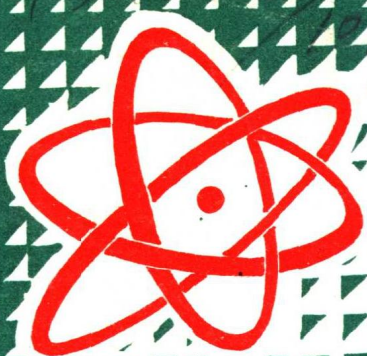
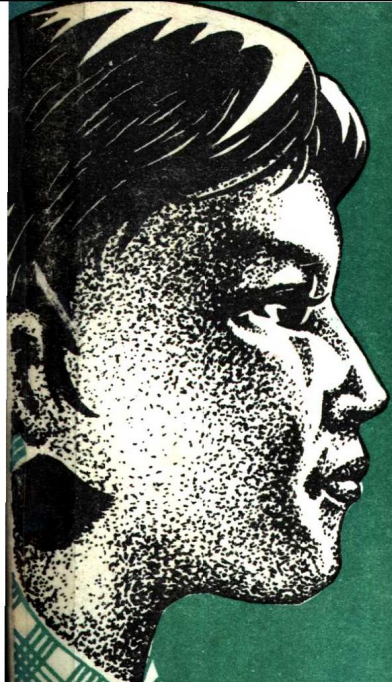




高中数学单元练习

北京四中数学组编



北京师范大学出版社



高中数学单元练习

北京四中数学组 编

北京师范大学出版社

1982年7月

高中数学单元练习

北京四中数学组 编

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

交通印刷厂排版

西安新华印刷厂印刷

•

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：8 字数：170千

1982年7月第一版 1982年7月第一次印刷

印数：1—500,000

统一书号：7243·58 定价：0.68元

出版说明

这是北京四中数学组老师多年的教学实践和经验总结。它有助于学生正确地理解和巩固概念、提高运算能力和逻辑思维能力。是中学数学老师和学生的一套较好的参考书。

本书仅写统编教材一、二、三册，供高中一、二年级使用。

目 录

第一章 幂函数、指数函数、对数函数	(1)
1.1 集合的补充练习	(1)
1.2 子集、交集、并集、补集的补充练习	(1)
1.3 单值对应、函数的补充练习	(4)
1.4—1.6的补充练习	(6)
1.7—1.8的补充练习	(7)
1.9 互为反函数的函数图象间关系的补充练习	(8)
1.10—1.11的补充练习	(9)
1.12指数方程和对数方程的补充练习	(10)
第二章 三角函数	(12)
2.1—2.2的补充练习	(12)
2.8—2.9的补充例题与练习	(13)
2.10的补充例题与练习	(15)
本章小结后补充练习	(16)
第三章 两角和与差的三角函数	(17)
3.1 两角和与两角差的三角函数	(17)
练习一	(19)
3.2 二倍角的正弦、余弦和正切	(19)
3.3 半角的正弦、余弦和正切	(19)
练习二	(25)
练习三	(26)
3.4 三角函数的积化和差与和差化积	(26)
练习四	(30)
练习五	(30)
关于条件等式的问题	(30)

练习六	(34)
关于三角形内角的三角函数问题	(35)
练习七	(39)
关于三角函数不等式和极值问题	(40)
练习八	(45)
第四章 反三角函数和简单三角方程	(46)
反三角函数	(46)
练习一	(52)
简单的三角方程	(53)
练习二	(58)
阶段练习	(58)
第五章 空间图形	(60)
一、平面	(60)
练习一	(62)
二、空间两条直线	(63)
练习二	(64)
三、空间直线和平面	(65)
练习三	(70)
四、空间两个平面	(73)
练习四	(75)
五、多面体和旋转体的面积和体积	(77)
练习五	(87)
立体几何单元练习题	(90)
第六章 二次曲线	(92)
曲线和方程	(92)
充要条件补充参考例题	(95)
圆的一般方程	(96)
练习一	(101)

椭圆	(102)
双曲线	(106)
练习二	(111)
抛物线	(112)
练习三	(117)
利用坐标轴的平移, 化简二元二次方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, 并讨论此二次曲线的主要性质	(118)
练习四	(124)
二次曲线复习的部分例题	(125)
练习五	(132)
二次曲线部分单元测验参考题	(133)
复习直线和圆的方程(补充)	(134)
直线和圆的方程的检查题	(142)
第七章 极坐标和参数方程	(143)
曲线的极坐标方程的补充例题	(143)
练习一	(149)
直角坐标系下曲线的普通方程和参数方程之间的互化补充	
例题	(151)
练习二	(161)
参数方程综合题例题	(162)
练习三	(170)
参数方程部分阶段练习题	(171)
第八章 不等式的性质和证明	(173)
不等式的性质	(173)
不等式的证明方法	(174)
练习一	(191)
用不等式求函数的最大值和最小值	(192)
含有绝对值的不等式(见书P67—69)	(194)

练习二	(196)
本章检查题	(197)
第九章 复数(补充材料)	(199)
复习有关“数”的知识	(199)
练习一	(200)
练习二	(200)
有关复数概念的一些问题	(201)
练习三	(203)
复数的几何意义的补充例题	(203)
练习四	(213)
练习五	(213)
第十章 排列、组合和二项式定理	(214)
排列与组合	(214)
练习一	(222)
排列与组合的检查题	(223)
数学归纳法(补充材料)	(223)
练习二	(227)
二项式定理	(228)
练习三	(236)
本章检查题	(237)
答案或提示	(239)

第一章 幂函数、指数函数、对数函数

1.1 集合的补充练习

判断下列各题中给出的对象是否属于集合 A 、 B 、 C ：

(1) 对象：1, 3, 4, 12。

集合： $A = \{\text{可被 2 整除的全体自然数}\}$ ，

$B = \{\text{可被 4 整除的全体自然数}\}$ ，

$C = \{\text{可被 3 整除的全体自然数}\}$ 。

(2) 对象：坐标平面上的点 $P_1(1, 2)$ 、 $P_2(0, 3)$ 。

集合： $A = \{(x, y) : 2x^2 - y = 0\}$ ，

$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5\}$ ，

$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$ 。

1.2 子集、交集、并集、补集的补充练习

1. 证明空集 ϕ 是任何集合的子集。

2. 用符号 “ $\subset$ ”、“ $\supset$ ”、“ $=$ ” 表示集合 A 与 B 的关系，

(1) $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ；

(2) $A = \{12 \text{ 的质因数}\}$ ， $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ；

(3) $A = \{\text{坐标平面上，以原点为中心，以 } r(r \geq 0) \text{ 为半径的圆上的所有点}\}$ 、 $B = \{\text{坐标适合于方程 } x^2 + y^2 = r^2 \text{ 的所有点}\}$ 。

(4) $A = \{0\}$ ， $B = \phi$ 。

3. 写出集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 的所有子集。

4. 已知两个非空集合 $A \neq B$ ，在__处填上适当的符号 ($\supset$ 、

$\subset, \subseteq, =$ 。

(1) $A \cap B _ A$;

(2) $A \cap B _ B \cap A$;

(3) $B _ A \cup B$;

(4) $\phi _ B \cap A$;

(5) $A \cap B _ A \cup B$ 。

5. 用列举法表示下面的集合。

(1) $A = \{x: (x+1 < 6) \cap (x > 3), x \in N\}$;

(2) $B = \{x: (x+2 < 10) \cap (x+1 > 5), x \in N\}$ 。

6. $A = \{x: x^2 - 3x \leq 0\}$, $B = \{x: x^2 - 5x + 4 < 0\}$,

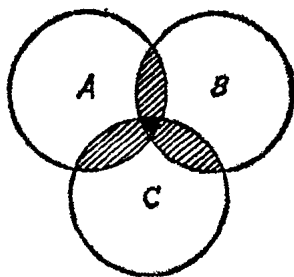
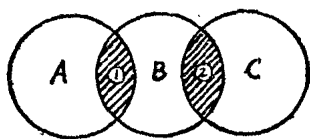
$C = \{x: x^2 - 4 > 0\}$ 。求 (1) $A \cap B$, (2) $A \cup B$, (3) $\bar{A}$,
(4) $\bar{B}$, (5) $A \cap \bar{B}$, (6) $\bar{A} \cup B$, (7) $\bar{A} \cap \bar{B}$, (8) $\overline{A \cap B}$,
(9) $(A \cap B) \cup C$ 。

7. 已知 A, B 是以某些实数为元素的两个集合, $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$ 的交集是 $\{2, 5\}$, 求实数 a 的值, 并求集合 A, B 的并集。

8. 关于集合 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 的子集 A, B , 已知下面的事实: $\bar{A}, \bar{B}$ 分别表示 A, B 的补集。 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\bar{A} \cap B = \{4, 6, 8\}$ 。求 (1) $A \cup B$ 的元素的个数; (2) B 的元素的个数; (3) A 的元素的个数。

9. 下面图中 A, B, C 表示集合, 用 A, B, C 之间的关系表示:

(1) 阴影部分①、②; (2) 阴影重叠部分; 阴影部分, 非阴影部分。



第9题

10. 用 Venn 图验证下列各式:

$$(1) A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A;$$

$$(2) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(3) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

11. 设全集为 I , 用 Venn 图验证下列各式:

$$(1) A \cup \bar{A} = I;$$

$$(2) A \cap \bar{A} = \phi;$$

$$(3) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$(4) \overline{(\bar{A})} = A;$$

$$(5) A \cup I = I, A \cap I = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A.$$

12. $n(x)$ 表示集合 X 所含的元素的个数, 试用 Venn 图及面积概念验证:

$$(1) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B);$$

$$(2) n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

13. 利用上题的结论, 解下列问题:

(1) 已知全集 $I = \{\text{由 1 到 200 的整数}\}$, $A = \{\text{一切 9 的倍数}\}$, $B = \{\text{一切 6 的倍数}\}$, 求 $n(A)$ 、 $n(B)$ 、 $n(A \cup B)$ 的值;

(2) 某年级有 48 人参加了数学或物理小组, 其中, 参加数学小组的有 32 人, 参加物理小组的有 28 人, 问同时参加数学和物理小组的有多少人?

(3) 有 a 、 b 、 c 三本新书, 至少读过其中一本的有 18 人, 读过 a 、 b 、 c 的分别为 9、8、11 人。同时读过 a 、 b 的 5 人, 读过 b 、 c 的 3 人, 读过 c 、 a 的 4 人, 问 a 、 b 、 c 全都读过的有几人?

14. 设全集为 I , 证明:

$$(1) A \subset E \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A};$$

$$(2) A \subset E \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \phi.$$

1.3 单值对应、函数的补充练习

1. 试分析映射与函数的关系。

2. 某路公共汽车共 20 站, 票价 1—5 站五分, 6—10 站一角, 11—15 站一角五分, 16—20 站二角, (1) 试在站数的集合 A 与票价的集合 B 间建立一种 A 到 B 的映射; (2) 指出这一映射原象的集合和象的集合; (3) 象为一角五分的原象是哪些? 原象为 17 站的象是什么?

3. 已知 $f_1(x) = x^2$. 定义域为 R , $f_2(x) = x^2$ 定义域为 N , 指出这两个函数的区别, 并分别画出它们的图象。

4. 在自变量的哪一个集合内, $f(x)$ 和 $g(x)$ 才能视为同一个函数:

$$(1) f(x) = \frac{x^2}{x}, \quad g(x) = x;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = x, g(x) = \sqrt[3]{x^3};$$

$$(4) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x;$$

$$(5) f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases};$$

$$(6) f(x) = |x+1|, g(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq -1) \\ -x-1 & (x < -1) \end{cases};$$

$$(7) f(x) = |x| + |x+1|, g(x) = 2x+1.$$

5. 在 R 上定义三个函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 。已知 $A = \{x: f(x) = 0\}$, $B = \{x: g(x) = 0\}$, $C = \{x: h(x) = 0\}$ 。(1) 试用 A 、 B 、 C 表示使 $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0$ 成立的 x 集合;
(2) 试用 A 、 B 、 C 表示使 $f(x) = 0$ 与 $g(x) \cdot h(x) = 0$ 同时成立的 x 的集合。

6. (1) 若 $f(x) = 2x+1$, 求 $f[f(x)]$;

(2) 若 $f(3x+1) = 4x+3$, 求 $f(x)$;

(3) 若 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x > 0) \\ \pi & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ 求 $f[f(f(-1))]$;

(4) 若 $f(x) = 9x+1$, $g(x) = x^2$, 求 $f[g(x)] = g[f(x)]$ 的所有值。

7. 求出下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$; (2) $y = \frac{\sqrt{-x}}{2x^2 - 3x - 2}$;

(3) $y = (x^2 + 2x - 3)^{\frac{3}{2}}$; (4) $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x+1}}$;

(5) $y = \sqrt{|x|-2}$; (6) $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1-x}}$

8. 已知 $f(x) = (m^2 + 2m)x^{m^2 + m - 1}$, 当 m 是何值时:

(1) $f(x)$ 是正比例函数;

(2) $f(x)$ 是反比例函数;

(3) $f(x)$ 是二次函数。

9. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象时, 如何画出下列各函数的图象? (1) $y = -f(x)$; (2) $y = f(-x)$; (3) $y = |f(x)|$; (4) $y = f(|x|)$; (5) $y = af(x)$; (6) $y = f(x) + b$; (7) $y = f(x + a)$

10. 作出下列函数的图象:

$$(1) y = |x|; (2) y = |x^2 - 1|;$$

$$(3) y = \begin{cases} 1 & (x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases};$$

$$(4) y = \begin{cases} 1 & (x \leq -1) \\ 0 & (-1 < x < 1) \\ -1 & (x \geq 1) \end{cases};$$

$$(5) y = x^2 - 2|x| - 1; (6) y = |x + 5| + |x - 1|.$$

1.4—1.6的补充练习

1. 指出下列幂函数的定义域、单调区间和奇偶性, 并画出草图。

$$(1) y = x^6; (2) y = x^{-6};$$

$$(3) y = x^5; (4) y = x^{-5};$$

$$(5) y = x^{\frac{1}{2}}; (6) y = x^{-\frac{1}{2}}.$$

2. 指出幂函数 $y = x^n (n \in J)$ 的图象具有下列特点之一的 n 值。

- (1) 通过原点, 图象是上升的;
 - (2) 不通过原点、不与坐标轴相交, 图象是下降的;
 - (3) 图象关于 y 轴对称, 并与坐标轴相交;
 - (4) 图象关于 y 轴对称, 不与坐标轴相交;
 - (5) 图象关于原点对称, 并且通过原点;
 - (6) 图象关于原点对称, 并且不过原点。
3. 函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 与函数 $x = y^2$ 的图象有什么关系; 函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 与函数 $x = y^3$ 的图象有什么关系。
4. 证明函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数; $y = x^4$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数。
5. (五) 若 $x \in R$, 证明:
- (1) $F(x) = 3x^3 - x + \sqrt[3]{x}$ 是奇函数;
 - (2) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ 是偶函数。
6. 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-a, a]$, 试证 $f(x)$ 总可表示成定义在 $[-a, a]$ 上的一个偶函数与一个奇函数的和。

1.7—1.8的补充练习

1. 回答:
- (1) 一次函数的反函数仍是一次函数吗? 为什么?
 - (2) 反比例函数的反函数仍是反比例函数吗? 为什么?
2. (1) 写出函数 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的定义域;
- (2) 求出函数 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的反函数;
3. (1) 写出函数 $y = \frac{x-4}{x+5}$ 的定义域;

(2) 求出其反函数及反函数的定义域、值域;

(3) 原函数的值域。

1.9 互为反函数的函数图象间关系的补充练习

1. (1) 已知 $16 < 2^x < 128$, 求整数 x ;

(2) x 是什么数值时 $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x}$ 的值大于 $\frac{1}{27}$;

(3) 设 $a^{\frac{2}{3}} > a^{\sqrt{2}}$, 求 a 的值的范围;

(4) 若 $a^{2x} = \sqrt{2} + 1$, 求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值。

2. 函数 $y = a^{x^2 - 3x + 2}$ ($a > 1$)。

(1) 在什么区间内是增加的;

(2) 在什么区间内是减小的;

(3) 有无极值, 如有试求出来。

3. 已知函数 $y = \frac{(1 + 2^x)^2}{2^x}$ 。

(1) 指出它的定义域;

(2) 证明它是偶函数。

4. 已知函数 $y_1 = a^{2x^2 - 1}$ 和 $y_2 = a^{x^2 + 3x - 3}$, 当 x 为何值时, (1) $y_1 < y_2$; (2) $y_1 = y_2$; (3) $y_1 > y_2$ 。 ($a > 0, a \neq 1$)

5. 作 $y = 2^{|x|}$ 的图象。

6. 证明:

(1) $a^a b^b > a^b b^a$ (其中 $a > b > 0$);

(2) $a^{2a} b^{2b} c^{2c} > a^{b^2 + c^2} b^{c^2 + a^2} c^{a^2 + b^2}$ (其中 $a > b > c > 0$)。

1.10—1.11的补充练习

- 若 $\log_a x < \log_a (x-1)$, 求 a 的取值范围;
 - 若 $\log_{x+4}(x^2+4x) = 1$, 求 x ;
 - $\log_a(\log_{\frac{5}{3}} 0.8)$ 是否有意义 ($a > 0, a \neq 1$)?
- 函数 $y_1 = \log_2(2x^2 - 3x + 1)$ 和 $y_2 = \log_2(x^2 + 2x - 5)$ 如果
 - $y_1 = y_2$; (2) $y_1 < y_2$; (3) $y_1 > y_2$ 求 x 的值或范围 ($a > 0, a \neq 1$).
- 已知函数 $y_1 = |\log_{\frac{1}{2}} x|$, $y_2 = \lg|x|$, $y_3 = \log_3 x^2$ 分别画出它们的图象.
- 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$, 指出它的定义域, 并证明它是奇函数.
- 证明:
 - $\frac{\log_a N}{\log_a M} = \frac{\log_b N}{\log_b M}$; (2) $\log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}$;
 - $\log_a N = \frac{\log_a N}{K}$; (4) $\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$;
 - $\log_{a^n} b^n = \log_a b$.
- 比较 $\log_3 5$ 和 $\log_9 26$ 的大小;
 - 求证 $(\log_2 3 + \log_4 9 + \log_8 27 + \dots + \log_{2^n} 3^n)$.
$$\log_9 \sqrt[5]{32} = \frac{5}{2}$$
- 证明不等式:

$$(1) \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{\pi} 2} > 2,$$