代数浅说

·內容提要·

这是一本数学知識讀物，适合于初中毕业及高中文化程度的讀者自学。书中基本上与高中代数所包括的內容相似，特点是例題較多、讲解詳細。书末附有一部分习題的答案，以便讀者验证。

代数浅說

周伯壎編著

*

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号

江苏人民出版社出版

南京湖南路十三号

江苏省新华书店发行　国营东海印刷厂印刷

*

开本 787×1092 耗 1/32 印張 10 1/16 字数 222,000

一九五九年十二月第一版

一九六三年一月南京第四次印刷

印数 69,001—89,000

前　言

这本书是供給学过初等代数的讀者在生产和工作的业余間自己学习用的。讀者如果已經学过初級自然科学自学丛中的“代数基础知識”一书，接着就可以学习本书。

大家知道，科学的发展是由实践到理論，再由理論回到践的过程，象这样循环不已，一方面由于生产上的实践而展理論，另一方面也由于理論的提高而更好地指导生产实。所以讀者在学过了“代数基础知識”一书，能夠掌握和用初等代数后，还应該继續学习这本书，以丰富和提高数知識，更好地运用于生产实践，同时也可以为学习高等数作好准备。

这本书中所讲述的，有些部分如对数、級数、二次方程，是在一般生产上常常要运用到的；还有一部分如复数，則在研究交流电、載波电話等时，就需要运用到它。希讀者在学习的过程中，耐性地逐步地学习，对于书中的习也需要仔細演算，才能灵活运用。

在編写本书时，力求詳細讲述，以使讀者在自学时，能无师自通。其中还可能存在不妥之处，希望讀者指正。

周伯壎 1959年5月

目　录

$\frac{2}{7}$ 2.04
7a。

第一章　指数与根式

§1　指数律　如果 n 是一个正整数，而 a 是任何一个数，我們以 a^n 来表示 n 个 a 的連乘积，即

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}_{n\text{个}}。$$

这个 n 叫做指数，a^n 叫做 a 的 n 次方或 n 次幂。a 自己也是 a 的一次幂 a^1，但这时的指数是不写出来的。如果 a 是 0，那么，不論 n 是哪一个正整数，a^n 总是 0，因为

$$0^n=\underbrace{0\cdot 0\cdot\cdots\cdots\cdot 0}_{n}=0。$$

如果 a 是正数，則 a^n 一定是正数。如果 a 是負数的話，就要看 n 是偶数还是奇数而定了，事实上，若 n 是偶数，則因負数的偶次方必定是正的（偶数个負数的乘积是正数），所以 a^n 是正数；若 n 是奇数，則因負数的奇数次方仍是負数（奇数个負数的乘积是負数），所以 a^n 是負的。总起来說：

0 的 n 次幂仍然是零；

若 a 是正数，則 a^n 是正数；

若 a 是負数，則当 n 是偶数时，a^n 是正数；而当 n 是奇数时，a^n 是負数。

根据指数的定义，我們發現：

第一指数律　$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$。

事实上，a^n 是 n 个 a 連乘之积，a^m 是 m 个 a 連乘之积，所以 $a^n\cdot a^m$ 是 $n+m$ 个 a 連乘之积，

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots\cdots \cdot a)}_{n\text{ 个}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots\cdots \cdot a)}_{m\text{ 个}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots\cdots \cdot a}_{n+m\text{ 个}},$$

这显然等于 a^{n+m}。我們注意，这条规律中，a 的值并无限制，它可以是正数，也可以是負数，也可以是 0；n 与 m 可以是任何自然数。

第二指数律 若 $a \neq 0$, $n > m$，则 $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$。

事实上，$\frac{a^n}{a^m}$ 是 n 个 a 連乘之积除以 m 个 a 連乘之积，由于 a 不是 0，而且分子的因子又多于分母的因子（因为 $n > m$），所以我們可以把分母中的所有的因子一起消掉（只剩下一个 1），而分子还剩下 $n-m$ 个因子，所以第二指数律是正确的。

由第一指数律，我們可以得到第三指数律。

第三指数律 $(a^n)^m = a^{nm}$。

事实上，$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \cdots \cdots a^n}_{m\text{ 个}} = a^{\overbrace{n+n+\cdots\cdots+n}^{m\text{ 个}}} =$

$$= a^{nm}。$$

我們注意，在第二指数律中，我們需要 $a \neq 0$，因为若 $a = 0$，那么 $\frac{a^n}{a^m}$ 就变成 $\frac{0}{0}$ 的局面，这是数学中不許可的。同时，我們也要求 $n > m$，因为若 $n = m$ 或 $n < m$ 时，$n-m$ 就将是 0 或者是負数，而 0 或負数为指数时，上面关于指数的定义是說不通的（零个 a 或 -2 个 a 連乘是什么意思，很难理解）。

要想使第二指数律能够更广泛地使用，我們就不能不补充指数的定义。

事实上，只要 $a\neq0$，不論 n 是否等于 m，$\frac{a^n}{a^m}$ 总是可以計算的。

首先，我們考慮 $n=m$ 的情况。这时 $\frac{a^n}{a^m}=1$，因为分子与分母的因子一样多，所以就完全消掉了。如果第二指数律仍能使用于这种情况的話，我們就必須讓

定义 1. 若 $a\neq0$，則令 $a^0=1$。

讀者应該注意，这是一条定义，不是一条規律或定理。事实上，定义就是起名字。我們为了方便起見，給某些以前未知的符号以一定的意义，这就叫做定义。定义是不必也不可能証明的。以 $a^0=1$ 而論，我們事先并不知道 a^0 是什么数，也无法理解它的意义；但是在定了 $a^0=1$ 以后，我們就知 a^0 的值了。至于为什么令 $a^0=1$，而不令 a^0 等于 2 或其他的数，只是为了方便（能用第二指数律于 $n=m$ 的情况），并沒有其他的什么正确理由。有人誤解，以为由第二指数律，所以 a^0 必然是 1。这种理解不是正确的，因为第二指数律本身只对 $n>m$ 的情况有效，对于 $n=m$ 的情况，它是管不着的。第二指数律能用于 $n=m$ 的情况，正是因为我們定了 $a^0=1$；而不是因为第二指数律能用于 $n=m$ 的情况，才必有 $a^0=1$。

現在我們再考慮 $n<m$ 的情况。先設 $n=0$，則由上面的定义 1，我們有

$$\frac{1}{a^m}=\frac{a^0}{a^m}。$$

如果要想第二指数律能使用于这种情况，我們就必需讓

$$\frac{1}{a^m}=\frac{a^0}{a^m}=a^{0-m}=a^{-m}。$$

所以我們再作定义 2。

定义 2. 若 $a\neq 0$, 則 $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$。

这仍然是一条定义，它对負指数規定了意义。有了这条定义以后，我們就可以把第二指数律中的 $n>m$ 的限制取消了。事实上，若 $n<m$，則消去分子分母中 n 个因子以后，我們就得到

$$\frac{a^n}{a^m}=\frac{1}{a^{m-n}}=a^{-(m-n)}=a^{n-m}。$$

不但如此，有了負指数的定义以后，我們甚至于根本不要第二指数律了，可以把它归并到第一指数律，得出一条广义的指数律。

广义指数律

（1）0 的正整数幂等于 0; 0^0 与 0 的負数次幂无意义;

（2）$a\neq 0$ 时，不論 n 与 m 是两个什么样的整数，我們总有

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}。$$

事实上，若 m 是負数，$m=-k$，則

$$a^n\cdot a^m=a^n\cdot a^{-k}=\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}=a^{n+(-k)}=a^{n+m}。$$

（3） $$(a^n)^m=a^{n\cdot m}。$$

这里的 n 与 m 是任何整数，当然，nm 是負数或 0 时，a 不能是零。

例 1. 計算 $\dfrac{a^5\cdot a^7}{a^6}$。

解 因为 $a^5\cdot a^7=a^{5+7}=a^{12}$,

所以 $\dfrac{a^5\cdot a^7}{a^6}=\dfrac{a^{12}}{a^6}=a^{12-6}=a^6$。

例2. $\left(-\dfrac{ax^k}{b^3y^{2k}}\right)^m=\left\{(-1)\left(\dfrac{ax^k}{b^3y^{2k}}\right)\right\}^m=$

$$=(-1)^m\left(\frac{ax^k}{b^3y^{2k}}\right)^m=$$

$$=(-1)^m\frac{(ax^k)^m}{(b^3y^{2k})^m}=$$

$$=(-1)^m\frac{a^mx^{km}}{b^{3m}y^{2km}}。$$

習 題 一

I. 1. 求 $(-1)^3$, $(-1)^7$, $(-1)^{12}$。一般地，若 m 是偶数，$(-1)^m=?$ 若 m 是奇数，$(-1)^m=?$

2. 比較 1.4^2 与 1.5^2 的大小，比較 -1.4 与 -1.5 的大小，比較 $(-1.4)^2$ 与 $(-1.5)^2$ 的大小。

3. $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=?$　$\left(-1\dfrac{1}{2}\right)^3=?$　$(-0.1)^4=?$

II. 化简 $(-a)^4\cdot(-a)^2\cdot(-a)^3$，$(-(-a)^2)^3$，

$(-x)^8\div x^7$，$\dfrac{(-3ab)^2}{4a^3b}$，$\dfrac{(2ax^2)^4\cdot(3ay)^2}{(4axy)^3}$。

III. 計算 (1) $(-9a^3y^2)^3\div(-5a^2y)^2\cdot(-2ay^3)^2=?$

(2) $\left(\dfrac{3ab}{a^2b^3}\right)^2\div\left(\dfrac{2a^2b}{3ab^2}\right)\div a^2=?$

(3) $(-3a)^6+(-2a^2)^3-(3a^3)^2=?$

§2. 数字的立方根　本节的目的是要求任何数 a 的立

方根。我們知道，正数的立方根是一个正数，負数的立方根是一个負数，而且对于絕对值相等的数，其立方根的絕对值也是相等的。例如 8 的立方根是 2，而 -8 的立方根是 -2。所以，我們只需要討論正数的立方根。

我們首先应該記住，1 至 9 的立方。$1^3=1$，$2^3=8$，$3^3==27$，$4^3=64$，$5^3=125$，$6^3=216$，$7^3=343$，$8^3=512$，$9^3==729$。其次，我們發現：$10^3=1,000$；$100^3=1,000,000$；$1000^3=1,000,000,000$；……。因此，三位数以下的立方根是一个一位数，即小于 10，四位至六位数的立方根是一个二位数，七至九位数的立方根是一个三位数。由此可知，要想决定一个整数的立方根是几位数，我們可以采用分节的方法，即，自个位数起，每三位数为一节，最前面的一节可能只有一位数字，也可能有二位数字，也可能有三位数字（我們回忆一下，在求平方根时，我們以两位数为一节）。例如 1331 的立方根是一个二位数，因为我們可以把它分成两节，即 1,331；10941048 的立方根是一个三位数，因为我們可以把它分成三节，即，10,941,048。

1,000 以下的数的立方根是容易求的，我們現在討論一百万以下的数的立方根。假定 a 是这样的一个数，如果 a 小于 1,000，則 a 的立方根是一个一位数。假定 a 大于 1,000，又小于 1,000,000，于是 a 的立方根是一个二位数，設为 $10x+y$（x 代表十位数，y 代表个位数），这里的 x，y 都是整数，而且既不能是負数，又不大于 9。因此

$$a=(10x+y)^3=1000x^3+300x^2y+30xy^2+y^3=$$
$$=1000x^3+(300x^2+30xy+y^2)y。$$

所以，要求 a 的立方根的話，我們可以先找一个最大的 x，使它的立方不大于 a 的第一节的数目，这个 x 叫做第一次根，

从 a 减去 x^3 的 1000 倍，得 $a-1000x^3$；然后找一个 y，使 $(300x^2+30xy+y^2)y$ 等于 $a-1000x^3$，这个 y 叫做第二次根。于是 $10x+y$，就是我們所要求的立方根。

例 1. 求 17576 的立方根。

我們先分成节，得 17,576。

第一步：求一个 x，使它的立方不大于 17。由于 $2^3=8$，$3^3=27$，所以 $x=2$。

第二步：作出 $17,576-2^3\times1000=17,576-8000=$
$=9576$。

第三步：求一个 y，使

$$(300\times2^2+30\times2\times y+y^2)y=9576。$$

这个 y 大約比 $\dfrac{9576}{300\times2^2}=\dfrac{9576}{1200}$ 稍微小一些，我們看出来比 $\dfrac{9576}{1200}$ 稍微小一点的数是 7 或 6，我們現在可以用 7 試一下，發現

$$(300\times2^2+30\times2\times7+7^2)\times7=(1200+420+49)\times7=$$
$$=1669\times7=11683,$$

比 9576 大。所以我們再用 6 来試試看，得

$$(300\times2^2+30\times2\times6+6^2)\times6=(1200+360+36)\times6=$$
$$=1596\times6=9576,$$

正合适。所以 17576 的立方根是 $2\times10+6=26$。我們現在列出算草来表达上面的算法：

		第一次根	第二次根	
		2	6	
		17,	576	
	$2^3=$	8		相减
	$300\times2^2=1200$	9	576	带下第二节
試出 6	$30\times2\times6=\ 360$			
相加	$6^2=\ 36$	9	576	6×1596
	1596			

所以 17576 的立方根是 26。

求更大的整数的立方根可以类似地作，讀者应仔細看懂下面的例子。

例 2. 求 42508549 的立方根。

先分节得 42,508,549，所以我們知道这个数的立方根是一个三位数 $100x+10y+z$。

第一步：求一个最大的 x，使它的立方不超过 42，显然 $x=3$。从 42 减去 3^3，卽 $42-27=15$。

第二步：把上面得到的 15，再添上第二节 508，得到一个数 15,508。找一个最大的 y，使 $(300\times 3^2+30\times 3\times y+y^2)y$ 不超过 15,508。这个 y 大約比 $\frac{15,508}{300\times 3^2}=\frac{15,508}{2700}$ 小一些。我們用 5 与 4 来試一試，發現 5 嫌大，所以讓 $y=4$。算出

$$(300\times 3^2+30\times 3\times 4+4^2)\times 4=$$
$$=(2700+360+16)\times 4=3076\times 4=12304。$$

第三步：从 15508 减去 12304 得 3204，再添上原数的最后一节，得到一个数 3204549。

第四步：把第一次根，卽 3，与第二次根，卽 4，拼成一个二位数 34，于是原数的立方根一定是 $34\times 10+z$。現在要求一个 z，使

$$(300\times 34^2+30\times 34\times z+z^2)z=3204549。$$

这个 z 大約比

$$\frac{3204549}{300\times 34^2}=\frac{3204549}{346800}$$

小一些。以 $z=9$ 代入正合适。所以 42508549 的立方根是 349。

用算草来說明这个作法如下:

		第一次根	第二次根	第三次根	
		3	4	9	
		42	508	549	
	$3^3=$	27			相减
	$300\times3^2=2700$	15	508		带下第二节
試出4	$30\times3\times4=360$				
相加	$4^2=16$	12	304		4×3076
	3076				
	$300\times34^2=346800$	3	204	549	带下第三节
試出9	$30\times34\times9=9180$				
相加	$9^2=81$	3	204	549	9×356061
	356061			—	

例3、 求14832537993的立方根。

我們先分节,得 14, 832, 537, 993, 因此这个数的立方根是一个四位数。直接作出算草如下:

		第一次根	第二次根	第三次根	第四次根	
		2	4	5	7	
		14	832	537	993	
	$2^3=$	8				相减
	$300\times2^2=1200$	6	832			带下第二节
試出4	$30\times2\times4=240$					
相加	$4^2=16$	5	824			4×1456
	1456					

	$300\times24^2=172800$	1 008 537	带下第三节
試出5	$30\times24\times5=\ \ 3600$		
相加	$5^2=\ \ 25$	882 125	5×176425
	176425		
	$300\times245^2=18007500$	126 412 993	带下第四节
試出7	$30\times245\times7=\ \ 51450$		
相加	$7^2=\ \ 49$	126 412 993	7×18058999
	18058999	—	

所以 14832587993 的立方根是 2457。

我們現在討論带有小数的数的立方根。首先要注意的是分节怎样分法。我們以求 6028.568 的立方根为例来說明这个問題。这个数有两部分，一是整数部分，卽 6028，另一部分是小数部分，卽 0.568。从整数部分 6028 看来，这个数的立方根不能是一个三位数，但是也不是一个一位数。因此，这一部分的分法仍然和上面所述的情况一样，从后面算起，每三位分一节。換句話說，6028 应分成两节，得成 6,028。再看小数部分，任何一个有一位小数的数的立方必有三位小数。例如

$$2.1^3=9.261,\quad 3.9^3=47.619;$$

任何一个有二位小数的立方必有六位小数，例如

$$1.01^3=1.030301,\quad 1.09^3=1.295029;$$

仿此，有三位小数的数的立方必有九位小数，等等。因此，求任何一个数的立方根时，小数部分应該自小数点起向右数，每三位作一节。因此，6028.568 的分节法应該是 6,028,568，求这个数的立方根与求 6,028,568 的立方根完全一样；只要求出立方根后，在适当的地方写上小数点就行了。

例 4. 求 6028.568 的立方根。

	第一次根	第二次根	小数点对齐	第三次根
	1	8	·	2
	6	028	·	568
$1^3=1$				
$300\times1^2=300$	5	028		
$30\times1\times8=240$				
$8^2=\ 64$	4	832		
604		196		568
$300\times18^2=97200$				
$30\times18\times2=\ 1080$				
$2^2=\ 4$		196		568
98234			—	

所以 6028.568 的立方根是 18.2。

有时一个数的立方根会开不尽，列如求 5 的立方根。我們知道 $1^3=1$，$2^3=8$，所以 5 的立方根不是一个整数。这时按照問題的需要，我們可以求一位小数或二位或三位小数。在这种要求下，我們就需要在小数点后面加 0，但是应該特别注意，如果要求某一数 a 的立方根准确到一位小数，那么，我們就需要 a 的小数点后有三位小数；要想准确到二位小数的話，我們就需要 a 的小数点后面有六位小数；要想准确到三位小数的話，我們就需要 a 的小数点后面有九位小数，等等；余仿此。如果 a 的小数点后的位数不够所需要的位数，那么，我們就应該用 0 来补足。

例 5. 求 2.1 的立方根准确到二位小数。

按照問題的要求，我們需要 2.1 的小数点后有六位小数，

但是现在只有一位小数，所以我們得补上5个0，卽把2.1写成2.100000。按照例4的作法，我們得出2.100000的立方根是1.28多一些。所以2.1的立方根是1.28，这个数准确到二位小数。

習 題 二

I. 求21952，251239591，45805856552等数的立方根。

II. 求2，4.15，23.8的立方根，准确到两位小数。

§3. 无理数与它的近似值 正整数1，2，3，……等等是我們人类最早知道的数，它們又叫做自然数。后来，随着生产的逐漸發展，我們又知道了分数。整数与分数合起来叫做有理数。由于任何一个整数 n 也可以写成分数 $\frac{n}{1}$ 的样子，所以，我們可以說，有理数是一切可以写成 $\frac{p}{q}$ 形状的数，这里 p 与 q 都是整数，而且 q 不能是零。

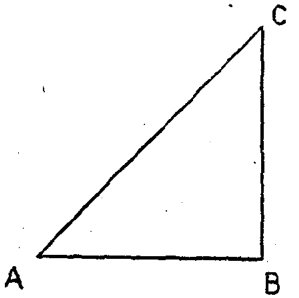

图 1

有理数全体是不是能够反应一切的量呢？要想解决这个問題，我們需要从实际的問題出發。一个最簡單的問題是等腰直角三角形的斜边之長的問題。假定 $\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形(图1)，AC 是它的斜边；再假定 AB 与 BC 之長都是一尺，那么，根据角直角三角形的道理，我們有

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=1^2+1^2=2,$$