

金属压力加工問題

A. И. 采里柯夫 主編

科学出版社

金屬壓力加工問題

A. И. 采里柯夫 主編

楊 鴻 勳 譯

科 學 出 版 社

1960

A. И. ЦЕЛИКОВ
ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ
АН СССР 1958

內 容 簡 介

本論文集包括四篇論文：第一篇闡述复杂零件在冲压过程拉深时所产生的塑性应力状态,拉深过程的稳定性,以及钣料在拉深时的硬化;第二篇介绍复杂冲模設計的經驗,拉深極对零件成形过程的影响;第三篇报导关于在軋制过程中如何确定力的真实数值及力的作用性质;第四篇闡述行星軋机的几个重要参数的計算原理。

本論文集可供研究机关、設計单位的工作人員,高等学校师生,冲压車間及軋鋼車間的工程技术人员参考。

金屬压力加工問題

A. И. 采里柯夫 主編
楊 鴻 勳 譯

*

科學出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷, 新华书店总經售

*

1960 年 7 月第 一 版	書 号: 2209 字 数: 92,000
1960 年 7 月第一次印刷	开 本: 787×1092 1/18
(京) 0091—9,000	印 张: 4 2/3 插 頁: 3

定价: 0.66 元

目 录

复杂零件拉深过程的塑性应力状态及其稳定性	A. Д. 托姆亮諾夫(1)
拉深时拉深檻对零件成形过程的影响	B. B. 塞列皮也夫(22)
开坯机及鋇料軋机上力的作用	E. C. 罗可強(44)
行星軋机計算的原理	A. И. 采里柯夫及 P. И. 里特曼(3)

复杂零件拉深过程的塑性应力状态及其稳定性

A. Д. 托姆亮諾夫

概 論

图 1 为圆柱体工件的拉深图。我們知道^[1]，在拉深过程中，毛坯凸緣上的一个主法向应力沿半径方向，为拉应力；第二个主法向应力位于水平面上，为压应力；第三个法向应力作用于垂直方向，但它与上述两个应力比較起来，其值甚小，因此我們可以运用平面应力状态的微分方程来分析产生在毛坯凸緣上的应力^[2]。我們在平面塑性应力状态的理論基础上，进行了一些研究工作，其結果与实验数据甚为符合。无论是对于旋轉体工件，或是对于稜柱体工件^[6]，如图 1 所示的拉深問題，在各个作者的一系列著作中^[3,4,5]，都研究得极其詳尽及全面了。在进行如上图所示的拉深工作时，塑性变形主要是产生在毛坯的凸緣上，而且凸緣的面积比毛坯其余部分的面积要大得多。在冲压具有复杂外壳形状的零件时，如汽車制造业中的某些零件，它們的拉深图就显得較为复杂了。載重汽車的水箱复盖就是一例。这个零件的拉深模如图 2 所示。

在上述情况下，位于冲模压边圈下的毛坯面积比其他部分的面积小得多。

此时在毛坯所有的面积上都有塑性变形。凸模、凹模，以及压边圈的工作部分是由一些复杂的曲面所組成的。复杂零件拉深过程的理論分析，相对于圆柱体杯形件，或稜柱体匣形件的拉深过程來說，是一个

比較困难的問題。正如实验和理論研究結果所指出的，在拉深复杂零件时，产生了一些在简单拉深情况下所不能观察到的現象。在这些現象中，尤其是双軸向拉深穩定

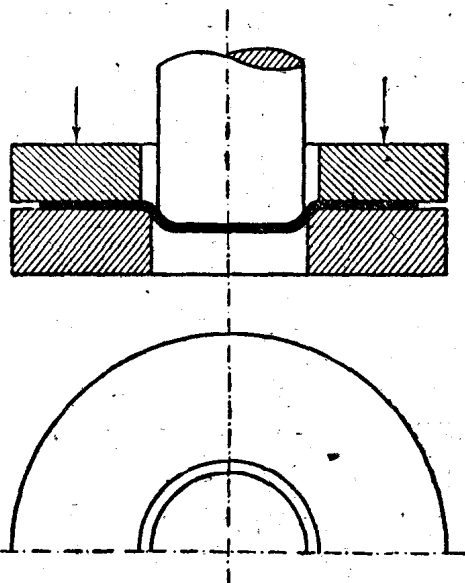


图 1 最简单的拉深图

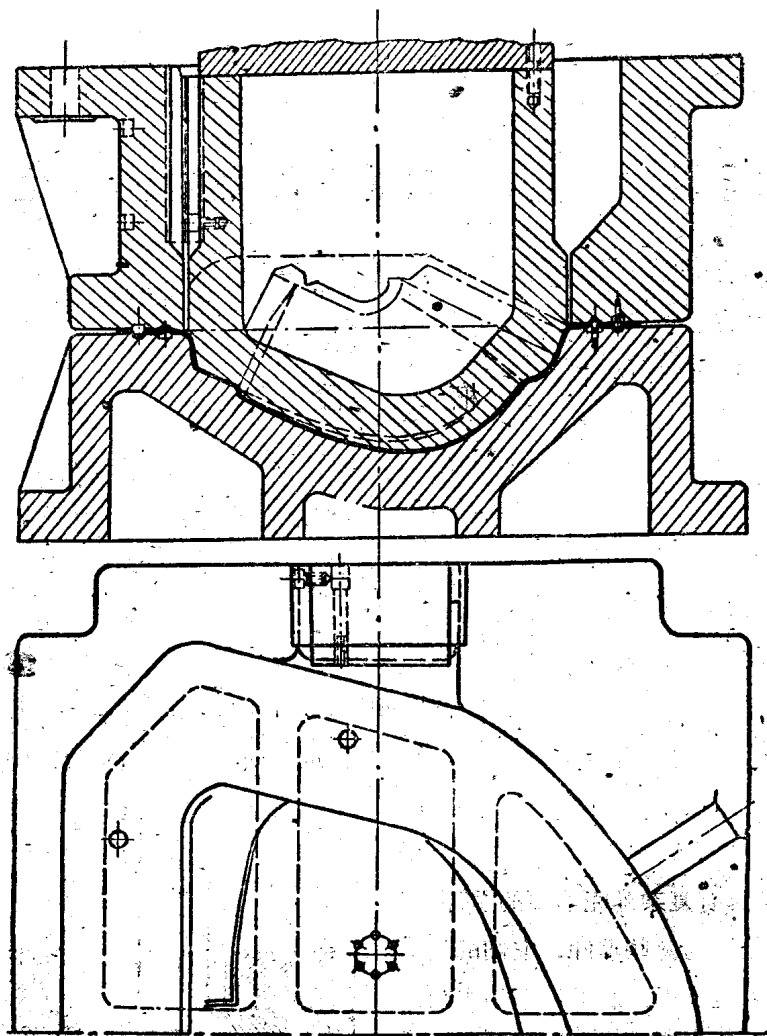


图 2 复杂零件的拉深模

性的丧失,以及毛坯拉伸部分金属材料塑性的过高利用,显得更为突出。

同时还应该指出,假使在简单零件拉深情况下,减少凸缘阻力的目的是便于改善拉深过程,那么在复杂零件拉深时,则不得不利用拉深筋及拉深槛 (Вытяжные рёбра и пороги) 来增加这个阻力。复杂零件拉深的理论问题在著作^[7]中得到阐述,而工艺问题则在著作^[8,9]中得到阐述。

复杂零件拉深时的应力状态

在拉深轴向对称的零件时,于毛坯的凸缘上,以及在复杂形状交接之处,产生了应力状态;在一个主向上是拉应力,在另一个主向上则是压应力。在零件表面的法线方

向上所产生的单位压力,其数值小于作用在工件断面上的应力,小的倍数正好是工件表面的面积大于工件横断面面积的倍数。实际上,零件表面法向的单位压力,是以作用在工件断面上的应力的百分数来表示的。

如同在拉深轴向对称的零件时一样,这种表示方法是有利于应力状态分析的。但是,拉深件的凸缘,一般地来讲,不是平面的,并且凸缘的应力分布也不是轴向对称的。

利用曲面内蕴几何学¹⁾ (Внутренняя геометрия поверхности) 的方法来分析复杂零件的应力,我们可以将滑移线理论自然推广到空间形状时来运用。这时空间滑移线代以平面滑移线,曲面上的短程线²⁾ (Геодезическая линия поверхности) 代以直线。空间滑移线的短程迴转角是平面滑移线迴转角的自然推广。

在凸缘表面上,取右向正交曲线坐标系 u 及 v (图3)。

在此坐标系中凸缘曲面的方程式用下式表之:

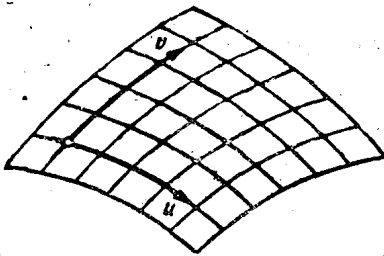


图3 零件表面上的正交曲线坐标系

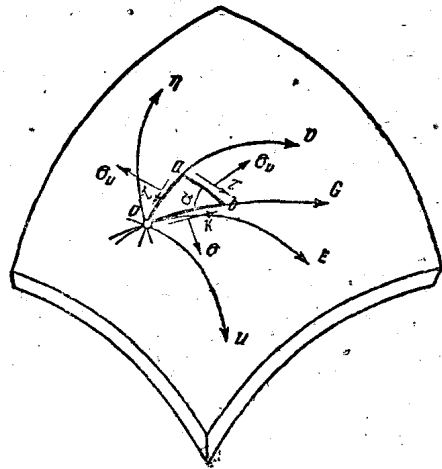


图4 在承受压缩及拉伸的单元凸缘上的平衡状态

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v)$$

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v). \quad (1)$$

在曲面上给一曲线,其内部方程式为:

$$u = u(s); v = v(s). \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式,即得此曲线的参数方程式:

$$\bar{r} = \bar{r}(u(s), v(s)). \quad (3)$$

将(3)式加以微分,即求出曲线之切线的单位向量式^[3]:

1) 曲面经扭曲后而不变的几何性质谓曲面内蕴几何学(如曲面曲线的弧长,二曲线的交角,曲面面积,短程曲率等)——译者注。

2) 在每一点处短程曲率等于零的曲线谓短程线,或曲面上两点间之最短线谓短程线——译者注。

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{dS} = \bar{r}_u \frac{du}{dS} + \bar{r}_v \frac{dv}{dS}. \quad (4)$$

从(4)式可知,单位向量 $\bar{\tau}$ 是坐标向量 $\bar{r}_u$ 及 $\bar{r}_v$ 的线性组合。因此通过曲面上一点所有曲线的切线单位向量位于一个平面。当然此平面切于所有曲线。这个情况可以使我們利用平面应力状态的局限性,来研究复杂零件的应力状态。

在承受压缩及拉伸的凸缘上有一点 o ,设通过此 o 点的两条正交滑移线为 ξ 及 η (图4)。

现在让我们来分析一下无限小直角三角形 oab 的平衡状态,此三角形的斜边与切于滑移线的短程线 G 相重合。

因为通过 o 点所有曲线的切线单位向量位于一个平面,若误差为二次无穷小,則我們可以认为应力 σ_u, σ_v, τ 及 σ 也位于此平面上。

将作用于单元三角形上的力投影到平均法向应力 σ 的方向上,得

$$\sigma = \sigma_u \sin^2 \alpha + \sigma_v \cos^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha, \quad (5)$$

式中 α ——是短程线 G 与坐标线 u 的交角。在切点处, α 同时也是滑移线对于 u 轴的倾角。当 o 点沿滑移线 ξ 移动时, α 又是滑移线与短程线 G 的偏角。

现在让我们求出与 α 角有关的,平均法向应力的变化规律。为此,将(5)对 α 微分:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = (\sigma_u - \sigma_v) \sin 2\alpha - 2\tau \cos 2\alpha. \quad (6)$$

作 o 点的摩尔圆(круг мопа),求出

$$\sigma_u = \sigma + k \sin 2\alpha, \quad \sigma_v = \sigma - k \sin 2\alpha, \quad \tau = -k \cos 2\alpha, \quad (7)$$

式中 k ——塑性常数。

从(6)及(7)式中可求出:

$$d\sigma = 2k d\alpha, \quad (8)$$

或

$$d\sigma = 2k \frac{d\alpha}{d\xi} d\xi. \quad (9)$$

应指出:

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = K_g, \quad (10)$$

式中 K_g ——变形凸缘面上滑移线的短程曲率¹⁾, 求出:

1) 曲面曲线在其上一点的短程曲率, 为此曲线底曲率向量在此点底曲面切平面上的射影底绝对值——譯者注。

$$d\sigma = 2k \cdot K_g \cdot d\xi. \quad (11)$$

在滑移綫上取 a, b 两点, 并以 σ_a 及 σ_b 表示此二点的平均法向应力。然后求出沿滑移綫 ξ 方向的平均法向应力的变化規律:

$$\sigma_a - \sigma_b = 2k \int_a^b K_g d\xi. \quad (12)$$

同样对于滑移綫 η , 可求出:

$$\sigma_c - \sigma_d = -2k \int_c^d K_g d\eta. \quad (13)$$

式中 c 及 d 为滑移綫 η 上之两点, 而 K_g 是該滑移綫的短程曲率。

此二公式可合并为一:

$$\sigma_a - \sigma_b = \pm 2k \int_s K_g dS, \quad (14)$$

式中 dS ——滑移綫的綫素。

公式(14)是承受压缩及拉伸的凸緣的塑性方程式的积分式。

我們知道, 曲面上綫的短程曲率等于下式:

$$K_g = \left| \frac{d\theta}{dS} - \frac{\omega}{dS} \right|, \quad (15)$$

式中 θ ——曲面上坐标綫的单位矢量与該曲率的单位矢量的交角, 而 ω ——曲面上相伴三面形¹⁾的旋轉系数, 此系数可用下式表示:

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v du - G_u dv), \quad (16)$$

式中 E 及 G ——高斯第一个基本二次型的系数²⁾, 而 E_v 及 G_u ——是这些系数沿坐标綫方向的导数。

若取主法向应力的軌綫为坐标綫 u 及 v , 則对滑移綫而言, θ 角为常数。于是;

$$K_g = \left| \frac{\omega}{dS} \right|. \quad (17)$$

公式(14)将为:

$$\sigma_a - \sigma_b = \pm 2k \int_s |\omega|. \quad (18)$$

塑性方程式的积分式(18), 可使我們一般地能解决复杂零件拉深的应力状态問題。为了得到具体解答, 必須每次作出滑移綫格子, 此滑移綫格子得滿足該項任务的条件。

1) 由曲面上一点的切綫, 主法綫, 次法綫所組成的一具三直角的三角形, 謂之曲面相伴三面形——譯者注。

2) $dS^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du dv + G(u, v)dv^2$, E, F, G 为此二次型的系数——譯者注。

設通过零件曲面上某点 a 的滑移綫与毛坯的外部輪廓相交于 b 点。

对 a 点及 b 点作摩尔圓, 求出:

$$\sigma_a = \sigma_v - k, \sigma_b = -k \quad (19)$$

因为 $|\sigma_a| > |\sigma_b|$, 則(14)式应取正号。

从(14)式中可求出拉应力:

$$\sigma_v = 2k \int_a^b K_g dS. \quad (20)$$

压应力可从塑性条件(7)中得到。式中之 α 以 $-\frac{\pi}{4}$ 代之, 則得:

$$\sigma_a = \sigma_v - 2k = -2k \left(1 - \int_a^b K_g dS \right). \quad (21)$$

一般地讲, 复杂拉深模的压边面不是按方程式給定的, 而是按样板构成的。

因此, 我們应该按冲模的模型, 来繪出滑移綫格子。如上所述, 在曲綫坐标代替迪卡尔坐标, 以及在短程迴轉角代替滑移綫迴轉角的条件下, 对于一些曲面上的小区段, 塑性平面应力状态是有效的。我們可以利用一些从塑性理論中推导出来的近似方法繪出滑移綫格子。另一方面, 我們可以采用借助于繞在模型表面上的細絲(这些細

絲是按照短程綫纏繞着的), 用模拟方法繪出短程綫。若此曲面給以解析公式, 則短程迴轉角可用积分方法計算出来。对于旋轉曲面, 其結果最为简单。

假使力的方向, 正如一般在冲压情况下一样, 与零件的心軸一致, 則法向应力的軌綫正好与子午綫及緯綫一致, 同时, 我們可以将这些子午綫及緯綫作为坐标軸的方向。塑性方程式的积分式可从(18)式中求出。

現在讓我們求出如图 5 所示的旋轉曲面的积分式, 此曲面由任意一段光滑的母綫繞 Z 軸旋轉得出。取經綫 u 及子

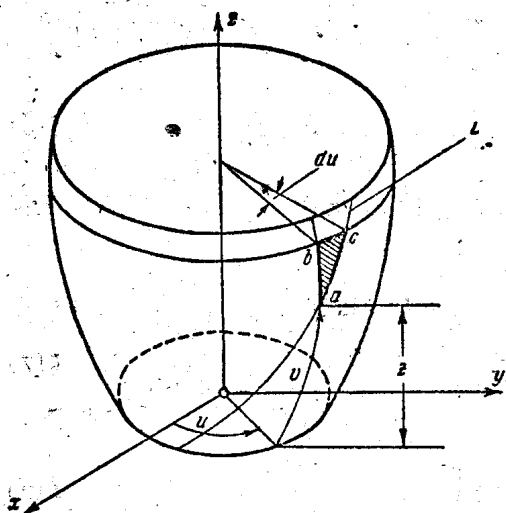


图 5 旋轉曲面 $r = \rho(u) + zk$

午綫 v 作为曲綫坐标。

旋轉曲面的方程式如下:

$$\vec{r} = \rho(u)\vec{e}_r + z\vec{k}. \quad (22)$$

將曲面的向量半径加以微分, 即得此曲面的綫素:

$$d\bar{r} = \bar{e}(u)\rho_v dv + \rho\bar{e}_1(u)du + z_v dv \cdot \bar{k}. \quad (23)$$

高斯第一个基本二次型的系数及该系数的导数可从(23)式得出:

$$E = \rho^2, E_v = 2\rho \cdot \rho_v; G = \rho_v^2 + z_v^2 = 1, G_u = 0. \quad (24)$$

将所得的高斯第一个基本二次型的系数代入(16)式,即可求出曲面相伴三面形的旋轉系数式:

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v du - G_u dv) = \rho_v du. \quad (25)$$

让我们现在来研究一下旋轉曲面上(图5)三角形 abc ,此三角形乃由坐标綫段 u, v 以及滑移綫所組成,求出滑移綫 L 的微分方程式:

$$\rho du = dv. \quad (26)$$

从(25)式及(26)式中可得:

$$\omega = \rho_v du = \frac{\rho_v \cdot dv}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (27)$$

将所得数值代入(20)及(21)式,求出旋轉曲面上任意点的应力数值:

$$\sigma_v = 2k \ln \frac{r_b}{r_a}, \sigma_u = 2k \left(1 - \ln \frac{r_b}{r_a} \right). \quad (28)$$

(28)式是在冲模的压边面具有任意旋轉曲面的假设条件下得出来的.它与压边面为平面时的公式相符合,平面压边面是旋轉曲面中最简单的一种特殊情况.

图6所示的,是在冲压过程中,零件表面的真实图形.曲面相伴三面形的旋轉系数,对平面毛坯来说,等于滑移綫的切綫单位迴轉角:

$$\omega = d\varphi. \quad (29)$$

从(27)式中可求出滑移綫方程式:

$$\varphi = \ln \rho + C \quad (30)$$

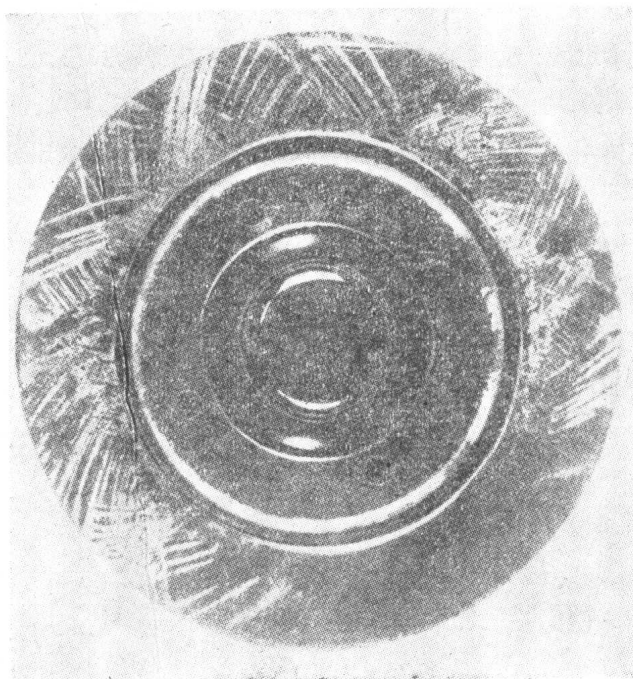
从(30)式可知,这些滑移綫是对数螺綫.不难指出,图6所示的真实图形是对数螺綫的正交格子組成的.

作用在位于压缩及拉伸状态下的某些部分毛坯上的摩擦力,是不会改变应力状态性质的.

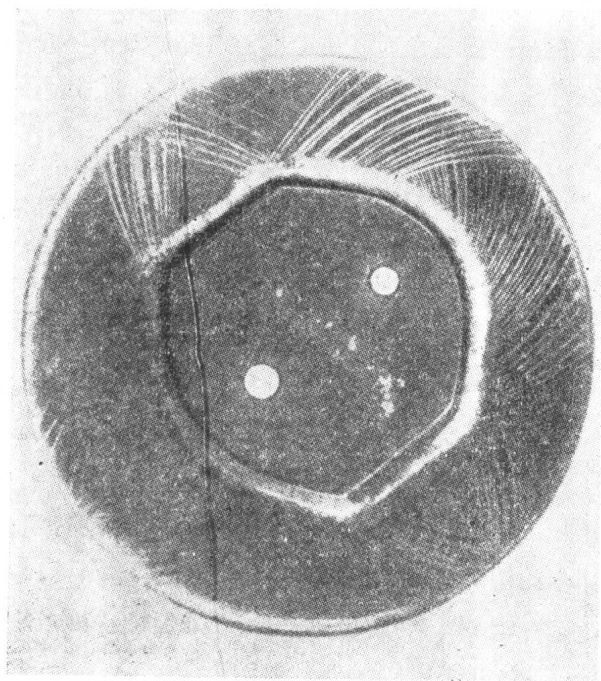
至于摩擦在数量上如何影响拉深过程,则基于下列见解我们可以加以确定.从(28)式可知,随着 r_b/r_a 比值的增长,应力 σ_v 亦随之增长.

当摩擦不存在, $\sigma_v = 2k$ 时,毛坯就会破裂,此处塑性常数 k 是对硬化后的金属而言的.将 σ_v 值代入(28)式,得

$$\frac{r_b}{r_a} = e \approx 2.72 \quad (31)$$



a



6

图 6 冲压件表面上滑移线的真实图形

在实际冲压条件情况下,这个比值的极限值在 1.5—2 之間:

$$\frac{r_b}{r_a} = 1.5 \sim 2.0. \quad (32)$$

以 σ'_v 表示考虑摩擦时的应力数值,并且設

$$\sigma'_v = C \cdot \sigma_v. \quad (\sigma_v \text{ 为无摩擦时的应力}) \quad (33)$$

将 $\frac{r_b}{r_a}$ 之极限值代入(28)式,得

$$\sigma'_v = 2k = C \cdot 2k \ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)_k. \quad (34)$$

所以:

$$C = \frac{1}{\ln \left(\frac{r_b}{r_a} \right)_k} = \frac{1}{\ln 1.5} \sim \frac{1}{\ln 2} = 1.45 \sim 2.45,$$

$$\sigma'_v = (1.5 \sim 2.5) \sigma_v. \quad (35)$$

因此,由于摩擦的影响,在承受压缩及拉伸的部分毛坯上,或在交接之处,最大应力增加了 1.5—2.5 倍.

現在讓我們研究一下,在承受双軸向拉伸的单元毛坯上,或在曲綫交接处的平衡

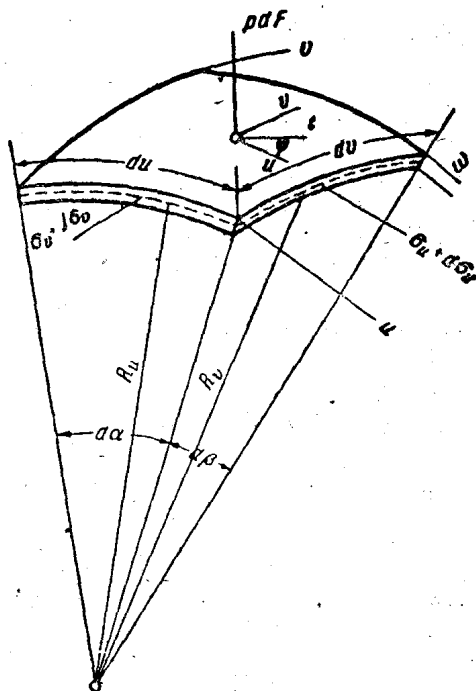


图 7 单元毛坯为无限小,承受双軸向拉伸时的平衡状态

状态。我們可以认为,摩擦力是沿毛坯厚度分布的(这只有当钣料厚度很小时才能这样设想)。单元毛坯上力的分布情况,及坐标系如图7所示。用 p 表示凸模作用于金属上的单位压力,用 μ 表示金属毛坯与凸模之间的摩擦系数。

将单元毛坯上的力投影到法线方向上,得

$$\begin{aligned} p du \cdot dv &= 2\sigma_u \frac{d\alpha}{2} \cdot w dv + 2\sigma_v w \cdot du \frac{d\beta}{2} \\ &= \sigma_u w \frac{du}{R_u} \cdot dv + \sigma_v w \frac{dv}{R_v} du \end{aligned} \quad (36)$$

或

$$\frac{p}{w} = \frac{\sigma_u}{R_u} + \frac{\sigma_v}{R_v} \quad (37)$$

所得之方程式乃拉普拉斯(Лаплас)方程式。由于摩擦的存在,其余两个平衡方程式将不恒等。

设摩擦力的主向量力 t 与轴 u 之交角为 φ 。则即可成立下列关系式:

$$\begin{aligned} t &= \mu p df, \quad t_u = t \cos \varphi, \quad t_v = t \sin \varphi, \\ \tau_u &= \frac{t \cos \varphi}{w dv}, \quad \tau_v = \frac{t \sin \varphi}{w du} \end{aligned} \quad (38)$$

将单元毛坯的力投影到 u 的方向上,得

$$d\sigma_u = \tau_u = \frac{t \cos \varphi}{w dv} = \frac{\mu p du \cdot \cos \varphi}{w} \quad (39)$$

所以

$$\frac{d\sigma_u}{du \cdot \cos \varphi \cdot \mu} = \frac{p}{w} = \frac{\sigma_u}{R_u} + \frac{\sigma_v}{R_v} \quad (40)$$

当 $\sigma_u = \sigma_v$, 及 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 时, 求出

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} = \sqrt{2} \cdot \mu d\alpha \quad (41)$$

积分后,得

$$\sigma_u = \sigma_{u0} \cdot e^{(\alpha - \alpha_0) \sqrt{2} \cdot \mu}, \quad (42)$$

式中 σ_{u0} 及 α_0 为原点的应力及角度, 最好取对称中心作为此原点; 或者, 当没有对称中心时, 取分叉线一点作为原点, 此点在变形过程中保持不变。

上面所得到的公式, 可使我们在双轴向拉伸的情况下, 能估计摩擦的影响。

对于单轴向拉伸 ($\varphi = 0$, $\sigma_v = 0$), 我们可得到 Эйлера 公式

$$\sigma_{\mu} = \sigma_{\mu 0} \cdot e^{(\alpha - \alpha_0) \cdot \mu} \quad (43)$$

最后,我們得指出,冲模压边面的形状应该是这样的,就是在压边圈压住毛坯的过程中,使得零件不致产生褶皱及皺紋。

当毛坯的中部曲面沒有显著变形时,不起皺紋的这个条件可得到保証。假如从数学观点来看,这个条件也能得到保証,那就是于压边圈的作用下,在弯曲过程中,毛坯的中部曲面具有第一个基本二次型。我們知道,在平面弯成曲面时,要保持第一个基本二次型,得满足这样一个条件,即使此曲面(此处为压边面)为可展曲面。所有可展曲面不是圆柱面,就是錐面,或是切綫面。因此,冲模的压边面应该是上述可展曲面中的一个。

此外,凹模开口处的曲面应该是压边面的一部分。

成形过程的穩定性

位于压边圈之外的毛坯中間部分承受双軸向拉伸。正如在凸緣部分上一样,此时在凸模的表面的法綫方向上产生了单位压力,其大小以作用于金属厚度上的应力百分数表示之。在冲压过程中,位于双軸向拉伸状态下的鍛料金属可能轉入非稳定状态。

在冲压时,我們應該区别三种不同的稳定性丧失。第一种稳定性丧失发生在微量的变形情况下,于冲压过程的初期。第一种稳定性丧失的原因是相当于在拉伸图上出現屈服区域的时候,而应力增长不均匀。在冲压复杂零件时,于零件表面上滑带的形成是第一种稳定性丧失的結果。金属預先硬化是一种防止产生第一种稳定性丧失的方法,金属的預先硬化可以消除屈服面积及滑带。很多文献对第一种稳定性丧失問題,以及防止它的方法都进行了研究,这些文献的目录列于^[10,11]著作中。

第二种稳定性丧失是发生在相当于拉伸图上到达最大載荷的时候。产生第二种非稳定性的原因是因为随着变形的增加,由于金属硬化模数减小不足补偿应力增长的緣故。第二种稳定性的丧失发生在較大的变形情况下,同时伴随着金属厚度的显著变化及金属的破裂。第二种双軸向应力状态的稳定性問題同样在很多著作中得到研究,这主要是与薄膜上流体靜力学的影响有关^[12,13,14,15]。

第三种稳定性丧失与产生在被压縮以及同时被压被拉的毛坯上的纵向弯曲現象有关。在热頂鍛棒料及冷頂鍛棒料工序时,这种稳定性丧失也可以观察得到。

本文研究了一些与拉深复杂零件有关的,双軸向应力状态下的第二种稳定性丧失問題。

現在讓我們来看看如图 8 所示的,承受双軸向拉伸的小单元拉深件。我們取曲

綫坐标 u 及 v 与主法向应力方向一致。

假使作用在单元上的主法向应力有下列关系：

$$\sigma_u : \sigma_v : \sigma_z = 1 : m : 0 \quad (44)$$

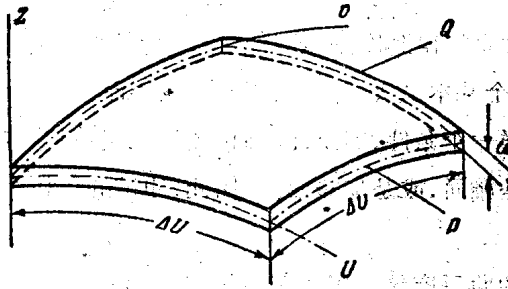


图 8 承受双轴向拉伸的最终单元毛坯

则应力偏量的分量相应有下列关系：

$$\sigma'_u : \sigma'_v : \sigma'_z = (2 - m) : (2m - 1) : -(m + 1) \quad (45)$$

八面体应力数值为：

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} M \sigma_u, \quad (46)$$

式中

$$M = \sqrt{1 - m + m^2} \quad (47)$$

单元的最终应变为：

$$\begin{aligned} \epsilon_u &= \int_{\Delta u_1}^{\Delta u_2} \frac{d(\Delta u)}{\Delta u} = \ln \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1}, \\ \epsilon_v &= \int_{\Delta v_1}^{\Delta v_2} \frac{d(\Delta v)}{\Delta v} = \ln \frac{\Delta v_2}{\Delta v_1}, \\ \epsilon_z &= \int_{w_1}^{w_2} \frac{dw}{w} = \ln \frac{w_2}{w_1}. \end{aligned} \quad (48)$$

最终应变显然是时间的函数。

根据流动理论：

$$\frac{\dot{\epsilon}_u}{\sigma'_u} = \frac{\dot{\epsilon}_v}{\sigma'_v} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{\sigma'_z} = \frac{\dot{\gamma}_0}{2\tau_0}, \quad (49)$$

式中点(·)表示对时间的微分, 而 γ_0 表示八面体最终剪切应变, 它可从下式求出：

$$d\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{d\gamma_1^2 + d\gamma_2^2 + d\gamma_3^2}. \quad (50)$$

• 将(45)中与应力偏量的分量成正比的数值代入(49), 求出：

$$\frac{\dot{\varepsilon}_u}{2-m} = \frac{\dot{\varepsilon}_v}{2m-1} = \frac{-\dot{\varepsilon}_z}{m+1} = \frac{\dot{\gamma}_0}{2\sqrt{2}M}. \quad (51)$$

在简单加载情况下,按伊留申(А. А. Ильюшин)^[16]的意思, m 为常数,并且最终应变(51)的微分方程很容易积分出来。积分后,可求出最终应变数值:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u &= \frac{2-m}{2\sqrt{2} \cdot M} \gamma_0 = \varphi_u(m) \gamma_0, \\ \varepsilon_v &= \frac{2m-1}{2\sqrt{2} \cdot M} \gamma_0 = \varphi_v(m) \gamma_0, \\ -\varepsilon_z &= \frac{m+1}{2\sqrt{2} \cdot M} \gamma_0 = \varphi_z(m) \gamma_0. \end{aligned} \quad (52)$$

用 P 表示作用在如图 8 所示的单元钣料上的力,其方向沿 u 轴,用 Q 表示沿 v 轴的力,得:

$$P = \sigma_u \Delta v \cdot w, \quad Q = \sigma_v \Delta u \cdot w. \quad (53)$$

在冲压过程中,这些力由于金属硬化的结果将增大,同时由于单元的尺寸减小而减小。

当其中的一个力 P 或者 Q 到达最大数值时,双轴向拉伸(或者是拉伸及压缩)即变为非稳定性。稳定性的条件如下式:

$$dP > 0, \quad dQ > 0. \quad (54)$$

若 $|\sigma_u| > |\sigma_v|$, 在违背(54)中的第一个条件时,则双轴向应力状态将失去稳定性,这个条件的展开式为:

$$d\sigma_u \cdot \Delta v \cdot w + \sigma_u \cdot d(\Delta v) \cdot w + \sigma_u \Delta v \cdot dw > 0, \quad (55)$$

或者

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} + \frac{d(\Delta v)}{\Delta v} + \frac{dw}{w} > 0, \quad (56)$$

或

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} + d\varepsilon_v + d\varepsilon_z > 0. \quad (57)$$

根据不可压缩条件,最后求出:

$$\frac{d\sigma_u}{\sigma_u} > d\varepsilon_u. \quad (58)$$

若 $|\sigma_u| = |\sigma_v|$, 则第二个条件也能满足:

$$\frac{d\sigma_v}{\sigma_v} > d\varepsilon_v, \quad (59)$$

从(46),(52)及(58)式,得: