新世纪高等学校教材名师导学与辅导丛书

线性代数学习指导

高等数学教学与命题研究组　编

清华大学数学系　贾仲孝　主审

最新

中国林业出版社

新世纪高等学校教材名师导学与辅导丛书

线性代数学习指导

高等数学教学与命题研究组　编
清华大学数学系　贾仲孝　主审

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/高等数学教学与命题研究组编．－北京：中国林业出版社，2003.1

ISBN 7－5038－3314－9

Ⅰ．线…　Ⅱ．高…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 097871 号

高等数学教学与命题研究组

主编：罗爱兵

编写：赵修坤　吴娟香　罗爱兵　阳碧云

主审：贾仲孝

出版　中国林业出版社(100009　北京西城区刘海胡同 7 号)

E-mail　cfphz@public.bta.net.cn　　电话　66184477

发行　中国林业出版社

印刷　北京林业大学印刷厂

版次　2003 年 1 月第 1 版

印次　2003 年 1 月第 1 次

开本　850mm×1168mm　1/32

印张　9.5

字数　250 千字

印数　1～5 000 册

定价　11.00 元

前言

线性代数是工科院校一门重要的理论基础课程。它不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础,对学习者其他能力的培养也有着重要的作用。如何更好地帮助学习者学好这门课程,加深学生对所学内容的理解和掌握,提高其综合运用知识解决实际问题的能力,以及如何更好地指导学生进行相应的备考,成为我国各类工科院校共同关注的问题。

为了配合各院校线性代数的教学与学生的复习、备考,我们依托北京大学等高校强大的师资力量,根据高等学校工科线性代数教学大纲的基本要求组织编写了本书。全书由清华大学数学系贾仲孝教授主审。

本书的编写特点如下:

(1)本书结构与内容均按一般的线性代数教材编写,进度则完全按照一线教学实践安排,可作为高等院校本科、专科、专升本及其他各类在校学生学习线性代数的同步辅导用书和参加自学考试、考研前的复习指南,亦可作为在校教师教授线性代数这门课程的教学参考资料。

(2)本书以图表形式列出了每一章的学习要点、基本知识点及它们之间的相互关系,使读者一目了然,从而对每一部分的内容进行系统掌握。

(3)本书的每一章,不仅涵括了内容与考点、解题方法及例题解析,还特别为读者指出了学习的重点与难点,并对常考知识点进行了分析,能帮助学生举一反三地掌握这门课程。

(4)本书精心选择例题,按类编排,并对各种常考题型及解题思路、方法和技巧进行了详细的分析、总结和归纳。同时,本书重要特

点在于逐一指出了学生最易犯的错误，使读者能在学习过程中少走弯路。

(5)作为线性代数这门课程的同步辅导，本书为读者精选了大量有针对性的同步测练与提高习题，并按教学计划与进度编排了五套综合测试题，便于学习者进行自我检测。所有习题难度由低到高，解析由浅入深，注意照顾到不同水平层次的学生。

(6)作为线性代数这门课程的备考指南，本书分类编选了近年来相应的考研真题(包括最新真题)并加以解析，使读者能真正、全面地衡量自己对这门课程的整体掌握程度，并对全国硕士研究生入学考试线性代数试题的形式、难度有一定了解，也便于立志考研的读者有针对性地进行复习和备考。

(7)参加本书编写的编者均为一线教师，具有丰富的教学经验，因此在编写技巧指导和例题讲解等方面均由浅入深、循序渐进且在难度上层次分明，切合不同学习者的实际需要。

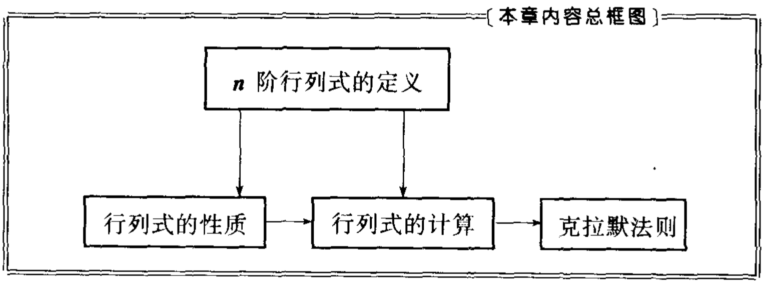
在本书的编写过程中，尽管我们精益求精，但由于水平有限，书中难免仍存在不妥或需商榷之处，恳请读者指教。

高等数学教学与命题研究组

2003年1月

目 录

第一章 行列式



目的与要求

1. 理解 n 阶行列式的定义，掌握行列式的性质.
2. 熟练掌握行列式的计算方法.
3. 掌握克拉默法则.

§1.1　n 阶行列式的定义及性质

内容与考点

1.（全）排列和逆序数

(1)（全）排列：

由 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）. n 个

不同元素的所有排列的种类$P_n = n!$.

(2) 逆序和逆序数:

在 n 个元素的任一排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中,若某两个元素的先后次序与标准次序不同,如若 $i_t > i_s$,则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数,记作 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.若 τ 为奇数,则称$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列.

(3) 对换:

排列$(i_1, i_2, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_n)$中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.

任意一个 n 元排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$经过若干次对换可变为$(1, 2, \cdots, n)$样的标准排列,且所作的对换次数与排列$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$有相同的奇偶性.即奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

2. n 阶行列式的定义

(1)"排列逆序"定义:

n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{1j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1 j_2 \cdots j_n$是$1, 2, \cdots, n$的一个全排列,$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$表示 n 元排列$j_1 j_2 \cdots j_n$的逆序数.这里$\sum$表示对所有 n 元全排列求和,故是 $n!$ 项的代数和.

(2)"递推"定义:

i.设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号$(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \qquad \cdots\cdots(1)$$

的项,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(1)式的项共有 $n!$ 项.所有这 $n!$ 项的代

数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，称为 n 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素 .

ⅱ. n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$$

其中 τ 为行标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数 .

3. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^T$.

性质 2　两行(列)互换，行列式改变符号 .

性质 3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式 .

性质 4　若行列式两行(列)元素成比例，则行列式值为零 .

性质 5　如果行列式中某一行(列)的所有元素均为两项之和，则该行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的此行(列)的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上去，行列式值不变 .

推论 1　若行列式的两行(列)相等,则行列式值为零.

推论 2　行列式的第 i 行　$(1 \leqslant i \leqslant n)$ 各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式符号之外.

推论 3　若行列式的某行元素全为零,则该行列式的值为零.

4.行列式按行(列)展开

ⅰ.展开法则:行列式按任一行(列)展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

或　$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$

其中,A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

ⅱ.推论:

行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或　$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$

ⅲ.代数余子式的性质:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases}$$

或　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases}$

其中,$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases}$

ⅳ.拉普拉斯定理:行列式按某 k 行(列)　$(1 < k \leqslant n - 1)$ 展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t$$

其中 $t = C_n^k$,而 $N_i \quad (i = 1, 2, \cdots, t)$ 为取定的某 k 行(列)所得到的 k 阶子式;A_i 为 N_i 的对应代数余子式.

5. 特殊行列式值

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 范德蒙德(*Vandermonde*)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

($\prod$ 表示全体同类因子的乘积)

(4) 拉普拉斯定理的两个特殊情形

(ⅰ)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$
(\text{ii})\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\
b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{nm}\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1m} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
b_{m1} & \cdots & b_{mm}
\end{vmatrix}
$$

重难点及易犯错误分析

△**【例 1】** 计算行列式：

$$
D = \begin{vmatrix}
x & y & x+y \\
y & x+y & x \\
x+y & x & y
\end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)
$$

错误解法 将第1,2行均乘以(-1)加到第3行上，并且同时把第1行及第3行乘以(-1)后加到第2行上，于是得

$$
D = \begin{vmatrix}
x & y & x+y \\
-2x & 0 & -2y \\
0 & -2y & -2x
\end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots(2)
$$

分析 本解法的错误在于没有在完成上一步的基础上来做下一步，而是全从原来的行列式出发，结果本应将(2)式右端的第3行乘以(-1)加到(1)式右端的第2行上，却把(1)式右端的第3行乘以(-1)加到第2行上，形成了(2)中的第2行．为了避免这样的错误发生，在计算不是十分熟练的情况下，最好把步骤写细一些，每一步都在前一步的基础上完成．

正确解法 〔方法 1〕将第2,3行均加到第1行，然后提取公因子$2(x+y)$，于是得

$$D=2(x+y)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ y & x+y & x\\ x+y & x & y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ y & x & x-y\\ x+y & -y & -x\end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)(-x^2+xy-y^2)=-2(x^3+y^3)$$

〔方法 2〕将第 1,2 行乘以(-1)均加到第 3 行上,然后按第 1 列展开:

$$D=\begin{vmatrix}x & y & x+y\\ y & x+y & x\\ 0 & -2y & -2x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x+y & x\\ -2y & -2x\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}y & x+y\\ -2y & -2x\end{vmatrix}$$

$$=-2x\begin{vmatrix}x & 0\\ y & x\end{vmatrix}+2y\begin{vmatrix}0 & y\\ y & x\end{vmatrix}=-2(x^3+y^3)$$

△**【例 2】**　计算:

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{vmatrix}$$

错误解法　将第 1 行乘以 3 逐次减去第 2,3,…,n 行,降阶后再用第一行减去各行,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & 7 & 6 & \cdots & 6\\ 0 & 6 & 6 & \cdots & 6\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 6 & 6 & \cdots & 9-n\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$=\begin{vmatrix}7 & 6 & \cdots & 6\\ 6 & 6 & \cdots & 6\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 6 & 6 & \cdots & 9-n\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$=\begin{vmatrix}7 & 6 & 6 & \cdots & 6\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-3\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 \end{vmatrix} = -6(n-3)!$$

分析 这一解法的错误在于将行列式的性质应用得不对."将第1行乘以3逐次减去第2,…,n行"的实质是"将第2,…,n行均乘以-1,然后再将第1行乘以3逐次加到第2,3,…,n行",这样所得到的(1)式的右端已经与D_n相差一个符号$(-1)^{n-1}$.从(2)式到(3)式的运算中犯了同样的错误,于是(2)式与(3)式之间又相差一个符号$(-1)^{n-2}$.两聪错误造成最后的结果不是D_n,而是

$$(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}D_n = -6(n-3)!$$

于是可知 $D_n = 6(n-3)!$

正确解法 〔方法1〕第$1,2,\cdots,n-1$列依次减去第n列,得

$$D_n = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3-n & 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & n \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)$$

再直接应用n阶行列式的定义,则

$$D_n = (-1)^{\tau(1\,2\,n\,4\,5\cdots n-1\,3)}\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 3\cdot 1\cdots(3-n)$$
$$= (-1)^{n-3+n-4}\cdot(-1)^3 6(n-3)! = 6(n-3)!$$

〔方法2〕由〔方法1〕中的(1)式,将第3列与第n列对换,再按第3行展开,得 $D_n = (-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot 3\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(3-n) = 6(n-3)!$

〔方法3〕由〔方法1〕中的(1)式按第3行展开,得

$$D_n = 3\cdot(-1)^{3+n}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 \\ 3-n & 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & 3-n \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots(2)$$

再按第 3 列展开,得

$$D_n = 3\cdot(-1)^{3+n}\cdot(-1)^{n-1+3}\cdot(3-n)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-4)$$
$$= 6(n-3)!$$

〔方法 4〕由〔方法 2〕中的(2)式取前 2 行,根据拉普拉斯定理展开

$$D_n = 3\cdot(-1)^{3+n}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 \\ 3-n & 3-n & 3-n & \cdots & 3-n \end{vmatrix}$$
$$= 6\cdot(-1)^{3+n}\cdot(3-n)\cdot(-1)^{n-3+1}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-4)$$
$$= 6(n-3)!$$

△**【例 3】** 计算 n 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

错误解法 〔方法 1〕第 n 列乘以$(-\frac{1}{a})$加到第 1 列上,则得

$$D = \begin{vmatrix} a-\frac{1}{a} & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-\frac{1}{a})a^{n-1} = a^n - a^{n-2}$$

〔方法 2〕按第 1 行展开,则有

$$D = a^n + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix}_{n-2} \qquad \cdots\cdots(1)$$
$$= a^n + (-1)^{n+1}a^{n-2}$$

分析 〔方法 1〕中忽略了 $a=0$ 的情况,此法只适用于 $a\neq 0$ 的情况;〔方

法 2〕在按第 1 行展开过程中有错误，即(1) 式右端第 2 项应为

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{vmatrix}_{n-2} = -a^{n-2}$$

于是　$D = a^n - a^{n-2}$

正确解法　〔方法 1〕将第 n 行乘以$(-a)$加到第 1 行上，得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a^2 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1-a^2 \\ a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot(1-a^2)\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot a^{n-2}$$

$$= -(1-a^2)\cdot a^{n-2} = a^n - a^{n-2}$$

〔方法 2〕将第 n 行依次与上一行对换，经过 $n-2$ 次对换成为第 2 行，再将第 n 列依次与前一列对换，经过 $n-2$ 次对换成为第 2 列，于是选取第 1,2 行，按拉普拉斯定理展开

$$D = (-1)^{n-2}\cdot(-1)^{n-2}\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}\cdot a^{n-2} = (a^2-1)a^{n-2} = a^n - a^{n-2}$$

〔方法 3〕当 $a=0$ 时，$D=0$；当 $a\neq 0$ 时，第 1 行乘以$\left(-\dfrac{1}{a}\right)$加到第 n 行上，得