部編大學用書

橢圓函數概論

沈　璿編著

國立編譯館 主編
出版

部編大學用書

橢圓函數概論

沈　　　璿編著

國立編譯館 主編
出版

中華民國七十一年七月初版

橢圓函數概論

定價：精裝新臺幣壹佰捌拾元
　　　平裝新臺幣壹佰伍拾元

主編者：國立編譯館

編譯者：沈璿

出版者
印行者：國立編譯館

地址：臺北市舟山路二四七號
電話：三二一六一七一

經銷處：黎明文化事業公司

地址：臺北市信義路二段二一三號
電話：三九五二五〇八

序　言

橢圓函數論的主要項目，編者意有二：即㈠橢圓函數的雙週期性，㈡以雙週期比率的函數爲係數之三角級數的收斂性；前者主用於理論方面，以硏討與其他數學部分的聯繫及擴展，後者主用於實際應用方面，例如計算與橢圓函數相關聯的特殊函數之數值，尤其如推算與之有關聯的微分方程式之特解，因爲以雙週期比率的函數爲係數之三角級數，比較通常由二項定理所導出的三角級數，往往收斂迅速，易達所需數值的目標，編者基於上述二觀點，主要參考下列諸書，選擇簡明的資料，爲已修習初等複函數論者作成本書，希使讀者了解一般橢圓函數的概念，並能運用已知的論點，作更進一步的硏討，惟編者深慮其內容未能顯示此希冀，並有謬誤，尙祈各方賢達不吝指教，以資修補改善，幸甚幸甚。

竹內端三　橢圓函數論　1951

友近晉　橢圓函數論　1958

Copson, E. T. An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable 1955

Whittaker, E. T. and Watson, G. N. A Course of Modern Analysis 1965

Hille, E. Analytic Function Theory, Valume II 1962

Ford, L.R. Automorphic Functions 1929

Siegel, C. L. Topics in Complex Function Theory, Vols. I, II. 1971

對本書的出版，繆龍驥教授與以諸多協助，特誌之以表謝悃。

編　者　識

內 容 目 錄

第三章 ϑ函數

第四章 Jacobi 的橢圓函數

第五章　橢圓積分　橢圓無理函數及 Riemann 面

第六章　橢圓模函數

第一章　橢圓函數的一般性質

§1　週期函數

設有函數 $f(z)$ 及不等於零的常數 ω，並且對於 z 的任何值，必成立下列關係：

$$f(z+\omega)=f(z),$$

則稱 $f(z)$ 爲 z 的週期函數，ω 爲其週期。例如就初等函數 $\sin z$ 而言，因爲 $\sin(z+2n\pi)=\sin z$，其中 n 是不等於零的任意整數，故 $\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，……等都是其週期；但如取 $\sin(\pi-z)=\sin z$ 的關係，則因其左側未具有 $f(z+\omega)$ 的形式，我們不能由之而便得知 $\sin z$ 的週期性。

定理 1　設函數 $f(z)$ 有週期 ω，則 ω 的整數倍（除去零）都是其週期。

〔**證**〕由假設，可知對於 z 的任何值，下列關係成立：

$$f(z+\omega)=f(z) \tag{1.1}$$

今以 $z+\omega$ 代換（1.1）中的 z，則得

$$f(z+2\omega)=f(z+\omega)$$

更以（1.1）的右側代入上式的右側，便得

$$f(z+2\omega)=f(z)$$

從而知 2ω 亦是 $f(z)$ 的一週期；同樣反復推論，可知對於任意自然數 n，$n\omega$ 都是 $f(z)$ 的週期。又以 $z-\omega$ 代換（1.1）中的 z，則得

$$f(z)=f(z-\omega)$$

故 $-\omega$ 亦是 $f(z)$ 的一週期；於是，仿上推論，可知 $-n\omega$ 亦都是 $f(z)$ 的週期。

〔系〕一週期函數有無限個週期。

定理 2 設函數 $f(z)$ 有 ω 及 ω' 二週期，則 $\omega\pm\omega'$ 亦是其週期。

〔證〕由假設可知

$$f(z+\omega)=f(z),\quad f(z+\omega')=f(z) \qquad (1.2)$$

今以 $z+\omega$ 代換（1.2）的右式中之 z，而後利用其左式，得

$$f(z+\omega+\omega')=f(z+\omega)=f(z)$$

從而知 $\omega+\omega'$ 是 $f(z)$ 的一週期；又以 $z-\omega'$ 代換（1.2）的右式中之 z，得

$$f(z)=f(z-\omega')$$

更於此式，以 $z+\omega$ 代換 z，並利用（1.2）的左式，便得

$$f(z+\omega)=f(z+\omega-\omega')=f(z)$$

故 $\omega-\omega'$ 亦是 $f(z)$ 的一週期。

〔系〕設 $f(z)$ 有 ω 及 ω' 二週期，m 及 n 是二任意整數，則 $m\omega+n\omega'$ 都是 $f(z)$ 的週期。

由上述所得的結果，可知一週期函數有無限個週期；今在複平面上，以點的坐標表示週期，簡稱之爲**週期點**，則一週期函數有無限個週期點；我們將討究此等週期點的聚集狀態於次。

定理 3 設 $f(z)$ 是單值解析且不等於常數的一週期函數，則其無限個週期點只得聚集於無窮遠點，此外複平面上別無**聚點**[1)]。

〔證〕設在有限域內的一點 a 是 $f(z)$ 的聚點，則依聚點的定義，必有滿足下列不等式的二週期 ω_1, ω_2 存在，

$$|\omega_1-a|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |\omega_2-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

其中 ε 是任意小正數；於是，得

$$|\omega_1-\omega_2|\leqq|\omega_1-a|+|\omega_2-a|<\varepsilon$$

1) 聚點，Point of accumulation.

然因$\omega_1-\omega_2$亦是 $f(z)$的一週期，故上不等式乃顯示$f(z)$並有週期，其絕對值得爲任意小數。次設想在任意閉域G的內部，$f(z)$是正則函數，並有一點 z_0；更擇絕對值之逐漸減小的無限個週期 ω', ω''，……，而可使$z_0+\omega_1$，$z_0+\omega''$，……等點都位於G內；於是，因得

$$f(z_0)=f(z_0+\omega')=f(z_0+\omega'')=\cdots\cdots$$

故依**恒等定理**[1]，$f(z)$實是一常數；從而知關於單值解析且不等於常數的週期函數，其週期點必不能在有限的**數域**內形成聚點；然在此場合，依 Bolzano-Weierstrass[2] 的定理，$f(z)$ 的週期點必形成至少一個聚點，故此聚點必是無窮遠點。

今設 $f(z)$ 是單值解析的週期函數，並在複平面上連結原點與其一週期點爲直線，則依定理3，在此直線上所有的週期點不會聚集於一有限點，故其中必有最接近於原點的週期點，更申言之，在此直線上的原點之兩側，必各有距離相等而最接近於原點的一週期點存在，玆設ω爲其中的一週期點，則 $n\omega$（n爲任意整數）都是在同一直線上的週期點，並且除此諸點以外，別無週期點在此直線上，因爲在此直線上若更有一週期點Ω，則我們必可決定下式中的整數n及常數α，

$$\Omega=n\omega+\alpha,\quad 0<|\alpha|<|\omega|$$

從而知α點亦成爲同直線上的週期點，並且比ω點更接近於原點，然此結果顯係背於有關ω的假定，故不可能有如Ω的週期點存在。

若週期函數 $f(z)$ 除在通過O，ω二點的直線上以外，別無週期點，則稱$f(z)$爲**單週期函數**[3]，ω或$-\omega$爲其**基本週期**[4]；即得

---

1) 恒等定理，Theorem of identity.　2) Bernard Bolzano (1781-1848)，Karl Weierstrass (1815-1897).

3) **單週期函數**，Simply periodic function.

4) 基本**週期**，Fundamental period.

定理 4 單週期函數有二個基本週期，其他週期都可以其整數倍表示之。

其次，我們將檢討 $f(z)$ 除在前述的直線 $\overline{O\omega}$ 上以外尚有其週期點存在的場合。假設在直線 $\overline{O\omega}$ 上以外，尚有一週期點 ω_1，則可以 $\overline{O\omega}$，$\overline{O\omega_1}$ 爲二隣邊，規定一平行四邊形，並且可察知在此平行四邊

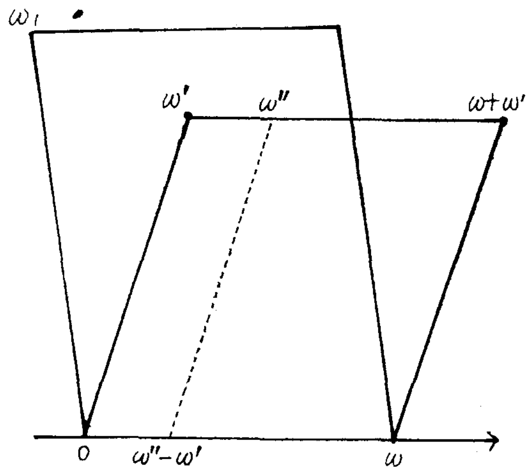


圖 1

形的各邊上及其內部，只有有限個週期點，因爲如有無限個週期點，則在此平行四邊形的邊上或其內部，必有聚點存在，此乃背於定理3，顯不能成立；又於有限個週期點中，必有最接近於 $\overline{O\omega}$ 邊的 ω' 點存在，故在以 $\overline{O\omega}$，$\overline{O\omega'}$ 爲二隣邊之平行四邊形內，自無週期點，而且在其周邊 $\overline{O\omega}$，$\overline{O\omega'}$，$\overline{\omega, \omega+\omega'}$ 上，顯亦無週期點；次在餘下的一周邊 $\overline{\omega', \omega+\omega'}$ 上，若其兩端點間有一週期點 ω'' 存在，則 $\omega''-\omega'$ 亦是一週期，然其代表點是在 $\overline{O\omega}$ 上，並且位於其兩端點之間，此乃背於 ω 點之定義，亦不能成立。

總括以上檢討的結果，可知在平行四邊形 $\omega\omega'$ 的數域，除其四頂點以外，其內部及周邊上都無週期點，故可以與 $\omega\omega'$ 完全相同的平行

四邊形，接連的於其上下左右四側覆蓋複平面全體，並得以

$$m\omega+n\omega',\ (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$$

表示其全部頂點，卽週期點全體，因爲如在任何平行四邊形的內部及其周邊上（除去兩端點）尙有週期點存在，則在首先的平行四邊形 $\omega\omega'$ 的對應位置上，亦必有週期點存在，然此乃背於前設的假定，不會發生。如上論述的函數$f(z)$稱爲**雙週期函數**[1]，ω與ω'爲其基本週期；卽得

定理 5　設雙週期函數$f(z)$的一對基本週期爲ω與ω'，則

$$m\omega+n\omega'$$

表示其週期全體，其中 m, n 爲二任意整數。

在以上的研究中，我們起先取任意的週期點，進行討論，最後推出一對基本週期ω與ω'，然未必能斷定$f(z)$的基本週期僅有此一對；今假設其另有一對基本週期Ω,Ω'存在，則因各個都是 $f(z)$ 的一週期，故必可寫成如下形式：

$$\Omega=\alpha\omega+\beta\omega',\qquad \Omega'=\gamma\omega+\delta\omega' \tag{1.3}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 各表示整數；又因以Ω,Ω'視爲一對基本週期，故ω,ω'必可表成如下形式：

$$\omega=\alpha'\Omega+\beta'\Omega',\qquad \omega'=\gamma'\Omega+\delta'\Omega' \tag{1.4}$$

其中 $\alpha',\beta',\gamma',\delta'$ 各表示整數，今自（1.3）及（1.4）消去Ω,Ω'，得

$$\left.\begin{aligned}\omega&=(\alpha\alpha'+\gamma\beta')\omega+(\beta\alpha'+\delta\beta')\omega'\\ \omega'&=(\alpha\gamma'+\gamma\delta')\omega+(\beta\gamma'+\delta\delta')\omega'\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

其中ω及ω' 的係數顯然都是實數，並且因ω,ω'是 $f(z)$ 的一對基本週期，故二週期點ω及ω'與原點O不會在同一直線上，因爲如ω,ω',O三點在同一直線上，則 $f(z)$ 係表示單週期函數，此乃背於所設的假定；於是，因ω及ω' 的二幅角相差不是π的整數倍，故由（1.5）的

1）雙週期函數，Doubly periodic function.

二式可察知

$$\alpha\alpha'+\gamma\beta'=1,\ \ \beta\alpha'+\delta\beta'=0,$$

$$\alpha\gamma'+\gamma\delta'=0,\ \ \beta\gamma'+\delta\delta'=1;$$

然因
$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha'+\gamma\beta' & \alpha\gamma'+\gamma\delta' \\ \beta\alpha'+\delta\beta' & \beta\gamma'+\delta\delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{vmatrix}=1,$$

卽
$$(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')=1,$$

而且其左側的二因式都表示整數，故必得

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1,\qquad \alpha'\delta'-\beta'\gamma'=1,$$

或
$$\alpha\delta-\beta\gamma=-1,\qquad \alpha'\delta'-\beta'\gamma'=-1$$

爰如具有一對基本週期 ω,ω' 的雙週期函數 $f(z)$，另有一對基本週期 Ω,Ω'，則可以 ω,ω' 表示之如次，

$$\Omega=\alpha\omega+\beta\omega',\qquad \Omega'=\gamma\omega+\delta\omega'$$

惟其係數須滿足 $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm1$ 的關係；實際在此情形，如以 Ω,Ω 表示 ω,ω'，則

$$\pm\omega=\delta\Omega-\beta\Omega',\qquad \pm\omega'=-\gamma\Omega+\alpha\Omega'$$

由是可察知

$$m\omega+n\omega'\qquad (m,n\text{表示整數})$$

與
$$m'\Omega+n'\Omega'\qquad (m',n'\text{ 表示整數})$$

二種形式所表示之數全部一致，故凡滿足 $\alpha\delta-\beta\gamma=\beta\gamma=\pm1$ 的關係之任何一對週期 Ω,Ω'，都可作爲一對基本週期。又依據初等數論[1]，因可作成 $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm1$ 的關係之四整數 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 間有無限組，故得

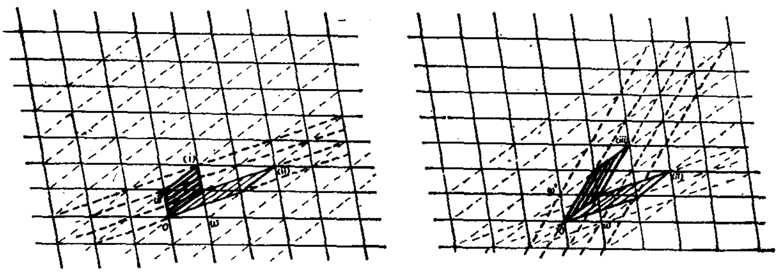
定理 6 一雙週期函數有無限對基本週期；若 ω,ω' 是其中任意一對基本週期，則其他各對基本週期 Ω,Ω' 都可表示之如次，

$$\Omega=\alpha\omega+\beta\omega',\qquad \Omega'=\gamma\omega+\delta\omega'$$

1） 數論，Theory of numbers.

惟其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 四整數滿足 $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm1$。

觀上檢討的結果，卽自不在同一直線上的無限個週期中，可選定一對週期 Ω,Ω' 爲基本週期，並得以 $m\Omega+n\Omega'$（m,n是整數）表示複平面上的週期點全部；今以幾何圖形解釋甫述的事實，卽以 $O\Omega$, $O\Omega'$ 爲二隣邊的平行四邊形，視如網目，而自同一格子點可作出無限個網目；例如（圖 2）中表示下列三種網目的 Ω,Ω' 等



（i） $\Omega=\omega+\omega'$, $\Omega'=\omega'$

（ii） $\Omega=2\omega+\omega'$, $\Omega'=\omega+\omega'$

（iii） $\Omega=\omega+2\omega'$, $\Omega'=\omega+\omega'$

圖　2

凡表示網目的各平行四邊形，稱爲**週期平行四邊形**[1)]

更依數論，若 ω,ω' 爲單值解析的週期函數 $f(z)$ 之任意二週期，而$\omega'\omega$是實數中的有理數，則 ω,ω' 都是同一週期的整數倍，因爲$\omega'\omega$表示有理數時，

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\nu'}{\nu}$$

1） 週期平行四邊形，Period-parallelogram.

其中 ν, ν' 是互質的二整數，故由上述所得的結果，

$$\frac{\omega}{\nu}=\frac{\omega'}{\nu'}\equiv\omega_0$$

從而得 $\omega=\nu\omega_0, \quad \omega'=\nu'\omega_0$

然因 ν, ν 是互質的二整數，故有無限個整數 m, n 得滿足下列不定方程式：

$$m\nu+n\nu'=1$$

因之，得 $m\nu\omega_0+n\nu'\omega_0=\omega_0$

即 $m\omega+n\omega'=\omega_0$

此乃顯示ω_0是 $f(z)$的一週期，故 ω, ω'都是ω_0的整數倍，即 $f(z)$表示單週期函數。又在此情形，如 $f(z)$ 不是常數，則$\dfrac{\omega'}{\omega}$不可能是實數中的無理數，因爲依據**連分數**的理論，若$\dfrac{\omega'}{\omega}$是無理數，則可以$\dfrac{\omega'}{\omega}$展開爲連分數，並得截取一漸近數$\dfrac{m}{n}$（m，n 是整數）使成立下列不等式：

$$0<\left|\frac{\omega'}{\omega}-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2},$$

或
$$0<\left|m'\omega-n\omega'\right|<\frac{|\omega|}{|n|}$$

其中ω是有限數，$|n|$可達任何大數，故結局以ε表示可達任何小的任意正數，而得

$$0<|m\omega-n\omega'|<\varepsilon,$$

然因m，n都是整數，故$m\omega-n\omega'$表示一週期；因之，上列不等式顯示有絕對值得爲任何小數的週期存在，此乃背於原假設；爰若 ω, ω'

爲雙週期函數 $f(z)$ 的一對基本週期，則$\dfrac{\omega'}{\omega}$不得爲有理數，亦不得爲無理數，即$\dfrac{\omega'}{\omega}$不得爲實數，故 $f(z)$的一對基本週期ω, ω' 的比率必是虛數；從而知複平面上的原點及 $f(z)$ 的二週點 ω, ω'是不在同一直線上。

總括以上研究的結果，可察知單值解析的週期函數是單週期函數，否則必是雙週期函數，乃不可能具有比雙週期更多獨立週期的函數；故得

定理 7 單值解析函數內不含 n 重（$n>2$）週期函數。

§2 橢圓函數及其記號

凡具有雙週期的單值解析函數，在複平面上有限區域內，除極點以外，別無其他奇點者，都稱爲**橢圓函數**。今爲進行研究此函數，首先說明本書所使用若干主要記號以及規約於次。

此後以 $2\omega_1, 2\omega_3$ 規定爲橢圓函數的一對基本週期；若以 $f(z)$ 表示橢圓函數，u 爲其變數，則

$$\left.\begin{aligned} f(u+2\omega_1)&=f(u),\\ f(u+2\omega_3)&=f(u) \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

且依§1所得結論，原點O與二週期點 $2\omega_1, 2\omega_3$ 係不在同一直線上，故如連結O與2ω及O與 $2\omega_3$ 各作線段，則以此二線段爲隣邊，可作一平行四邊形，並以之視如網目，而以無限個網目，於其上下左右各側接連的覆蓋全複平面。稱甫述的平行四邊形爲 $f(u)$ 的**基本週期平行四邊形**[1]。

1） 基本週期平行四邊形，Fundamental period-parallelogram.

其次，以雙週期 $2\omega_1, 2\omega_3$ 分為實數與虛數二部如次，

$$2\omega_1 = a_1 + b_1 i, \qquad 2\omega_3 = a_3 + b_3 i$$

其中 a，b 都表示實數；從而得

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{a_3 + b_3 i}{a_1 + b_1 i} = \frac{(a_1 a_3 + b_1 b_3) + (a_1 b_3 - a_3 b_1) i}{{a_1}^2 + {b_1}^2}$$

此後規定$\frac{\omega_3}{\omega_1}$的虛數部是正實數，即

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 > 0,$$

並用記號$Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) > 0$ 表示之；或就幾何圖形而言，規定在複平面上，以依循$O, 2\omega_1, 2\omega_3$三點的順序旋轉之方向（即與時針進行相反之方向）為正方向，如（圖 3）中所表示的此三點；又以$-2\omega_2$ 表示基本週期平行四邊形尚餘的一頂點；於是，原點O以外三頂點的記號間成立下列關係：

$$-2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3,$$

即
$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \qquad (2.2)$$

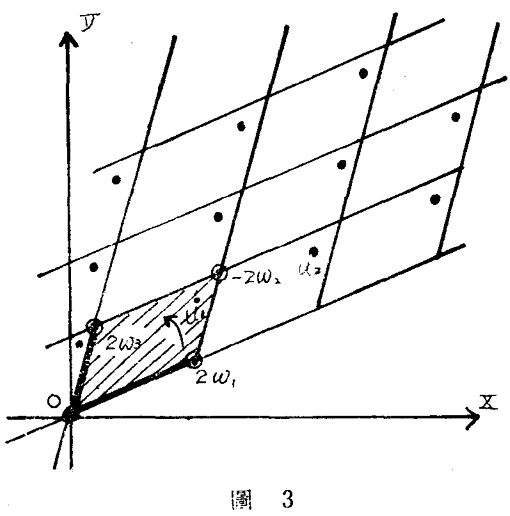


圖　3