黄际英 王一平

西安电子科技大学出版社

无线电物理中的随机场

无线电物理中的随机场

黄际英　王一平

(国家自然科学基金资助项目)

西安电子科技大学出版社

1991

内容简介

本书讲述当空间和时间变量的函数成为随机函数时，标量场和矢量场的基本问题，着重讨论相关分析．内容包含基本定义基本概念和方法，并以实例说明其应用．全书共分五章，第一章随机函数是连续随机过程的简要回顾；第二章介绍随机微分方程的基本概念．第三章和第四章分别叙述标量随机场和矢量随机场，讨论相关函数，相关张量，结构函数和结构张量以及它们的谱表示．最后，在第五章列举了湍流、随机电磁场、热电磁场、随机光场的一些典型例子以说明概念和方法的应用．本书是为有志于深入探讨随机场应用问题的学者提供预备知识的专著，也可供有关的研究生和科技工作者作参考．

无线电物理中的随机场

黄际英　王一平

责任编辑　马乐惠

西安电子科技大学出版社出版发行

西安电子科技大学印刷厂印刷

新华书店经销

开本 850×1168 1/32　印张 8 8/32　字数 203 千字

1991 年 11 月第 1 版　1991 年 11 月第 1 次印刷　印数 1–2 000

ISBN7–5606–0173–1/TM · 0005(课)　　定价：2.60 元

前　　言

本书是已知结论的一种重新组合，是一个尝试，目的在于为沿着这个方向深入工作的学习者提供预备知识，随机场这三个字的涵义也许和纯数学的称呼不同，但我们只从熟知的经典场概念进行推演．主要阐明概念和方法以及应用举例，并要求读者具有概率论与随机过程的基本知识．书末列出了我们采用过的文献，它们也是读者进一步学习的参考．

本书初稿由黄际英完成；王一平做了修改和补充．我们知识有限，错误在所难免，希望得到批评和指正．

本书属于国家自然科学基金资助的项目．

作者

1991 年 4 月

目　　录

第一章 随机函数

本章回顾随机过程的主要概念．由于本书的目的在于讨论场的问题，故在绝大多数场合用随机函数来代替随机过程这一称呼．本章主要叙述一个变量随机函数的基本概念，谱分解，平稳函数，遍历性，高斯的和马尔科夫的随机函数；并着重于讨论参数和状态都是连续的过程．

1-1 随机函数

随机函数是这样的函数，它在实验结果中取某种确定的但预先未知的形式．随机函数在实验结果中所取的具体形式称为随机函数的实现(realization)．如对随机函数引入一组实验而非一个实验，则得到一族随机函数的实现，如图 1-1 所示，图中自变量 t 代表时间．这种随机函数称为随机过程．在许多实际问题中会遇到不决定于时间而决定于别的变量的随机函数．例如大气层中空气的温度可能是高度的随机函数．实际上也可能遇到不决定于一个变量而决定于多个变量的随机函数．但在本章内只涉及一个变量的问题．随机函数用大写字母表示如：$X(t)$，$Y(t)$，…．它们的实现是确定性函数，通常用小写字母表示如：$x(t)$，$y(t)$，…．

设有一个随机函数 $X(t)$，对它进行了 n 次独立实验结果得到了 n 个实现(图 1-1)，分别记为 $x_1(t)$，$x_2(t)$，…，$x_n(t)$。每个实现显然是通常的确定性函数，称为样本函数．因此，在每次实验的结果中随机函数变为非随机函数．现在如果固定变量的某

个值，则 $X(t)$ 将是对应于给定 t 的随机函数的截口。这些截口的 $x_1(t_i)$，$x_2(t_i)$，…，$x_n(t_i)(i=1, 2, \cdots, m)$ 值成了一般意义下的随机变量。由此可见，随机函数兼有了随机变量和函数的特点。即如固定变量的值 t_i，它变为一般的随机变量；而在每次实验结果中它变为确定性函数。如果研究在一个确定的变量范围内

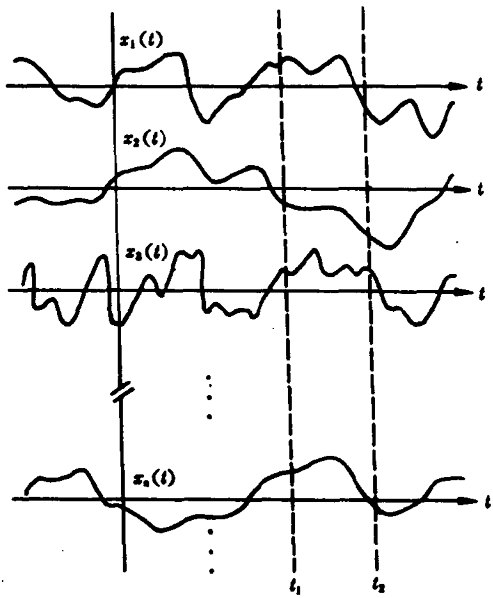

图 1-1　随机函数的实现

的随机函数 $X(t)$，就要记下它在确定时间上的值，例如确定在时刻 t_1，t_2，…，t_m 的值。这相当于在图 1-1 中作出 m 个截口。由此，得到了 m 元的随机变量系.

$$X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_m)$$

于是对随机函数 $X(t)$ 的研究可以用这种 m 元随变量系的研究来代替。随着 m 的增大这样的代替会越来越精确。在极限情形，

变元的个数亦即随机变量的个数趋于无穷。这样，随机函数的概念可以作为多元随机变量的概念在元数为无限多情形下的自然推广。

随机变量 $X(t_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$是随机函数在 t_i 的截口。它必有分布规律。如用 $f(x_i,\ t_i)$表示 $X(t)$在时刻 t_i 取值为 x_i 的分布律，则 $f(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$和 $f(x_1,\ x_2,\ x_3;\ t_1,\ t_2,\ t_3)$分别表示它的二元和三元分布密度。在理论上无限增加变元的数目会得到越来越详尽的随机函数的特征。但这样做十分繁琐，甚至不可能。因此常常限于研究某些不需要多元分布就能描述的随机函数。也就是这样的随机函数：$\{X(t),\ t\in T\}$ 对每个 $t\in T$，$X(t)$的均值(数学期望)和方差都存在的过程，这种随机函数常称为二阶矩过程。随机函数的这种特征在一般情况下是某个 t 的函数。如以 m 表示平均值其定义为

$$m(t)=\langle X(t)\rangle \quad (1-1)$$

其中，$\langle\cdot\rangle$ 表示数学期望的计算。式(1-1)是一个确定性函数。它对变量 t 的每个值，等于随机函数相应截口的数学期望。从概念上说，随机函数 $X(t)$的数学期望是某个平均函数。随机函数就在其附近变动，如图 1-2 所示。

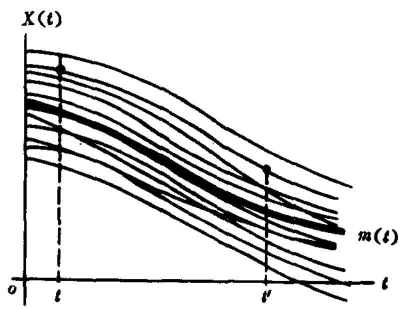

图 1-2 均值的意义

类似地，随机函数的方差规定为对每一个 t，它的值等于随机函数相应截口的方差。即

$$\sigma_X^2=\langle X^2(t)\rangle-\langle X(t)\rangle^2 \quad (1-2)$$

描述随机函数的特征只有数学期望和方差是不够的。如把图

1-3 和图 1-2 相比较可见，它们表示两类具有相同的平均值函数的随机函数。但很显然它们的内部结构是不同的。这促结构上的不同需要用专门的特征表示。这种特征叫做相关函数，它表征随机函数不同截口之间的相关性质。它的定义是

$$B_X(t,\ t') = \langle X(t)X(t')\rangle \qquad (1-3)$$

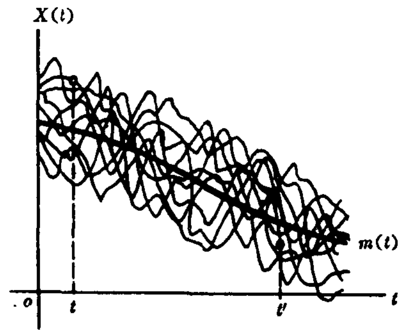

图 1-3 均值相同结构不同的随机函数

和相关函数相应的并具有相同意义的是协方差函数。它的定义是

$$C_X(t,\ t') = \langle[X(t) - \langle X(t)\rangle][X(t') - \langle X(t')\rangle]\rangle \qquad (1-4)$$

在 $t=t'$ 时协方差函数成为方差。即

$$C_X(t,\ t) = \langle X^2(t)\rangle - \langle X(t)\rangle^2 = \sigma_X^2$$

在以后的讨论中，着重讨论数学期望和相关函数(或协方差函数)。

1-2 随机微积分

随机变量的序列是定义在相同事件集合上的一个函数序列。已知对实数序列 $\{\alpha_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，如存在一个实数 α，使对每个 $\varepsilon>0$(不管它多小)有一个有限整数 $n(\varepsilon)$，对所有 $n(\varepsilon)$ 有$|\alpha_n-\alpha|\leqslant\varepsilon$，则的$\alpha$为 $\{\alpha_n\}$ 的极限而记为$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ 或 记 为 $\alpha_n \xleftrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$

令 $\{X_n\}$ 是一随机变量序列且定义于同一个概率空间，则 $\{X_n\}$ 的收敛有三种可能的说法。

1. 几乎必然(以概率 1)收敛

其定义为：存在着一个事件 A 使概率 $P(A)=0$，而对每一个 $\omega\notin A$，$\{X_n(\omega)\}$ 收敛至 $X(\omega)$．可以记为

$$\lim_{n\to\infty} \text{a.s.} X_n = X \text{或} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} X$$

其中 a.s.是 almost sure 的缩写。

2. 按概率收敛

其定义为：对每个 $\varepsilon>0$，$P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。可以记为

$$\lim_{n\to\infty} \text{in P.} X_n = X \text{或} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P.}} X$$

其中 in P 表示 in Probability。

3. 按均方收敛

其定义为：$\langle |X_n|^2 \rangle < \infty$ 且 $\langle |X_n - X|^2 \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$。可以记为

$$\lim_{n\to\infty} \text{q.m.}\ X_n = X \text{或} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.m.}} X$$

其中 q.m.表示 square mean。

实际上，依概率收敛包含了几乎必然收敛和按均方收敛，但几乎必然收敛与按均方收敛是不同的．下面以均方收敛为准对分析运算作简单的说明。

一、均方连续

如有

$$\lim_{s\to s_0}\langle\left|X(s)-X(s_0)\right|^2\rangle=0$$

则称随机函数 $X(s)$ 在 s_0 均方连续，如 $s\in S$ 且 $X(s)$ 对 S 中的一切 s 都连续，则称 $X(s)$ 在 S 上均方连续．与此定义相联系的有以下定理:

$X(s)$ 在 s_0 处均方连续的充要条件是协方差函数 $C(s,\ t)$ 在 $(s_0,\ t_0)$ 处连续，此定理称为均方连续准则．

二、均方导数

如果下列极限存在:

$$\lim_{h\to 0}\frac{X(s+h)-X(s)}{h}$$

记为 $X'(s)$ 或 $\dot{X}(s)$，称为 $X(s)$ 在 s 处的导数，则均方导数的定义为

$$\lim_{h\to 0}\langle\left[\frac{X(s+h)-X(s)}{h}-X'(s)\right]^2\rangle=0$$

如 $X(s)$ 在 $s\in S$ 上每一点都均方可微，则称 $X(s)$ 在 S 上均方可微．如果 $X'(s)$ 在 s 处均方可微，则称 $X(s)$ 在 s 处二次均方可微．$X'(s)$ 的均方导数记为 $X''(s)$，称为 $X(s)$ 的二阶均方导数，更高阶的导数可依此类推．

为了说明均方可微的准则，先介绍普通函数的广义二阶导数，一个普通二元函数 $f(s,\ t)$，如果下列极限存在:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}\frac{f(s+h,\ t+h')-f(s+h,\ t)-f(s,\ t+h')+f(s,\ t)}{hh'}$$

则叫做在 $(s,\ t)$ 广义二次可微．此极限称为 $f(s,\ t)$ 在 $(s,\ t)$ 处的广义二阶导数．一般而言 $f(s,\ t)$ 对 s 和 t 的一阶偏导数存在，二阶混合偏导数存在，$f(s,\ t)$ 不一定是广义二次可微的．反过

来，如果 $f(s, t)$ 是广义二次可微的，则 $f(s, t)$ 的一阶和二阶偏导数存在．当然，如果直到二阶偏导数不存在，则广义二阶偏导数也不存在．图 1-4 所示的函数就不是广义二阶可微的．它表示一个函数 $f(s, t)$ 定义在 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上，它只在图上所示

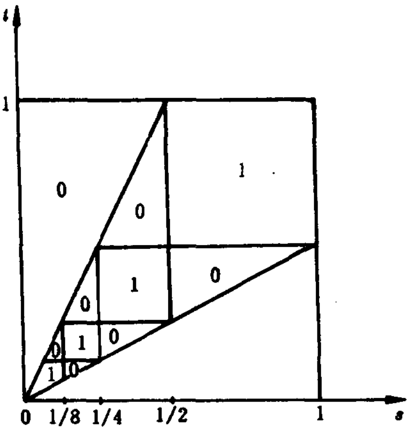

图 1-4　一个二元函数的取值

的半闭正方形上有值为 1，其余处为 0，对这样一个图形表示的函数，在(0, 0)点不难看出

$$\frac{\partial}{\partial s} f(0, 0)=\frac{\partial}{\partial t} f(0, 0)=\frac{\partial^{2}}{\partial s \partial t} f(0, 0)=\frac{\partial^{2}}{\partial t \partial s} f(0, 0)=0$$

即对(0, 0)点，此函数的一阶和混合二阶偏导数存在．但当 $h=h'\to 0$ 时只有 $f(0, 0)=1$，故

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h, h)-f(h, 0)-f(0, h)+f(0, 0)}{h^{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2}}=\infty$$

可见图 1-4 所给的函数不是广义二阶可微的．

关于均方可微有下面的定理：$X(s)$ 在 s 处均方可微的充要条

件是其相关函数 $B(s, t)$ 在 (t, t) 处广义二次可微。均方导数的性质列举如下:

(1) 设 $X(s)$ 在 s 处均方可微，则 $X(s)$ 在 s 处均方连续。

(2) 均方导数是唯一的，即如有 $X'(s)=W$，$X'(s)=V$，则 $W=V$。

(3) 设 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 均方可微，a 和 b 是常数，则 $aX(s)+bY(s)$ 也均方可微，且

$$(aX(s)+bY(s))'=aX'(s)+bY'(s)$$

(4) 设 $X(s)$ 均方可微，$f(s)$ 是普通可微函数，则 $f(s)X(s)$ 均方可微，且

$$\frac{d}{ds}[f(s)X(s)]=\frac{df(s)}{ds}X(s)+f(s)\frac{dX(s)}{ds}$$

这些性质的证明和普通数学分析中的证明类似。

三、均方积分

设 $X(s)$ 是二阶矩随机函数，$f(s)$ 为一普通函数。考虑 $S=[a, b]$ 的一组分点为 $a=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_n=b$，且 $\Delta_k=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(s_k-s_{k-1})$ 及和式

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}f(u_k)X(u_k)(s_k-s_{k-1})$$

其中 $s_{k-1}\leqslant u_k\leqslant s_k$，$1\leqslant k\leqslant n$。如果 $\Delta_n\to 0$ 时上式所表示的随机变量均方收敛，即

$$\lim_{\substack{\Delta_n\to 0\\ n\to\infty}}\langle[Y_n-\int_a^b f(s)X(s)ds]^2\rangle=0$$

则称 $f(s)X(s)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼(Riemann)均方可积，而

$$\int_a^b f(s)X(s)ds$$

称为 $f(s)X(s)$ 在$[a,\ b]$上的黎曼均方积分．如有一积分限趋于无穷，则依照普通数学分析的概念当

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(s)X(s)ds$$

存在，则记为

$$\int_a^\infty f(s)X(s)ds=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(s)X(s)ds$$

确定均方可积准则的一个定理是 $f(s)X(s)$ 在$[a,\ b]$上均方可积的充分条件是下列普通的二重积分存在:

$$\int_a^b\int_a^b f(s)f^*(t)B(s,\ t)dsdt$$

这个定理的证明如下．因为按定义，均方积分存在的充分条件是下列极限的存在:

$$\lim_{\Delta_n\to 0}\left\langle\left[\sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)(s_k-s_{k-1})\right]\left[\sum_{l=1}^n f(u_l)X(u_l)(s_l-s_{l-1})\right]^*\right\rangle$$

$$=\lim_{\Delta_n\to 0}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n f(u_k)f^*(u_l)\langle X(u_k)X^*(u_l)\rangle\Delta_k\Delta_l$$

$$=\lim_{\Delta_n\to 0}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1} f(u_k)f^*(u_l)B(u_k,\ u_l)\Delta_k\Delta_l$$

即

$$\int_a^b\int_a^b f(s)f^*(t)B(s,\ t)dsdt$$

存在，上面的式子中 * 表示复数共轭．如果虚部为零，则表示实函数情形。

与此有关的定理和推论如下:

(1) $\int_a^\infty f(s)X(s)ds$存在的充分条件是下列二重积分

存在:

$$\int_a^{\infty}\int_a^{\infty} f(s)f^*(t)B(s,\ t)dsdt$$

(2) 设 $f(s)X(s)$ 在$[a,\ b]$上均方可积，则

1) $\langle\int_a^b f(s)X(s)ds\rangle=\int_a^b f(s)\langle X(s)\rangle ds=0$

2) $\langle\left[\int_a^b f(s)X(s)ds\right]\left[\int_a^b f(t)X(t)dt\quad ^*\right]\rangle$

$=\int_a^b\int_a^b f(s)f^*(t)B(s,\ t)dsdt$

(3) 设 $X(s)$ 在 $S=[a,\ b]$ 上均方连续，则对一切$s\in S$有

$$\left|\int_a^t X(s)ds\right|^2\leqslant(t-a)\int_a^t|X(s)|^2ds$$

$$\leqslant(b-a)\int_a^t|X(s)|^2ds$$

上述定理和推论除(3)而外都可以推广到一个二阶矩过程 $X(s)$关于有界变差函数 $g(s)$的黎曼-司蒂吉斯(Riemann-Stieltjes)均方积分的情形．只要将积分中的微分元 ds，dt 等分别改为 $dg(s)$，$dg(t)$ 即可．关于黎曼-司蒂吉斯积分的概念在本章附录中叙述.

均方积分具有下列性质:

(1) 设 $X(s)$ 在$[a,\ b]$均方连续，则 $X(s)$ 在$[a,\ b]$上均方可积.

(2) 均方积分是唯一的.

(3) 设 $X(s)$ 在$[a,\ b]$上均方连续，则

$$\left|\int_a^b X(s)ds\right|\leqslant\int_a^b|X(s)|ds$$

(4) 如果关于 s 一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(s)=X(s)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b X_n(s)ds=\int_a^b X(s)ds$$

(5) 设 $X(s)$，$Y(s)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积，α 和 β 是常数，则

1) $\int_a^c [\alpha X(s)+\beta Y(s)]ds=\alpha\int_a^c X(s)ds+\beta\int_a^c Y(s)ds$

2) $\int_a^c X(s)ds=\int_a^b X(s)ds+\int_b^c X(s)ds \qquad (a\leqslant b\leqslant c)$

(6) 设 $X(s)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续，则

$$Y(t)=\int_a^t X(s)ds \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

在 $[a, b]$ 上均方连续，均方可微，且

$$Y'(t)=X(t)$$

(7) 设 $X(s)$ 均方可微，且 $X'(s)$ 均方连续，则

$$X(b)-X(a)=\int_a^b X'(s)ds$$

这些性质，除(6)和(7)外，均可推广到黎曼–司蒂吉斯积分(见本章附录)的情形.

1–3 复随机函数

复随机函数 $Z(t)$ 在一般情形可以表示为两个实随机函数 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的如下的线性组合:

$$Z(t)=X(t)+iY(t)$$

它的统计特性由 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的联合分布函数来确定. 复随机函数的数学期望由下式确定:

$$\langle Z(t)\rangle=\langle X(t)\rangle+i\langle Y(t)\rangle$$