用,侧重培养对计算机技术或部分计算机技术掌握比较熟练,有一定的开发、应用能力的计算机专业应用型人才,其中很小一部分学生(约本科生的 2.5%)可攻读博士学位。

国家教育部、计委批准的或省教育厅批准的示范性软件学院,就其培养目标和办学特色而言,分别与第二层次中应用型人才培养部分以及第三层次比较相近,但在如下方面有所不同:将软件工程课程作为专业教学重点;更加强调英语教学,更加重视实践能力培养,并对两者有更高的要求。

我们本着对高等院校的计算机专业状况的认识,主要面向与上述第二、第三两个层次对应的院校及与之相近的软件学院,总结多年的计算机专业的教改经验,在一定程度上溶入了 ACM& IEEE CC2001 和 CCC2002(中国计算机科学与技术学科教程)的教改思路,组织我国一直投身于计算机教学和科研的教师,编写了这套“高等院校计算机专业教育改革推荐教材”(以下简称“推荐教材”)。自然,“推荐教材”中所贯穿的改革思路和做法,也是针对上述第二、第三两个层次对应院校的计算机专业学生。这些思路和做法可概括成以下三句话:

- 适度调整电子技术基础、计算机理论基础和系统软件的教学内容。
- 全面强化计算机工具软件、应用软件的教学要求。
- 以应用为目标大力展开软件工程的教学与实践。

电子技术基础、计算机理论基础、系统软件教学关系到学生的基本素质、发展潜力和日

后的应变能力。“推荐教材”在调整它们的教学内容时的做法是：适度压缩电子线路、数字电路和信号系统的教学内容，变三门课程为两门，并插入数字信号处理的基础内容；合并“计算机组成原理”、“微型计算机接口技术”和“汇编语言”为“计算机硬件技术基础”一门课程；注意适当放宽“离散数学”课程的知识面，使之与 CCC2002 的要求基本接轨，但适度降低其深度要求；更新系统软件课程的教学内容，以开放代码的 Linux 作为操作系统原理的讲授载体，更加关注系统软件的实践性和实用性。

为了提高计算机专业人才的计算机应用能力，全面强化计算机工具软件、实用软件的教学要求是十分重要的，这也是上述改革思路的核心。为此，“系列教材”的做法是：强化程序设计技术，强化人机接口技术，强化网络应用技术。

为强化程序设计技术，“推荐教材”支持在单片机环境、微机平台、网络平台的编程训练；支持运用程序设计语言、程序设计工具以及分布式对象技术的编程训练。大大加强面向对象程序设计课程的组合（设计了三门课程：面向对象的程序设计语言 C++，面向对象的程序设计语言 JAVA 和分布式对象技术），方便教师和读者的选择。

为强化人机接口技术，“推荐教材”设计了“人机交互教程”，“计算机图形学”和“多媒体应用技术”等可供选择的、有层次特色的课程组合。

为强化网络应用技术，“推荐教材”设计了“计算机网络技术”，“计算机网络程序设计”，“计算机网络实验教程”和“因特网技术及其应用”等可供选择的、新颖丰富的课程组合。

将软件工程课程作为专业教学重点，以应用为目标大力展开软件工程的教学与实践，是“推荐教材”改革思路的又一亮点。为改变以往软件工程课程纸上谈兵的老毛病，“推荐教材”从工程应用出发，理论联系实际，突出建模语言及其实现工具的运用，设计了“软件工程的方法与实践”，“统一建模语言 UML 导论”和“ROSE 对象建模方法与技术”等可供选择的、创新独特的软件工程课程组合。对于各类软件学院，“推荐教材”的这一特色无疑是很有吸引力的。

强调实践也是计算机学科永恒的主题，对计算机应用专业的学生来说更是如此。重应用和重实践是“推荐教材”的一个整体特点。这一特点，一方面有利于解决本文开始所指出的计算机专业学生较之非计算机专业学生，在应用开发工作中上手慢的问题；另一方面，使计算机专业的学生能在更大范围内、更高层面上掌握计算机应用技术。这一特点正是许多高等院校计算机专业教育改革追求的一个目标，也是国家教育部倡导软件学院的初衷之一。

“推荐教材”由基础知识、程序设计、应用技术、软件工程和实践环节等五个模块组成。各模块有其对应的培养目标与功能，从而构架出一个创新的、完整的计算机应用专业的课程体系。模块化的设计，使各学校可根据学生及学校的特点作自由的选择和组合，既能达到本专业的总体要求，又能体现具有特色的个性发展。整套教材的改革脉络清晰，结构特色鲜明，值得各高等院校在改革教学内容、编制教学计划、挑选教材书目时借鉴和参考。当然，很多书目也适合很多相关学科的计算机课程用作教材。

“推荐教材”的组成模块和书目详见封底。显然它不能说是完备的（实践环节模块更是如此），其改革的思路、改革的举措也可能有值得探讨的地方。我们衷心希望得到计算机教育界同仁和广大读者的批评指正。

前 言

计算机图形学是一门理论性和实践性都很强的专业基础课,它作为一门独立的学科,经历了大约 40 年的发展,现在已经很成熟了。今天,计算机图形学与我们的日常生活、学习、工作和生产息息相关,紧密地结合在一起。它所涉及的领域遍及工程、科学、教育、医学、军事、航空、办公、广告、娱乐等等。然而,我们说这个学科成熟,并不是说计算机图形学的发展已经到了尽头,它仍有许多研究热点和新的领域等待人们去探索,可以断言,随着计算机图形学研究和应用的不断深入和发展,它的前景将更加美好和诱人,作为一门学科,它将更加受到关注和青睐。

作者积十余年《计算机图形学》之教学经验,深切体会到本课程应以计算机图形学的数学基础和计算机图形学的算法基础为主要内容。正是基于这种考虑,将本书分为两篇。第 1 篇为计算机图形学的数学基础,内容包括预备知识、图形几何变换、形体的投影变换,曲线和曲面。第 2 篇为计算机图形学的算法基础,主要内容包括引论、图形设备、光栅扫描图形学、裁剪、隐藏线和隐藏面消除以及真实感图形绘制。

本书是作者在总结长期教学工作的基础上,参考了国内外大量同类教材,博采众长,并融入了作者的一些教学和科研成果编写而成的。本书具有以下特点:

- 本书两篇自成体系,有利于根据不同学历层次的需求和接受能力选择教学内容,也可以作为两门课程单独开设。
- 本书在对每一重要数学方法和问题进行系统讨论之后,一般都给出详细的算法和算法的跟踪实例或这种数学方法的应用实例。书中介绍的算法采用三种方法来描述。第一种是详细算法的过程描述;第二种是更形式化的类 C 语言描述;第三种是流程图语言描述。
- 书中每章均配有习题。考虑到本课程理论与实践结合的重要性,在每章习题中都精心配置了部分适宜编程上机的实习题。
- 本书最后提供了一个附录。在附录中给出了两个绘图程序实例,并介绍了 Turbo C 绘图软件包,帮助学生了解怎样进入图形方式和一个图形程序的基本结构,以便于上机实践。

本书应以高等数学、线性代数和高级程序设计语言为先导课程,如果有一定的数据结构知识则更好,但这不是必须的。值得强调的是,矢量和矩阵方法是计算机图形学最有力的数学工具,而深刻理解光栅扫描原理和实现技术是学好第 2 篇内容的关键。

本书可作为中、高年级本科生或一年级研究生的计算机图形学课程的教材。作为本科生教材时第 1 篇中的曲线和曲面两章可以不讲。作为研究生教材时,第 1 篇中曲线和曲面两章必须讲授,因为它是几何造型和 CAD 技术的有用数学工具。而第 2 篇的重点应放在真实感图形的绘制。根据作者长期讲授本课程的体会,为本科生开设时建议按以下顺序来组织教学。先讲第 2 篇第 6、7 章,紧接着简单介绍附录中的 Turbo C 绘图软件包和绘图实例;然后讲授第 1 篇中的第 1、2、3 章;最后讲授第 2 篇中的第 8~11 章。当然,根据课时安排还可对

各章中的某些小节适当取舍。

本书也可作为专业程序员、工程技术人员和相关课程教师的参考书。特别值得一提的是，书中详细的数学方法和算法以及相当数量的实用例题使本书特别适合各种水平的人员进行自学。

在本书脱稿之际，作者有一种如释重负的轻松感觉。作者深知，如果没有他人的帮助，要完成这一本书是不可能的。首先我们要衷心感谢厦门大学薛永生教授的大力支持和热情鼓励；感谢研究生骆炎民、丁正刚、范建中和胡业江，他们为本书收集了一些有价值的参考资料，感谢我校文印社的吴美云为本书作了大量的录入工作。此外，还有许多给我们以鼓励、支持、帮助的同事、朋友，在此一并表示致谢。

由于时间仓促，加上水平所限，本书谬误之处在所难免，恳请批评指正。

作 者

目 录

编者的话

前言

第 1 篇 计算机图形学的数学基础

第 1 章 预备知识	1
1.1 所用数学方法	1
1.1.1 矢量及其运算	1
1.1.2 矩阵方法	3
1.1.3 行列式	6
1.2 显式方程和隐式方程	7
1.3 参数方程	8
1.4 坐标系	9
1.5 习题	12
第 2 章 图形几何变换	13
2.1 齐次坐标	13
2.2 窗口区视图区变换	14
2.3 二维图形变形	16
2.4 三维图形变换	20
2.5 习题	26
第 3 章 形体的投影变换	27
3.1 概述	27
3.2 平行投影	28
3.2.1 正平行投影	28
3.2.2 正轴测投影	30
3.2.3 斜平行投影	32
3.3 透视投影	34
3.3.1 透视投影的几何元素与形成规律	34
3.3.2 一点透视	36
3.3.3 二点透视	38
3.3.4 三点透视	40
3.4 透视图的绘制	41
3.5 习题	44
第 4 章 曲线	46
4.1 引言	46

4.2	曲线的代数形式和几何形式	47
4.3	切矢	49
4.4	曲线的参数空间	50
4.5	调和函数	51
4.6	重新参数化	53
4.7	截取、延伸和分割	55
4.8	空间曲线	56
4.9	四点形式	57
4.10	组合曲线	59
4.10.1	组合曲线的概念与几何系数矩阵	59
4.10.2	组合曲线的连续性条件	59
4.11	样条曲线	60
4.11.1	三次样条曲线的力学背景	60
4.11.2	用二阶导数表示的三次样条函数	61
4.12	Bezier 曲线	61
4.13	B 样条曲线	70
4.14	三次参数曲线的等价表示	79
4.15	习题	80
第 5 章	曲面	83
5.1	参数曲面的定义及引例	83
5.2	曲线的代数形式和几何形式	84
5.3	切矢、扭矢和法矢	88
5.4	调和函数	90
5.5	曲面片的重新参数化	90
5.6	分割	92
5.7	平面、柱面和直纹面	93
5.8	旋转曲面	95
5.9	Coons 曲面	96
5.10	Bezier 曲面及其拼合	99
5.10.1	Bezier 曲面	99
5.10.2	Bezier 曲面与 Ferguson 曲面的等价性	100
5.10.3	Bezier 曲面的拼合	101
5.11	B 样条曲面	103
5.12	习题	106

第 2 篇 计算机图形学的算法基础

第 6 章	引论	109
6.1	计算机图形学、图像处理和模式识别	109
6.2	计算机图形学概述	110

6.3 计算机图形学的发展	111
6.3.1 计算机图形学的确立与硬件的发展	111
6.3.2 计算机图形学软件与算法的发展	113
6.3.3 计算机图形学的若干研究热点与发展趋势	114
6.4 计算机图形学的应用	115
6.5 习题	116
第7章 图形设备	118
7.1 图形输入设备	118
7.1.1 逻辑交互设备	118
7.1.2 物理交互设备	119
7.1.3 数据生成设备	120
7.2 图形显示设备	121
7.2.1 阴极射线管基础	121
7.2.2 彩色 CRT 光栅扫描基础	122
7.2.3 存储管式图形显示器	122
7.2.4 随机扫描图形显示器	122
7.2.5 光栅扫描刷新图形显示器	123
7.2.6 平板显示器	127
7.3 硬拷贝输出设备	128
7.3.1 笔式绘图仪	128
7.3.2 打印机	128
7.4 习题	129
第8章 光栅扫描图形学	131
8.1 直线生成算法	131
8.1.1 数字微分分析法	131
8.1.2 Bresenham 画直线算法	133
8.1.3 整数 Bresenham 算法	134
8.1.4 一般 Bresenham 算法	135
8.2 圆与椭圆的生成算法	137
8.2.1 Bresenham 画圆算法	137
8.2.2 椭圆的生成	140
8.3 实区域的扫描转换	143
8.3.1 点位于多边形内部的判定	143
8.3.2 多边形填充	145
8.3.3 多边形的扫描转换	145
8.3.4 简单有序边表算法	147
8.3.5 更有效的有序边表算法	148
8.3.6 采用活化边表的有序边表算法	149
8.3.7 边填充算法	150

8.3.8 栅栏填充算法	151
8.3.9 边标志算法	152
8.4 区域填充	153
8.4.1 简单的种子填充算法	155
8.4.2 扫描线种子填充算法	156
8.5 帧缓冲器与光栅的寻址	158
8.5.1 帧缓冲器	158
8.5.2 光栅的寻址	160
8.6 线段显示和字符显示	161
8.6.1 线段显示	161
8.6.2 字符显示	162
8.7 图形反走样基础	163
8.7.1 过取样	164
8.7.2 简单的区域反走样算法	164
8.8 习题	166
第 9 章 裁剪	168
9.1 二维裁剪	168
9.1.1 Cohen-Sutherland 端点编码算法	169
9.1.2 中点分割算法	172
9.1.3 凸多边形窗口的 Cyrus-Beck 线裁剪算法	173
9.1.4 Liang-Barsky 二维裁剪算法	175
9.1.5 内裁剪和外裁剪	179
9.1.6 凸多边形的判定和内法线的确定	179
9.1.7 凹多边形的分割算法	181
9.1.8 多边形裁剪	182
9.1.9 Sutherland-Hodgman 逐次多边形裁剪算法	183
9.1.10 Weiler-Atherton 多边形裁剪算法	188
9.1.11 字符裁剪	192
9.2 三维裁剪	193
9.2.1 推广的 Cohen-Sutherland 端点编码算法	193
9.2.2 三维中点分割算法	195
9.2.3 三维 Cyrus-Beck 算法	196
9.2.4 Liang-Barsky 三维裁剪	198
9.2.5 坐标裁剪	201
9.3 习题	204
第 10 章 隐藏线和隐藏面	206
10.1 问题的提出	206
10.2 Roberts 算法	207
10.2.1 平面方程与体矩阵	207

10.2.2	体矩阵的坐标变换与运算	210
10.2.3	自隐藏面	211
10.2.4	凸多面体对线段的遮挡	212
10.3	Z 缓冲器算法	218
10.4	画家算法	220
10.5	扫描线算法	221
10.5.1	扫描线 Z 缓冲器算法	222
10.5.2	区间扫描线算法	223
10.6	可见面光线追踪算法	225
10.7	浮动水平线算法	227
10.8	习题	231
第 11 章	真实感图像绘制	233
11.1	一个简单的光照模型	233
11.2	基于简单光照模型的多边形绘制	236
11.2.1	恒定光强的多边形绘制	236
11.2.2	Gouraud 明暗处理	236
11.2.3	Phong 明暗处理	238
11.3	透明处理	241
11.4	阴影显示	242
11.5	物体的纹理显示	245
11.5.1	颜色纹理的显示	245
11.5.2	凹凸纹理的显示	247
11.6	整体光照模型与光线跟踪	248
11.6.1	整体光照模型	248
11.6.2	Whitted 整体光照模型	249
11.6.3	光线追踪算法	250
11.7	颜色	252
11.7.1	色度与三刺激理论	252
11.7.2	原色混合系统与颜色匹配实验	253
11.7.3	色度图和 1931CIE 色度图	254
11.7.4	颜色系统之间的转换	258
11.7.5	几种颜色系统	260
11.8	习题	265
附录		267
附录 A	Turbo C 绘图软件包	267
附录 B	Turbo C 绘图程序实例	296
参考文献		300

第 1 篇 计算机图形学的数学基础

第 1 章 预 备 知 识

1.1 所用数学方法

在研究计算机图形学，特别是几何造型时，将要使用几种重要的数学方法。它们是：线性代数、矢量、矩阵方法、行列式、集合论、多项式插值和数值逼近。

矢量也许是其中最重要的数学手段。与经典的解析几何相比，矢量对特殊坐标系的依赖性可减少到最低程度。矢量运算可使工程技术人员容易地决定正交性和平行性。这些运算是代数运算，但保留了矢量长度和方向等内在的几何意义。矢量方程是同时处理几个分量的方程，这也是它的独特优点之一。

矩阵方法也是有力的数学工具。构成矩阵的数组能够简单地表示某个问题所存储的有序的一组数，或多项式的一组系数。矩阵代数法则定义了对这些数组所容许的运算。作为算子是矩阵的另一用途。矩阵通过定义一组点的位置矢量作运算以实施这组点的几何变换。矩阵作为算子是大多数几何造型计算的基础。

因为许多运算和表达式中常遇到行列式，对其特殊性也应有所了解。

研究表明，大量实际的数值分析依赖于称为数值插值的方法。例如，一条直线能够用它所通过的两个点来定义，一条二次曲线通过三个点、一条三次曲线通过四个点来定义，等等。它们的方程都可用多项式表示。因为多项式的求值、微分都很容易，而且只要应用有限次加、减和乘的基本算术运算就可实现。因此，多项式插值是很有用的。 n 次多项式函数形如

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (1-1)$$

多项式插值对于插值点的选取甚为灵敏。我们可用一系列低次多项式曲线来拟合一系列型值点组，从而构成一条组合曲线。这种分段多项式可避免对局部的性质的全局依赖性。

考虑到所用的算法都是在无限精确度和容量的理想计算机上进行处理的，因此数值分析也是必要的。

1.1.1 矢量及其运算

矢量是有方向和长度的量。在记号上常用小写黑体字母表示一个矢量。在图形上用箭头表示。矢量遵从下面的法则。

- (1) 零矢量：长度为 0 的矢量，记作 0（它的方向不确定）。
- (2) 相等：长度和方向相同的两个矢量。

(3) 加法: 两矢量 a 和 b , 它们的和 $a+b$ 在图形上是用连接 a 的箭头与 b 的箭尾的矢量来定义的, 从 a 的箭尾到 b 的箭头的线段就是和 $a+b$ 。

(4) 负矢量: 矢量 $-a$ 与矢量 a 长度相同, 但方向相反。

(5) 减法: 根据法则 3 和 4, 定义 $a-b=a+(-b)$ 。

(6) 数乘: 矢量 ka 与 a 有相同的方向, 而长度是 a 的 k 倍。 k 为大于 0 的实数。

(7) 矢量的长度: 已知 p_x 、 p_y 和 p_z 是矢量 p 的数量分量, 则矢量 p 的长度是

$$|p| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (1-2)$$

(8) 单位矢量: 矢量 p 的单位矢量 n 是 $n = \frac{p}{|p|}$, n 的分量也是矢量 p 的几个方向余弦。

(9) 数量积 (又叫点积): 两矢量 p 和 r , 它们的数量积具有以下性质:

$$1) \quad p \cdot r = p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z = |p||r|\cos\theta \quad (1-3)$$

矢量 p 和 r 的夹角 θ 可由下式计算

$$\cos\theta = \frac{p \cdot r}{|p||r|} \quad (1-4)$$

$$2) \quad p \cdot p = |p|^2$$

$$3) \quad p \cdot r = r \cdot p$$

$$4) \quad p \cdot (r+q) = p \cdot r + p \cdot q$$

$$5) \quad (kp) \cdot r = p \cdot (kr) = k(p \cdot r)$$

$$6) \quad \text{若 } p \text{ 与 } r \text{ 垂直, 则 } p \cdot r = 0$$

(10) 矢量积 (又叫叉积): 两矢量 p 和 r 的矢量积是

$$p \times r = (p_y r_z - p_z r_y)i + (p_z r_x - p_x r_z)j + (p_x r_y - p_y r_x)k \quad (1-5)$$

式中 i, j, k 分别是 x, y, z 轴方向上的单位矢量。矢量积具有以下性质:

$$1) \quad p \times r = s, s \text{ 垂直于 } p \text{ 和 } r;$$

$$2) \quad p \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}$$

$$3) \quad p \times r = |p||r|n\sin\theta, \text{ 其中 } n \text{ 是与 } p \text{ 和 } r \text{ 张开的平面垂直的单位矢量}$$

$$4) \quad p \times r = -r \times p$$

$$5) \quad p \times (r+s) = p \times r + p \times s$$

$$6) \quad (kp) \times r = p \times (kr) = k(p \times r)$$

$$7) \quad i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j;$$

$$8) \quad \text{若 } p \text{ 与 } r \text{ 平行, 则 } p \times r = 0$$

9) 点 p 的位置矢量是 $p = p_x i + p_y j + p_z k = (p_x \ p_y \ p_z) \begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}^T$ 为方便起见, 常省略 $\begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}^T$, 而简单地用 $p = (p_x \ p_y \ p_z)$ 来表示。

10) 点 p_0 和 p_1 之间的线段是

$$p(u) = p_0 + u(p_1 - p_0) \quad \forall u \in [0,1] \quad (1-6)$$

11) 过点 p_0 , 方向为 p_1 (或与 p_1 平行) 的直线是

$$p(u) = p_0 + up_1 \quad \forall u \in (-\infty, +\infty) \quad (1-7)$$

12) 包含点 p_0 , 且与矢量 $p_1 \times p_2$ 垂直的平面是

$$p(u, w) = p_0 + up_1 + wp_2 \quad \forall u, w \in (-\infty, +\infty)$$

任意三个线性无关的矢量构成一个基(basis)。线性无关性要求这三个矢量不共线,并且不在同一个平面上。于是,在每一个主坐标轴方向上有其中一个矢量,这三个矢量构成一个基。任意一个矢量都能够表示成基矢量的线性组合。

1.1.2 矩阵方法

排列成 m 行、 n 列的一组数或一组其他的数学元素称为矩阵 (matrix)。我们用大写字母表示矩阵,例如 A ; 或用带标记的字母来表示,例如 $A_{m \times n}$ 。当我们用标记法时,第一个下标表示行,第二个下标表示列。例如一个 m 行 n 列的矩阵写成

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{m1} \end{pmatrix} \quad (1-8)$$

a_{ij} 叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素。

(1) 如果 $m = n$, 则 A 简称为方阵或 n 阶矩阵。

(2) 当 $m = 1$ 时, $A = (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n})$ 称为行矢量 s 或行矩阵。

当 $n = 1$ 时, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ 称为列矢量或列矩阵。

(3) 两个矩阵只有当其行数、列数都相等,且其所有对应位置的元素都相等时,则称这两个矩阵是相等的。

(4) 两个 $m \times n$ 阶矩阵 A 、 B 之和 $A + B$ 是 $m \times n$ 阶矩阵,它由 A 和 B 的对应元素之和组成。不同容量的矩阵不能相加。类似地,我们能够求两矩阵之差。

(5) 数乘矩阵: 用一个数或一个函数乘以一个矩阵时,矩阵的每一元素都要乘以这个数或这个函数,即

$$CA = Ca_{ij}$$

这一运算称为数乘。

(6) 矩阵的乘积: 两个矩阵 $A_{m \times n}$ 和 $B_{n \times p}$ 的乘积是一个新的矩阵 $C_{m \times p}$ 。注意 $A_{m \times n}$ 的列数必须与 $B_{n \times p}$ 的行数相同。设矩阵 A 的元素为 a_{ik} , 矩阵 B 的元素为 b_{kj} , 则矩阵 C 的元素 c_{ij} 为

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,p) \quad (1-9)$$

这个乘积可写成

$$C = AB$$

注意，矩阵的乘法通常不满足交换率。

(7) 单位矩阵：我们把单位矩阵（又称恒等矩阵）定义为 $n \times n$ 方阵，它的元素满足以下方程

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j \\ 0 & \text{若 } i \neq j \end{cases} \quad (1-10)$$

单位矩阵常用 I 来表示，如 n 阶单位矩阵为

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

(8) 转置矩阵：矩阵 A 的转置记为 A^T ，它是将 A 的行、列互换得到的。转置矩阵遵从下列规律：

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2) (kA)^T = kA^T$$

$$3) (AB)^T = B^T A^T$$

我们看到单位矩阵是它自身的转置。

(9) 逆矩阵：对于方阵 A ，若满足条件

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (1-11)$$

则称 A^{-1} 为 A 的逆矩阵

方阵的逆矩阵满足下述规律：

$$1) \text{ 若 } A \text{ 可逆, 则 } A^{-1} \text{ 亦可逆, 且 } (A^{-1})^{-1} = A$$

$$2) \text{ 若 } A \text{ 可逆, 数 } k \neq 0, \text{ 则 } kA \text{ 可逆, 且 } (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}.$$

$$3) \text{ 若 } A, B \text{ 为同阶方阵且均可逆, 则 } AB \text{ 也可逆, 且 } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$$4) \text{ 若 } A \text{ 可逆, 则 } A^T \text{ 亦可逆, 且 } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

【例 1-1】 求方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵。

解：求得 $|A| = 2 \neq 0$ ，知 A^{-1} 存在，再计算 A 中各元素的余因子，

$$A_{11} = 2, A_{21} = 6, A_{31} = -4$$

$$A_{12} = -3, A_{22} = -6, A_{32} = 5$$