

实用最优控制理论

SHIYONGZUIYOU
KONGZHILILUN

● 贺建勋 连瑞兴 编著



厦门大学出版社

实用最优控制理论

贺建勋 连瑞兴 编著

厦门大学出版社

1989年

内 容 简 介

本书介绍线性二次型的最优控制，求解最优控制的变分方法；动态规划方法；最小值原理；最优调节系统理论；随机最优控制简介（主要是LQG问题的最优控制）；最优控制理论的应用。各章都配备有一定数量的习题，供读者练习和深入理解教材之用。

本书可作为高等院校的教材或教学参考书，对于科研工作者和工程技术人员也是一本很好的入门书。

实 用 最 优 控 制 理 论

贺建勋 连瑞兴 编著

厦门大学出版社出版发行

厦门大学印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 15.75 印张 354 千字

1989年 第1版 1989年5月 第1次印刷

印数 1—1000册

ISBN 7-5615-0178-1/F·33

定价：3.15元

目 录

第一章 绪 论

- 1.1 最优控制理论的发展概况..... (1)
- 1.2 最优控制问题的实例..... (2)
- 1.3 动态系统的状态空间表示法..... (14)
- 1.4 最优控制问题的数学描述..... (17)

第二章 线性二次型的最优控制

- 2.1 离散时间线性二次型的最优控制..... (23)
- 2.2 离散时间线性系统的可控性与可观测性..... (28)
- 2.3 离散时间线性二次型的最优控制律..... (36)
- 2.4 连续时间线性二次型的最优控制..... (50)

第三章 用古典变分法求解连续动态系统的最优控制问题

- 3.1 泛函与变分的基本概念..... (74)
- 3.2 泛函极值的必要条件——欧拉方程..... (77)
- 3.3 用古典变分法求解最优控制问题..... (84)
- 3.4 对各种终端边界条件的讨论..... (93)

第四章 动态规划方法

- 4.1 最优性原理..... (102)
- 4.2 动态规划方程..... (104)
- 4.3 用动态规划方法求最优控制..... (106)
- 4.4 最优控制的存在与唯一性定理..... (108)
- 4.5 对各种边界条件的讨论..... (111)

第五章 最小值原理

- 5.1 最小值原理的动态规划推导..... (115)
- 5.2 用最小值原理求解最优控制的步骤..... (118)
- 5.3 几点说明..... (122)
- 5.4 三种基本方法的比较..... (126)

第六章 最优调节系统

- 6.1 线性定常二次型的最优调节系统..... (131)
- 6.2 线性时变二次型的最优调节系统..... (141)
- 6.3 非线性定常系统的最优稳定控制..... (146)
- 6.4 非线性非定常系统的最优稳定控制..... (152)

第七章 随机线性二次型的最优控制

- 7.1 线性最小方差估计及线性递推滤波..... (162)
- 7.2 关于离散随机线性二次型控制问题的分离定理..... (179)
- 7.3 时间无限的随机线性定常二次型的最优控制..... (183)
- 7.4 连续时间随机线性二次型的最优控制..... (184)

第八章 最优控制理论的应用

- 8.1 在工程与技术科学中的某些应用..... (197)
- 8.2 在社会经济中的某些应用..... (219)
- 8.3 在军事科学中的某些应用..... (228)
- 8.4 在可更新资源的最优管理中的某些应用..... (232)

参考文献..... (247)

第一章 绪 论

引 言

本章首先概述最优控制理论的发展概况,并引入最优控制问题的一些实例。这些选自不同的应用领域的例子,并非是标准和完整的。由于问题研究的需要而化为某种标准形式,并需要用到状态变量,状态空间和状态方程的概念。我们在第三节将介绍这些概念;第四节阐述一般最优控制问题的数学表达形式。

1.1 最优控制理论的发展概况

最优控制理论是现代控制理论的先声和它的重要组成部分。如果说现代控制理论是产生于本世纪60年代初期,则最优控制理论在50年代后期就已出现和形成了。这方面开创性的工作主要是贝尔曼(R. E. Bellman)的动态规划^[1]和庞特里雅金(П. С. Понтрягин)等人的最大值原理^[2,3]。无疑地,最优控制理论是在现代科学技术发展的基础上,由于需要解决工程技术中的一系列实际问题引起的。这方面先期的工作自然应该追溯到维纳(N. Wiener)等人奠基的控制论(Cybernetics),这是由于第二次世界大战反对法西斯的现代化战争的需要而创立的。维纳在战后1948年发表了他的《控制论——关于动物和机器中控制与通信的科学》。他把控制论定义为在机构、有机体和社会中的控制与通信的科学。在书中引进了信息、反馈和控制等这些重要的概念,为最优控制理论的诞生和发展奠定了基础。钱学森1954年所著的《工程控制论》(Engineering Cybernetics)^[18]直接促进了最优控制理论的发展和形成。事实上,他在书中讨论的“最优开关曲线”和“满足指定积分条件的控制设计”正是最优控制理论的素材。

动态规划是贝尔曼50年代中期为了解决多阶段决策过程而提出来的。这个方法的关键是建立在他提出的所谓“最优性原理”基础之上的,这个原理归结为用一组基本的递推关系式使过程连续地最优转移。它可以求这样一类的最优解,这些最优解是以计算每个决策的后果并对今后的决策制定最优策略为基础的,但在求解最优解时要按倒过来的顺序进行,即从最终状态开始到初始状态为止。动态规划对于研究最优控制理论的重要性在于: i) 它可以得出离散时间系统的理论结果,如线性二次型控制问题的处理是其特例; ii) 用动态规划方法可以得出离散时间系统的迭代算法; iii) 动态规划的连续形式可以给出它与古典变分法的联系;在一定条件下,也可以给出它与最大(小)值原理的联系。这样就使得三种主要解决最优控制问题的方法在一定的条件下得以沟通。使我们在解决实际问题时,根据问题所满足的条件,考虑方法上的选择或采用多种方法使结果得到验证。

庞特里雅金于1956—1958年间创立的最大值原理是最优控制理论的主要组成部分和该理论发展史上的一个里程碑。它是解决最优控制问题的一种最普遍的有效方法。因为

它放宽了条件,使得许多古典变分法和动态规划方法无法解决的工程技术问题由此得以解决。同时庞特里雅金在他的著作^[2]中已经把最优控制理论初步形成了一个完整的体系。

当然,新出现的许多工程技术问题中的最优控制问题,有些还是能用古典变分法解决的。在这种情况下,采用古典变分法解决问题就更加简便和容易。因此,古典变分法在解决新的实际问题中获得了新的发展。

以上就是为了解决最优控制问题而发展起来的一些主要理论和常用的方法。

所谓最优控制问题,就是寻找一个控制系统的最优控制方案或最优控制规律,使系统能最优地达到预期的目标。例如,在恒温的自动控制过程中,提出这样的问题:如果出现了干扰,产生了偏差,用什么办法可以最快地消除偏差使系统恢复到原来的平衡状态?又如,在液面恒值的自动控制问题中,当液面由于某种干扰而偏离给定值时,用什么办法可以使液面最快地恢复到原来的给定值?再如在雷达高炮随动系统中,也可以提出类似的问题:当发现敌机后,如何以最快的速度跟踪目标,击落敌机?在这些例子中,控制的目标除了最后要求消除误差之外,还要求以最快的速度消除误差。这类问题,我们称之为快速最优控制问题。自然,在各种各样的实际控制问题中,可以根据不同的控制目标,提出其他各种不同的性能指标。例如,研究飞机的最优着陆时,可以提出如何控制升降舵的偏转,使飞机着陆安全舒适可靠?考虑飞向月球的火箭时,如何控制火箭飞行的最优高度,而使消耗的燃料最少?又如发射N级火箭时,如何规划各级火箭的质量,使火箭总的质量最小等等。总之,现代控制理论的中心课题,是依照各种不同的控制对象和人们预期要达到的目的而提出的性能指标来分析,设计出在一定意义上的最优控制系统。为了要完成这一任务,必须建立受控对象的数学模型、了解受控对象当前的状态、以及系统所受到的其它约束条件等等。简而言之,最优控制理论所要解决的问题是:按其受控对象的动态特性(数学模型),选择一个容许的最优控制,使得受控对象能按某种要求运转,而使性能指标取最优(最小或最大)值。从数学的观点来看,就是要求解一类带有某种约束条件的泛函极值问题。

1.2 最优控制问题的实例

首先我们提出一些最优控制问题的实例,它们选自各个不同的应用领域,目的是为了说明控制问题产生和来源的多样性、应用的广泛性以及它们的重要性,同时阐明问题的各种不同数学描述形式。自然,这些例子不是很完全的,也不一定是各个领域中最重要或最有代表性的,我们只是选择一些比较简单的问题作为说明问题的实例。

例1 一个生产计划问题

首先介绍一个与经济学有关的生产计划的问题。设 T 是一个固定的时间, $x(t)$ 表示时刻 $t(0 \leq t \leq T)$ 时商品的存货量, $r(t) \geq 0$ 表示在时刻 t 时对商品的需求率。假定 $r(t)$ 是一个已知的在 $0 \leq t \leq T$ 上定义而且连续的时间函数,设 $u(t)$ 表示在时刻 $t(0 \leq t \leq T)$ 时的生产率,函数 u 将由生产计划人员决定,它就是生产计划或者叫做控制。我们一般取 u 为 $0 \leq t \leq T$ 上的分段连续函数。在上述假设下,存货量 x 由微分方程

$$\frac{dx}{dt} = -r(t) + u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

所决定，其中 x_0 是原来的存货量水平，且 $x_0 > 0$ 。由 $x(t)$ 的实际意义，显然必须选取生产计划 u ，使得

$$x(t) \geq 0 \quad (1.2)$$

对一切 $0 \leq t \leq T$ 成立。其次，因为既要保持一定的存货量，而生产能力又受到设备的限制，于是有理由要求函数 u 满足约束条件

$$0 \leq u(t) \leq A \quad (1.3)$$

对一切 $0 \leq t \leq T$ 成立，这里 $A > 0$ 表示最大可能的生产率。对一切满足 (1.3) 的生产计划 u 并且使相应于 (1.1) 的解存在而且满足 (1.2) 时，就把 u 叫做容许计划或容许控制。

假如 A 充分大时，则确实存在容许计划。例如，若取

$$M = \sup\{r(t) : 0 \leq t \leq T\},$$

而 $A > M$ ，则 $u(t) = A$ 就是一个容许计划。今后，我们将假定容许计划是存在的。

设 $h(u(t))$ 表示单位时间的生产代价，它是生产率 $u(t)$ 的函数；又设 b 表示单位时间储存单位商品的代价， $b > 0$ 。

于是计算这个系统在时刻 t 时单位时间的代价为 $f(t, x(t), u(t)) = h(u(t)) + bx(t)$ ，因此，总的代价由

$$J(u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.4)$$

给定，这里 $x(t)$ 是方程 (1.1) 相应于容许生产计划 u 的解。我们采用记号 $J(u)$ 表示总的代价，它表示性能指标，因为当需求速度 $r(t)$ 和初始存货量 x_0 被指定以后，这个代价只依赖函数 u 的选取。我们这里得到一个泛函 $J(u)$ 的例子，它对于给定的函数类中每一个函数 u 是一个确定的实数。

对生产计划人员来说，问题是如何选取一个容许控制 u ，使得总的代价 $J(u)$ 取极小值。

例 2 国民收入的最优积累率问题

在社会主义计划经济中，国民收入分为消费基金和积累基金两部分，而

$$\text{积累率} = \frac{\text{积累基金}}{\text{国民收入}} \times 100\%,$$

它可以由政府有计划地进行控制。控制得好，可以促进国民收入和消费水平不断提高，经济快速增长；积累率过高，影响劳动积极性，经济增长和人民生活水平反而下降。因此如何选取合理的积累率，是一个很有意义的问题。设 $x(t)$ 表示时刻 t ($0 \leq t \leq T$) 的国民收入； $u(t)$ 为时刻 t 的积累率，它是一个可以控制的变量； $a(t)$ 为时刻 t 的积累效果系数，表示单位积累基金在单位时间内产生的国民收入的增长额。于是单位时间内国民收入的增长额为

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t)u(t), \quad (1.5)$$

积累效果系数 $a(t)$ 主要受到积累率 $u(t)$ 的影响，根据我国历史统计资料分析，它们近

似于直线关系, 大体可以描述为

$$a(t) = a - bu(t), \quad (1.6)$$

其中 $a \doteq 0.958$, $b \doteq 1.897$, 将 (1.6) 式代入方程 (1.5) 中, 可得

$$\frac{dx}{dt} = (a - bu(t))u(t)x(t). \quad (1.7)$$

设 x_0 为原来的国民收入, 则

$$x(0) = x_0 \quad (1.8)$$

由于国民收入应为正的增长, 由 (1.5), 有 $\frac{dx}{dt} \geq 0$, 从而 $a(t) \geq 0$, 于是由 (1.6) 和积累率的定义有

$$0 \leq u(t) \leq \frac{a}{b} (\doteq 0.505). \quad (1.9)$$

可以根据不同的要求, 提出不同的性能指标, 若我们希望在考虑的计期间 $[0, T]$ 内使国民收入的增长总额最大, 这时就使问题成为如何选择满足 (1.9) 的容许控制 $u(t)$, 使得泛函

$$J(u) = \int_0^T \dot{x}(t) dt = \int_0^T [a - bu(t)]u(t)x(t) dt \quad (1.10)$$

取极大值。

若要求在计期间 $[0, T]$ 内使消费基金增长最大, 以最大限度地提高人民的物质文化生活水平, 由于消费基金 = 国民收入 - 积累基金, 因此问题就成为如何选择 $u(t)$ 使泛函

$$J(u) = \int_0^T (1 - u(t))(a - bu(t))u(t)x(t) dt \quad (1.11)$$

取极大值。

例 3 化学工程问题。

设 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 表示 n 个物质在时刻 t 的浓度, 在一个反应器中这 n 个物质同时发生化学反应, 设反应的速度由微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, \dots, x_n, \theta(t), P(t)), \quad (1.12)$$

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n$$

所决定, 其中 $\theta(t)$ 是时刻 t 时反应器内的温度, $P(t)$ 是时刻 t 时反应器内的压力, 我们能够在每个时刻控制温度 $\theta(t)$ 和压力 $P(t)$, 它们满足约束条件

$$\begin{cases} \theta_1 \leq \theta(t) \leq \theta_2, \\ P_1 \leq P(t) \leq P_2, \end{cases} \quad (1.13)$$

其中 θ_1, θ_2 和 P_1, P_2 是常数, 它们分别表示温度和压力可达到的最小值和最大值。

我们设反应从时刻 0 开始, 连续进行一个时期 T , 在这个时刻 T 时的浓度为 $x_1(T), \dots, x_n(T)$, 与每一产品相联系的是一个经济值或叫价格 $c_i (i = 1, \dots, n)$, 价格 c_i 可以是负的, 例如出现废品的情形, 必须除掉某些损耗, 于是最后的产值是

$$V(P, \theta) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(T). \quad (1.14)$$

对于给定的一个初始浓度集合 x_1^0 ，最后产值由选取的函数 P 和 θ 完全决定，只要函数 G_i 具有某些适当的性质，因此记号 $V(P, \theta)$ 是另一个泛函的例子，对于某个集合中的每一对函数 P, θ ，有一个实数相对应， $V(P, \theta)$ 表示性能指标。

这里的问题是：要求在区间 $[0, T]$ 上选取分段连续函数 P 和 θ 满足 (1.13)，使得 $V(P, \theta)$ 取最大值。

上述问题的一种变形如下：不要求反应连续进行一个固定时间 T ，而是取反应物之一，比如说 x_1 达到预先指定的浓度 x_1^* 时，我们停止反应，这时终止时刻 t_* 不是预先固定的，而是方程 $x_1(t) = x_1^*$ 的最小正根，现在的问题是使

$$V(P, \theta) = \sum_{i=2}^n c_i x_i(t_*) - K^2 t_*. \quad (1.15)$$

取最大值，其中项 $K^2 t_*$ 表示反应器运行的代价。

问题的另外一种变形是：当反应物中的几个达到预先指定的浓度，比如说， $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_j = x_j^*$ 时，停止反应，最后的产值现在是：

$$\sum_{i=j+1}^n c_i x_i(t_*) - K^2 t_*. \quad (1.16)$$

我们注意到，在最后的两种变形问题中，当处理极大值问题之前，必须考虑另外的问题，亦即使用容许函数类中的压力 P 和温度 θ 时是否可以达到所要求的最终浓度。

例 4 连续搅拌槽调温问题

考察一连续搅拌槽如图所示，槽内原放 0°C 的液体，现在入口处流进温度为 $u(t)$ 的液体每小时 1 公斤，出口处流出等量的液体使槽内液体的液面不变，槽内连续搅拌使液体经常处于完全混合状态。要求在 1 小时以后把槽内液体的温度提高到 40°C 。设温度 $u(t)$ 的分布不同，把槽内的液体从 0°C 提高到 40°C 散失掉的热量也不同。我们的问题是求一个最优的温度分布 $u^*(t)$ ，使得液体的温度在 1 小时后，从 0°C 提高到 40°C 而散失掉的热量最小。

设槽内温度为 $x(t)$ ，温度的变化速度与温度差 $[u(t) - x(t)]$ 成正比。为了简化起见设比例常数为 1，于是得到 $x(t)$ 和 $u(t)$ 应满足微分方程：

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - x(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 40; \quad (1.17)$$

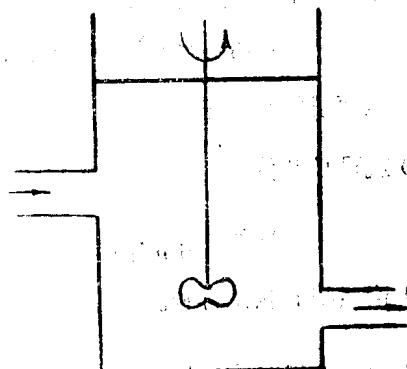


图 1-1

散失掉的热量为

$$J(u) = \int_0^1 [x^2(t) + su^2(t)] dt, \quad (1.18)$$

其中 s 是某个确定的正常数。我们的问题是求一种最优的温度分布 $u^*(t)$ ，使槽内液体温度从 0°C 提高到 40°C ，而散失的热量 $J(u)$ 最小。用控制理论的术语来说，就是要求一个最优控制 $u^*(t)$ ，使系统的状态由 $x(0)=0$ 转移到 $x(1)=40$ ，并使目标函数 $J(u)$ 最小。

例 5 (串联提取过程) 考虑化学工程中的 n 级串联提取过程，如下图所示。

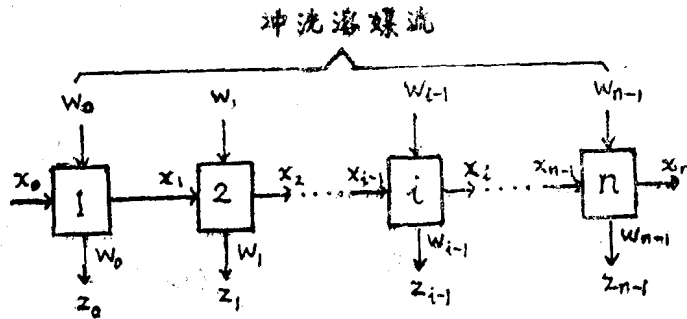


图 1-2

设 x_0 代表开始溶解时溶质的浓度，第 i 级剩下的溶质的浓度是 x_i ； w_{i-1} 是单位时间内加入到第 i 级的溶媒量； z_{i-1} 表示第 i 级出口处单位冲洗溶媒中所带走的溶质。

每一级提取过程都是一个平衡阶段，由于 x_{i-1} 与 x_i 之间有一定的平衡关系，现我们假定是线性关系：

$$z_{i-1} = mx_i, \quad (1.19)$$

对于任一第 i 级的溶质的平衡方程是

$$v(x_{i-1} - x_i) = w_{i-1}z_{i-1}, \quad (1.20)$$

其中 v 表示溶质的体流速。将 (1.19) 代入 (1.20) 式，并令 $u_i \triangleq w_i$ ， $m' \triangleq \frac{m}{v}$ ，则 (1.20) 就可以化为

$$x_i = \frac{x_{i-1}}{1 + m'u_{i-1}}, \quad (i=1, \dots, n) \quad (1.21)$$

这就是所述系统的状态方程。

由于此系统提取溶质的总量为 $\sum_{i=0}^{n-1} w_i z_i = v(x_0 - x_n)$ ，所用溶媒总量为 $\sum_{i=0}^{n-1} w_i$ ，假设 α

是提取的溶质的单价， β 是用单位溶媒所需的费用，于是 n 级提取的收益为：

$$P = \alpha v(x_0 - x_n) - \beta \sum_{i=0}^{n-1} w_i,$$

为了处理方便起见, 令 $\gamma \triangleq \frac{P}{av}$, $\beta \triangleq \frac{\beta}{av}$ 和已令 $w_i = u_i$ 代入上式, 就得

$$J = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) - \beta \sum_{i=0}^{n-1} u_i, \quad (1.22)$$

这就是我们的目标函数。

我们的问题是: 在约束条件 (1.21) 下, 寻求控制 $u_i^*(i=0, 1, \dots, n-1)$, 使目标函数 (1.22) 取最大值。

例 6 换热器系列的最佳设计

要设计有 N 个换热器的系列, 使原来温度为 $a^\circ\text{F}^{**}$ 的油连续流经 N 个换热器逐级升温后, 到离开第 N 个换热器时具有要求的温度 $b^\circ\text{F}$, 问各换热器的换热面积应为多少, 才能保证油料由 $a^\circ\text{F}$ 升温到 $b^\circ\text{F}$ 的条件下, 使换热器系列的总面积最小 (即消耗最小)。其过程如下图所示:

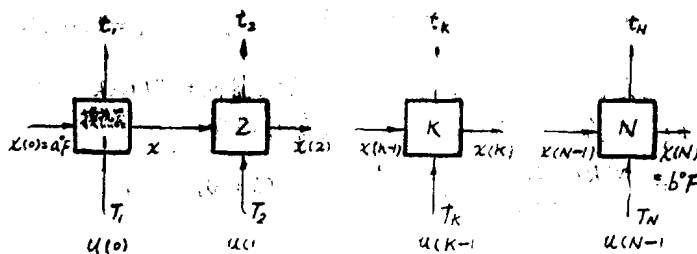


图 1.3

现在着手建立问题的数学模型, 先引进下列符号:

a —— 油的原始温度 [$^\circ\text{F}$];

b —— 油加热后要求达到的温度 [$^\circ\text{F}$];

w —— 油的流量 [磅/小时];

C_p —— 油的比热 [Btu **]/(磅)($^\circ\text{F}$);

W_k —— 第 k 个换热器中热载体流量 [磅/小时];

P_k —— 第 k 个换热器中热载体比热 [Btu/(磅)($^\circ\text{F}$)];

T_k —— 进入第 k 个换热器的热载体温度 ($^\circ\text{F}$);

(以上均为已知的)

t_k —— 流出第 k 个换热器的热载体温度 [$^\circ\text{F}$];

$x(k)$ —— 流出第 k 个换热器的油的温度 [$^\circ\text{F}$];

$u(k-1)$ —— 第 k 个换热器的换热面积 [(呎) 2];

为了简便起见, 设

$$W_k C_{pk} = WC_p, \quad (k=1, \dots, N)$$

*) 此处和下面遇到的符号 $^\circ\text{F}$ 表示温度的华氏度数。

**) Btu = Baitish thermal unit (英国热量单位), 1 Btu 表示一磅水升高 1°F 所需热量。

当 W, C_p, C_{pk} 给定后, 对每一个换热器可以调整 W_k , 使此式相等, 这是为了使下面模型方程简化而设的。

由热量平衡方程, 有

$$WC_p[x(k)-x(k-1)] = W_k C_{pk}[T_k - t_k],$$

根据上面假设, 亦即有

$$T_k - x(k) = t_k - x(k-1). \quad (1.23)$$

由第 k 个换热器的热传导方程, 有

$$WC_p[x(k)-x(k-1)] = h_k u(k-1) \left[\frac{T_k + t_k}{2} - \frac{x(k) + x(k-1)}{2} \right] \quad (1.24)$$

以 (1.23) 代入 (1.24), 就得

$$WC_p[x(k)-x(k-1)] = h_k u(k-1)[T_k - x(k)],$$

亦即

$$x(k) = \frac{x(k-1) + (h_k/WC_p)T_k u(k-1)}{1 + (h_k/WC_p)u(k-1)}. \quad (k=1, \dots, N)$$

于是, 设以油温为状态变量 $x(k)$, 第 k 个换热器面积为 $u(k-1)$, 进入第 k 个换热载体的温度为 T_k , 并令 $H_k \triangleq h_k/WC_p$, 则状态方程为

$$x(k+1) = \frac{x(k) + H_{k+1} T_{k+1} u(k)}{1 + H_{k+1} u(k)}, \quad (k=0, 1, \dots, N-1); \quad (1.25)$$

边界条件为

$$x(0) = a, \quad x(N) = b; \quad (1.26)$$

性能指标是使总面积最小, 亦即

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)$$

为最小。这是一个一维问题。

例 7 理想振荡器的最快停止振荡问题

考虑一个理想的振荡器 M 如图所示。它由纯电感 L 和电容 C 组成, 假定没有电阻, 其中 $e(t)$ 为外加电动势。假定振荡器 M 在工作, 有振荡发生, 如果我们要求它停止工作, 即不发生振荡, 问如何加上一个外加电动势 $e(t)$, 使它最快地停止振荡。

设 i 为回路的电流, 则根据克希荷夫

第二定律有

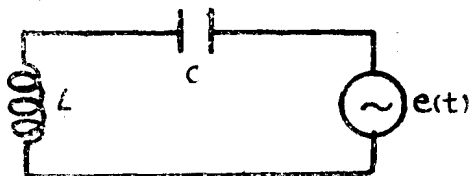
$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t),$$

将上式两端对 t 求微商, 得:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = \dot{e}(t),$$

亦即

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{1}{LC} i + \frac{1}{L} \dot{e}(t), \quad (1.28)$$



令 $x_1 = i$, $x_2 = \frac{di}{dt}$; $a = \frac{1}{LC}$; $u = \frac{1}{L} e(t)$, 则方程 (1.28) 化为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_1 + u, \end{cases} \quad (1.29)$$

其中 x_1, x_2 为状态变量, u 为控制变量。方程 (1.29) 称为振荡器 M 的状态方程。

我们来考察边界条件, 设在初始时刻 t_0 外加电动势 $e(t_0) = 0$, 而 $x_1(t_0) = i(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = \frac{di(t_0)}{dt} = x_2^0$; 设在终止时刻 t_* 停止振荡, 即 $x_1(t_*) = i(t_*) = 0$,

$x_2(t_*) = \frac{di(t_*)}{dt} = 0$ 。总之, 边界条件可归结为如下:

初始时刻 t_0 , 满足初始条件:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ x_2(t_0) = x_2^0; \end{cases} \quad (1.30)$$

终止时刻 t_* , 满足终止条件:

$$\begin{cases} x_1(t_*) = 0, \\ x_2(t_*) = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

于是, 我们的问题化为如何选取控制 $u(t)$ (注: 如果已知 $e(t)$, 因为 $e(t_0) = 0$, 所以 $e(t)$ 即可求出), 使振荡器 M 由初始状态 (x_1^0, x_2^0) 转移到终止状态 $(0, 0)$ 的转移时间

$$T = \int_{t_0}^{t_*} dt = t_* - t_0 \quad (1.32)$$

最小。

例 8 雷达跟踪问题:

用雷达跟踪目标 (导弹或飞机) 时, 需要控制雷达天线, 以便使它不断地跟踪目标。通常要求控制雷达天线, 使它的“指向瞄准线”与视线 (即雷达到目标的连线) 一致。今设目标 (导弹或飞机) 只在一平面内活动, 而雷达天线能环绕一垂直于此平面的轴 (在此平面内) 旋转。以 θ 表示天线指向瞄准线偏离相对于某参考线的角位移, I 表示系统环绕转轴的惯性矩, β 表示阻尼因子, $M(t)$ 表示使之旋转的控制力矩, 于是天线的角状态运动方程可以写成:

$$I\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} = M(t), \quad (1.33)$$

其中控制力矩 $M(t)$ 的大小在实际中总有一定的限制, 例如要求存在一正常数 K , 使在任何时刻 t , 满足

$$|M(t)| \leq K \quad (1.34)$$

我们要求天线从现在的初始角位移和初始角速度:

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0. \quad (1.35)$$

出发, 选取满足条件 (1.34) 的分段连续控制力矩 $M(t)$, 使之于以后的某一 (事先确定的) 终止时刻 t_* 达到状态

$$\theta(t_*) = \theta_*, \quad \dot{\theta}(t_*) = 0. \quad (1.36)$$

并且从工程上考虑还要求满足以下性能:

i) 天线的转移在尽可能短的时间内完成, 即要求转移时间 $\int_{t_0}^{t_*} dt = t_* - t_0$ 尽可能小;

ii) 在天线作这样的旋转时, 要求转移能量消耗尽可能小, 以避免部件的损坏, 即要求积分 $\int_{t_0}^{t_*} \dot{\theta}^2(t) dt$ 尽可能小;

iii) 实现以上转移所消耗的功率尽可能小; 即要求积分 $\int_{t_0}^{t_*} |M(t)| dt$ 尽可能小。

上述诸要求很可能是彼此矛盾的, 我们只能统筹兼顾, 有所轻重地综合地加以满足。一种办法是: 选取正的加权系数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 构成综合的性能指标, 于是问题化为:

要求选取满足约束条件 (1.34) 的力矩 $M(t)$, 使得方程 (1.33) 满足初始条件 (1.35) 的解, 在终止时刻 t_* 满足终止条件 (1.36), 并使性能指标

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_*} (\lambda_1 + \lambda_2 \dot{\theta}^2 + \lambda_3 |M(t)|) dt$$

为最优 (最小)。

再进一步简化, 在 (1.33) 中取 $\beta = 0$, 作变量代换

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{I}{K} (\theta - \theta_*), & x_2 &= \frac{I}{K} \dot{\theta}, & u &= \frac{M}{K}, \\ s_0 &= \frac{I}{K} (\theta_0 - \theta_*), & \eta_0 &= \frac{I}{K} \dot{\theta}_0. \end{aligned}$$

于是问题化成求满足约束条件

$$|u| \leq 1$$

的控制 $u(t)$, 使微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (1.37)$$

满足初始条件

$$x_1(t_0) = s_0, \quad x_2(t_0) = \eta_0 \quad (1.38)$$

的解 $x_1(t), x_2(t)$ 在终止时刻 t_* 达到终止状态

$$x_1(t_*) = 0, \quad x_2(t_*) = 0; \quad (1.39)$$

并使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_*} (a_1 + a_2 x_2^2 + a_3 |u|) dt$$

取最小值, 这里 a_1, a_2, a_3 是非负的加权系数。

例9 飞机最优着陆问题

设飞机离地面的高度为 $h(t)$ ，俯冲角为 $\theta(t)$ ，飞机着陆期间的 $h(t)$ 、 $\theta(t)$ ，由飞机升降舵的偏转角 $\delta(t)$ 来控制，如下图所示。我们的问题是：如何控制升降舵的偏转 $\delta(t)$ ，使飞机着陆时安全舒适可靠。

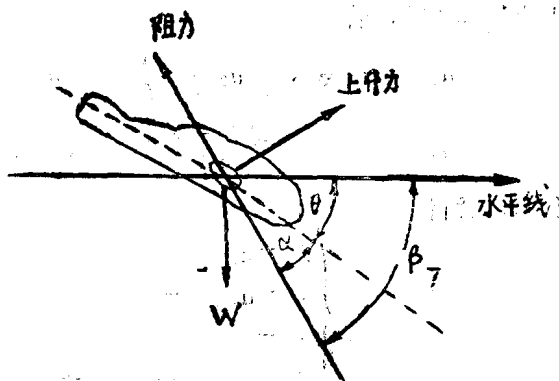


图 1-4

根据空气动力学和力学的基本定理，可得飞机着陆的运动方程为：

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + 2\varepsilon W_0 \dot{\theta} + W_0^2 \theta = k T_0 W_0^2 \delta(t) + k W_0^2 \delta(t), & (1.40)_1 \\ T_0 \ddot{h} + \dot{h} = v \theta(t), & (1.40)_2 \end{cases}$$

其中 v 是飞机着陆期间的速度，假定它是常数； ε ， W_0 ， K ， T_0 等都是飞机的有关参数，它们在飞行期间不变，亦即都是常数。

为了讨论方便，先将运动方程 (1.40) 进行变形。从 (1.40)₂ 求得

$$\dot{\theta} = \frac{T_0}{v} h^{(3)} + \frac{1}{v} \dot{h}, \quad \ddot{\theta} = \frac{T_0}{v} h^{(4)} + \frac{1}{v} h^{(3)}, \quad \theta = \frac{T_0}{v} h^{(5)} + \frac{1}{v} h^{(4)},$$

代入 (1.40)₁ 式，假定 $T_0 \neq 0$ ， $v \neq 0$ ，经过简化，就得

$$h^{(4)} + 2\varepsilon W_0 h^{(3)} + W_0^2 h^{(2)} = k W_0^2 v \delta(t), \quad (1.41)$$

又由 (1.40)₂ 求得

$$h^{(2)} = \frac{1}{T_0} (v \dot{\theta} - \dot{h}),$$

$$h^{(3)} = \frac{1}{T_0} \left(v \ddot{\theta} - \frac{1}{T_0} v \dot{\theta} + \frac{1}{T_0} \dot{h} \right),$$

$$h^{(4)} = \frac{1}{T_0} \left[v \ddot{\theta} - \frac{1}{T_0} v \dot{\theta} + \frac{1}{T_0^2} (v \dot{\theta} - \dot{h}) \right],$$

代入 (1.41) 并化简，就得

$$\ddot{\theta} - \frac{1-2\varepsilon W_0 T_0}{T_0} \dot{\theta} + \frac{1-2\varepsilon W_0 T_0 + W_0^2 T_0^2}{T_0} \theta = \frac{(1-2\varepsilon W_0 T_0 + W_0^2 T_0^2)}{v T_0^2} \dot{h} - k W_0^2 T_0 \delta(t) \quad (1.42)$$

于是，若令 $x_1 = h(t)$ ， $x_2 = \dot{h}(t)$ ， $x_3 = \theta(t)$ ， $x_4 = \dot{\theta}(t)$ ， $u = \delta(t)$ 代入 (1.40)₂ 和 (1.42) 中，就得飞机着陆时的状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_0} x_2 + \frac{v}{T_0} x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1-2\varepsilon W_0 T_0 + W_0^2 T_0^2}{v T_0^2} x_2 - \frac{1-2\varepsilon W_0 T_0 + W_0^2 T_0^2}{T_0^2} x_3 + \\ + \frac{1-2\varepsilon W_0 T_0}{T_0} x_4 + k W_0^2 T_0 u, \end{cases} \quad (1.43)$$

于(1.43)中,若令

$$a_{22} = -\frac{1}{T_0}, \quad a_{23} = -\frac{v}{T_0}; \quad a_{42} = \frac{1-2\xi W_0 T_0 + W_0^2 T_0^2}{v T_0^2}$$

$$a_{43} = -\frac{1-2\xi T_0 + W_0^2 T_0^2}{T_0^2}, \quad a_{44} = \frac{1-2\xi W_0 T_0}{T_0}; \quad K_0 = K W_0^2 T_0$$

代入,就得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + K_0 u \end{cases} \quad (1.44)$$

这就是飞机着陆时的状态方程,状态变量 x_1, x_2, x_3, x_4 可以通过仪器随时进行测量, $u=\delta(t)$ 为控制变量。

为了使飞机着陆时安全舒适可靠,预先设计好了一条降落曲线 C ,设其曲线方程

$$C: x_1 = \tilde{x}_1(t), \quad x_2 = \tilde{x}_2(t), \quad x_3 = \tilde{x}_3(t), \quad x_4 = \tilde{x}_4(t)$$

其降落时间为20秒,即 $0 \leq t \leq 20$,

问题要求控制 $u(t)$,一方面使飞机实际降落曲线尽量接近于 C ;另一方面要求控制量 $u(t)$ (即升降舵的偏转)不致太大。亦即要求选取 $u^*(t)$,使性能指标

$$J(u) = \int_0^{t_0} \left\{ \sum_{k=1}^4 a_k(t) [x_k(t) - \tilde{x}_k(t)]^2 + u^2(t) \right\} dt \quad (1.45)$$

取最小值。其中 a_k 是给定的函数,它反映状态变量 $x_k(x)$ 对 $\tilde{x}_k(t)$ 的偏离要求,如果要求 $x_k(t)$ 很接近 $\tilde{x}_k(t)$,则设计时,可令 $a_k(t)$ 取较大的值;若 $x_k(t)$ 对 $\tilde{x}_k(t)$ 接近程度没有严格要求,可取 $a_k(t)$ 小些,甚至为零。

例10 飞向月球的火箭控制问题。

考虑一个发射到月球的宇宙火箭。设火箭已进入月球的引力范围,并且是自由垂直下落飞行。我们希望火箭垂直飞行下落到一个离月球高度为 h (数百米)的地方时,下落速度为零,以后再利用月球引力和其他控制使火箭飞行。以便选择一个适当的地点着陆。现在的问题是,如何控制火箭,使火箭到达高度为 h 的地方时,其速度为零,而耗费的燃料最少。

我们的火箭是靠燃料燃烧向后喷出大量气体,利用反冲的力量使火箭向前推进。设火箭的速度是一个常数,于是 $\frac{dm}{dt}$ 是燃烧消耗的变化率。由力学知识我们知道火箭的推力为 $K \frac{dm}{dt}$,其产生的加速度为 $(K \frac{dm}{dt})/m$ 。假设火箭离月球的高度为 x ,垂直运动的速度为 $\frac{dx}{dt}$,其加速度为 $\frac{d^2x}{dt^2}$,月球的引力加速度设为 g (g 是常数),于是火箭的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[\left(-K \frac{dm}{dt} \right) / m \right] - g, \quad (1.46)$$