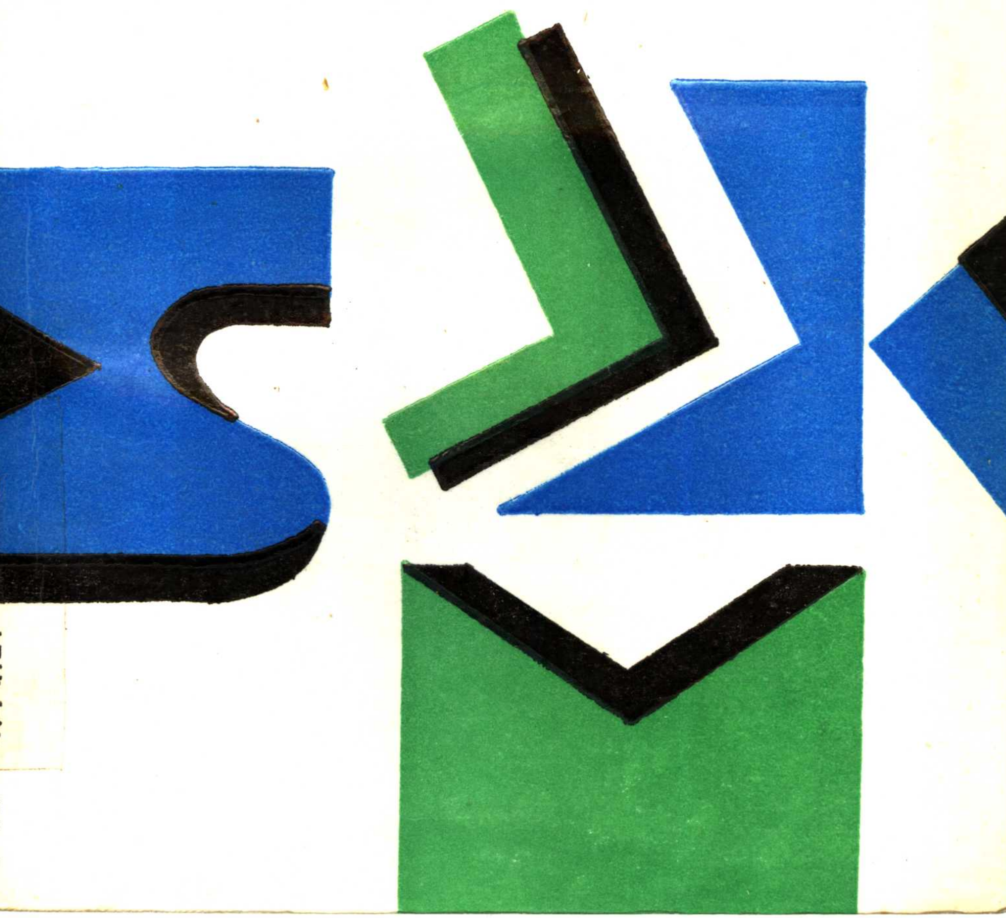
高等学校教材

随机模型及其应用

邓永录



高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

本书介绍随机模型理论的基本概念和方法，以及一些常用模型的物理背景等，还介绍了随机模型在不同领域中的应用例子．本书起点较低，具有微积分、概率统计初步和矩阵知识的读者就能掌握本书的基本内容．本书可作为理工科大学有关专业的本科生或研究生的试用教材或教学参考书．

高等学校教材

随机模型及其应用

邓永录

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 20.25 字数 500 000

1994年10月第1版 1994年10月第1次印刷

印数 0001— 961

ISBN 7-04-004978-3/O·1366

定价 11.35 元

前　言

现代科学技术的迅速发展，使得人们为解决在征服、改造自然界的斗争和人类社会活动中面临的各种各样实际问题时，有必要和可能考虑其中的非确定性亦即随机的因素．这就是说，当我们在数量上研究这些实际问题并为之建立数学模型时，应当从随机地变化的观点来思考和利用概率统计的方法．一般说来，含静态随机因素的模型可以用随机变量来描述，而含动态随机因素的模型则必须进一步利用随机过程来刻画．我们所说的随机模型在数学上就是由一个或多个随机变量、随机过程描述的系统，它们在自然科学、社会科学和工程技术的许多领域的研究(例如，生物和医学过程中遗传变异性的分析，植物和动物群落空间分布及流行病传播的研究，影响管理决策的不确定性的评估，心理学和社会学中各种因素交互作用的研究，通讯技术和控制中信号随机波动的分析和处理等等)中起着重要的作用．

本书的主要目的是通过介绍随机模型理论的基本概念和方法，以及一些常用模型的物理背景和它们在各个不同领域中的应用例子，培养学生具有为实际的概率问题选择和建立合适的数学模型的能力，填补或缩小理论和应用之间的空隙．为了更好地达到上述目的并尽量扩大适用面，作者在写作过程中力求使本书具有下列特点：

(1) 起点较低，不要求高深的数学预备知识．读者只要具有微积分、基本的概率统计和矩阵知识就能够理解和掌握本书的基本内容．在这种设想下，本书的内容大体上是自封闭的．

(2) 为了使叙述深入浅出和训练学生用概率的观点思考问题，我们特别注意各种模型和方法的物理背景并给出大量有启发

性的例子和问题．经验表明，这样做对了解和应用随机模型是很有益处的．

(3) 在强调直观背景和应用的前提下，适当顾及理论的系统性和严谨性．因此，我们也注意较系统地介绍随机模型的基本概念、理论和方法，阐明各种模型的特点及相互关系．

(4) 因为要真正解决一个实际问题，除了建立合适的数学模型外，还必须根据观测数据对模型的合理性和参数作统计推断．所以本书对所讨论的模型大都介绍一些简单易行的统计推断方法．

(5) 在不超出本书设想水平的前提下，尽可能反映新的研究方向和成果(其中包含一些作者自己的工作)．例如，第二、三章的标值泊松过程和标值更新过程；第四、五章的马尔可夫判决过程、马尔可夫更新过程、“泊松到达看见时间平均”性质和向量马尔可夫过程方法；第五、七章的某些日益广泛应用的新分布族(如位相型分布，IFR、NBU、NBUE、IFRA、DMRL 及其对偶分布等)及它们的特性；第七章的随机比较方法等方面的材料．这些内容在现有的随机模型或应用随机过程的著作(特别是国内出版的著作)中是很少，甚至从未涉及过的．

(6) 为了提高本书使用的灵活性和适应性，我们采用带有积木式特点的结构．全书各章、节既有一定的联系，也有相对的独立性．通过适当的选择和搭配可作不同水平和不同课程的教材．例如，前五章的基本内容再加上从后两章选取某些必要的补充材料即可作为大学本科不同专业的“应用随机过程”课程的教材；若再适当增加某些内容的份量亦可作相应专业研究生的同一课程的教材；按不同的水平和要求从前五章选取必要的准备知识，再配以较专门的排队论、可靠性理论(本书原稿含有这样的材料，由于篇幅所限，现已另书出版）或第七章的随机模型比较方法等材料则可分别作大学本科或研究生的相应课程的教材．此外，带有星号

的章节和段落在第一次阅读时可从略.

本书是笔者10多年来在随机模型、应用随机过程、排队论、可靠性理论和随机模型比较方法等课程的教学实践和部分研究工作的基础上写成，其中大部份材料曾分别在中山大学、厦门大学有关专业本科生、研究生和进修教师的教学中使用过．如前所述，通过适当选取和组织书中材料，本书可作理工科大学有关专业本科生和研究生的随机模型、应用随机过程、排队论、可靠性理论和随机模型比较方法等课程的教科书、参考书或补充材料．对随机模型的应用有兴趣的实际工作者也能从本书中获得他们需要的知识．

饮水思源，在经过多年笔耕和反复修改本书最终得以脱稿的时候，笔者深深感到学海无涯，并由此对所有培育、教导过自己的前辈产生深切怀念和感激之情．笔者特别希望能以本书的出版来纪念已故的郑曾同教授和P.A.P.Moran教授.

本书的编写工作部份地得到国家自然科学基金的资助，笔者对此表示感谢.

1992年7月在北京举行了审稿会．会议由王梓坤教授主持，参加会议的有严士健教授、刘秀芳教授、陆传赉副教授和高尚华副编审等．与会同志认真审阅了书稿并提出了许多宝贵的意见．会后笔者根据所提意见对书稿再一次进行了全面的校阅和修改．谨此向参加审稿会和关心本书出版的所有同志表示衷心的感谢．笔者水平有限，本书难免存在不当或错误之处，欢迎批评指正.

邓永录

1992年10月于广州中山大学

目　　录

第一章　预备知识 …… 1

§ 1-1　随机变量、分布函数、密度函数和矩 …… 1

§ 1-2　条件数学期望、Wald 公式和 Borel-Cantelli 引理 …… 10

§ 1-3　概率母函数 …… 17

§ 1-4　Laplace 变换和 Laplace-Stieltjes 变换 …… 23

§ 1-5　几何分布和负二项分布，几何分布的无记忆性 …… 33

§ 1-6　指数分布与故障率，指数分布的无记忆性 …… 38

§ 1-7　Γ分布、χ^2分布和 Erlang 分布 …… 51

§ 1-8　次序统计量和随机过程 …… 57

§ 1-9　差分方程和微分一差分方程 …… 61

问题 …… 70

第二章　泊松过程 …… 73

§ 2-1　齐次泊松过程的定义 …… 73

§ 2-2　齐次泊松过程的事件发生时间和计数的条件分布 …… 92

§ 2-3　齐次泊松过程的叠加、稀疏和平移 …… 99

§ 2-4　带时倚强度的泊松过程 …… 107

§ 2-5　非齐次泊松过程 …… 112

§ 2-6　广义泊松过程 …… 118

*§ 2-7　一般泊松过程和空间泊松过程 …… 122

*§ 2-8　复合泊松过程和标值泊松过程 …… 128

§ 2-9　泊松过程的检验 …… 134

§ 2-10　泊松过程的参数估计 …… 137

§ 2-11　泊松过程强度的比较和检验 …… 143

问题 …… 155

第三章　更新过程 …… 159

§ 3-1　更新过程的定义、N_t 的分布和 $M(t)\equiv EN_t$ 的某些性质 …… 159

§ 3-2 瞬时更新过程和常返更新过程 …… 165
§ 3-3 更新方程 …… 170
§ 3-4 更新定理 …… 174
§ 3-5 延迟更新过程和平衡更新过程 …… 186
§ 3-6 交替更新过程 …… 192
§ 3-7 剩余寿命和年龄 …… 200
§ 3-8 更新计数的概率母函数和矩 …… 207
§ 3-9 有偿更新过程和标值更新过程 …… 210
*§ 3-10 再生过程 …… 222
§ 3-11 更新过程的统计推断 …… 225
问题 …… 238
第四章 离散时间马尔可夫链 …… 242
§ 4-1 定义和转移概率矩阵 …… 242
§ 4-2 马尔可夫链的状态分类 …… 246
§ 4-3 极限定理和平稳分布 …… 256
§ 4-4 有限马尔可夫链 …… 267
§ 4-5 随机游动 …… 283
§ 4-6 分支过程 …… 295
§ 4-7 某些应用例子 …… 306
*§ 4-8 马尔可夫判决过程 …… 324
§ 4-9 离散时间马尔可夫链的统计推断 …… 341
问题 …… 350
第五章 连续时间马尔可夫链 …… 354
§ 5-1 定义、转移概率矩阵和转移强度矩阵 …… 354
§ 5-2 转移概率的性质,极限概率分布和前瞻、后顾方程 …… 359
*§ 5-3 转移概率和转移强度的进一步讨论 …… 367
§ 5-4 生灭过程 …… 377
§ 5-5 “泊松到达看见时间平均”性质,某些应用例子 …… 401
§ 5-6 半马尔可夫过程和马尔可夫更新过程 …… 418
*§ 5-7 向量马尔可夫过程方法 …… 434

*§ 5-8 位相型分布 …… 441
§ 5-9 连续时间马尔可夫链的统计推断 …… 449
问题 …… 456
第六章 平稳过程、时间序列和鞅 …… 460
§ 6-1 平稳过程的定义和例子 …… 460
§ 6-2 Brown运动过程 …… 466
§ 6-3 弱平稳过程的频域分析 …… 473
§ 6-4 时间序列 …… 489
§ 6-5 鞅和半鞅 …… 506
问题 …… 526
第七章 随机模型的比较方法 …… 529
§ 7-1 引言、随机变量的序的一般讨论 …… 529
§ 7-2 实随机变量的随机序 …… 533
§ 7-3 实随机变量的凸序和凹序 …… 538
§ 7-4 凸序的判别准则，随机序、凸序和凹序的关系 …… 550
§ 7-5 故障率序和似然比序 …… 554
§ 7-6 几类常用的分布 …… 560
*§ 7-7 一般随机变量和随机向量的比较 …… 583
§ 7-8 一般随机过程的比较 …… 586
§ 7-9 马尔可夫过程的比较 …… 590
§ 7-10 随机点过程的序 …… 599
§ 7-11 更新过程的比较 …… 603
§ 7-12 泊松过程的比较 …… 614
§ 7-13 纯生过程和分支过程的比较 …… 622
问题 …… 629
附录 极限过程的次序交换 …… 631
参考文献 …… 635

第一章　预 备 知 识

§1-1　随机变量、分布函数、密度函数和矩

设 Ω 是联系于某一随机试验的**基本事件空间**（又称**样本空间**），空间的元素（或者说"点"）就是描述这试验的基本事件，即试验的可能结果．空间Ω的某些子集称做**事件**，我们用$\mathscr{B}$表示事件的全体．这就是说，$\mathscr{B}$是一族满足一定条件[①]的ω点集（$\omega\in\Omega$）．我们把$\mathscr{B}$中的集合称做$\mathscr{B}$-可测集（在不会引起含混时简称可测集），而二元组$(\Omega,\mathscr{B})$则称做**可测空间**．可测空间$(\Omega,\mathscr{B})$上的一个**概率**P是测量$\mathscr{B}$中事件发生的可能性大小的一种数量指标，它是定义在集合族$\mathscr{B}$上的一个满足以下条件的函数：

（1）$0\leqslant P(A)\leqslant 1$ 对任意$A\in\mathscr{B}$．

（2）若对任意正整数 n 有$A_n\in\mathscr{B}$，而且当 $i\neq j$时$A_i\cap A_j=\varnothing$（这里$\varnothing$表示空集），则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n).$$

我们把三元组$(\Omega,\mathscr{B},P)$称做**概率空间**．而概率空间$(\Omega,\mathscr{B},P)$上的**随机变量**$X(\omega)$则是定义在 Ω 上的实值函数．为了保证能讨论它取值于某些人们关心的区域（例如，所有形如$(a,b]$ 的区间，

---

① 确切地说，$\mathscr{B}$是Ω 的一族子集，它满足下列条件：

（1）$\Omega\in\mathscr{B}$．

（2）若集合$A\in\mathscr{B}$，则它的余集$A'=\Omega\setminus A\in\mathscr{B}$．

（3）若集合序列$\{A_n\}$的每一成员都属于$\mathscr{B}$，则它们的并$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{B}$．这样的集合族称做 Ω 上的 σ 代数或 σ 域．

这里$-\infty\leqslant a<b<\infty$）的概率，应要求$X$是$\mathscr{B}$-可测的，即对每一实数$x$，$\Omega$的子集$\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{B}$.

在一些著作中，人们直接讨论随机变量而没有明显给出概率空间$(\Omega,\mathscr{B},P)$. 这是因为由随机变量X的可测性知对实数轴$\boldsymbol{R}$上的每一个形如$(-\infty,x]$的子集T都有$X^{-1}(T)=\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{B}$，这里$X^{-1}$表示关于$X$的逆像，故$P(X^{-1}(T))=P(\omega: X(\omega)\leqslant x)$是有定义的. 关系式

$$P_X(T)=P(X^{-1}(T))=P(X\leqslant x) \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

确定可测空间$(\boldsymbol{R},\mathscr{B}(\boldsymbol{R}))$上的一个概率$P_X$，这里$\mathscr{B}(\boldsymbol{R})$表示实数轴$R$上的 Borel 集的全体，即包含所有左半无穷区间$(-\infty,x]$（从而也包含所有半开半闭区间$(a,b]$，这里$-\infty\leqslant a<b<\infty$）的最小$\sigma$代数. 我们可把$P(X\leqslant x)$看作是$x$的函数并记作$F(x)$，它的定义域是$\boldsymbol{R}$并有如下性质：(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，(2) $F(x)$是右连续的单调不减函数，(3) $F(-\infty)\equiv\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$和$F(\infty)\equiv\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$. 我们把$F(x)$称做随机变量$X$的**分布函数**，它在概率上完全刻画了随机变量$X$的取值规律. 因此，为了在概率上给定一个随机变量$X$，只需给出它的分布函数$F(x)$.

随机变量按其取值情况可分为两大类：**离散随机变量**和**连续随机变量**.

随机变量X称做离散的，如果存在一有限或可数无穷的数列$\{x_i\}$，$x_i\neq x_j$若$i\neq j$，使得

$$P(X=x_i)=p_i>0$$

和

$$\sum_i p_i=1.$$

我们把如下定义的函数

$$f(x)=\begin{cases} p_i & \text{当 } x=x_i, \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases} \tag{1-1-2}$$

称做离散随机变量X的**密度函数**或**质量函数**. 易见这时X的分布函数$F(x)$可表为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\sum_{x_i\leqslant x}p_i, x\in \boldsymbol{R}^{①}. \tag{1-1-3}$$

随机变量X称做连续的，如果存在一定义在$\boldsymbol{R}$上的非负函数$f(x)$,使对任意$x\in \boldsymbol{R}$有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)dy \tag{1-1-4}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy=1. \tag{1-1-5}$$

由积分性质容易推知对任意$-\infty\leqslant a<b<\infty$有

$$P(a<X\leqslant b)=\int_{a}^{b}f(x)dx. \tag{1-1-6}$$

注意对任意$a\in \boldsymbol{R}$有$P(X=a)=\lim\limits_{n\to\infty}P(a-\frac{1}{n}<X\leqslant a)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a-\frac{1}{n}}^{a}\cdot f(x)dx=0$,即连续随机变量取任一固定值的概率等于零. 我们把$f(x)$称做连续随机变量X的**密度函数**或**频率函数**.

随机变量X的**数学期望**或**均值**记作EX，它（如果存在的话）由下式给出：

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x). \tag{1-1-7}$$

---

① 若用δ函数把质量函数表为$f(x)=\sum_i p_i\delta_{x_i}(x)$，则(1-1-3)式也可写成(1-1-4)式的形式，即有$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)dy$，这里$\delta_{x_i}(x)=1$若$x=x_i$；$\delta_{x_i}(x)=0$若$x\neq x_i$. 因此类似于连续情形也把质量函数称做密度函数.

对于离散或连续随机变量又可通过密度函数把上式写成

$$EX=\begin{cases}\sum_i x_i f(x_i)=\sum_i x_i p_i & \text{离散情形;}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx & \text{连续情形.}\end{cases} \tag{1-1-8}$$

我们说随机变量X的数学期望存在，如果上面定义中的无穷积分或无穷级数绝对收敛.

随机变量X的**方差**定义为

$$\mathrm{Var}X\equiv E[(X-EX)^2]=E[X^2]-(EX)^2. \tag{1-1-9}$$

X的**标准差**则定义为它的方差的平方根$\sqrt{\mathrm{Var}X}$.

一般地，我们把X^k的数学期望$\nu_k=E[X^k]$称做X的 **k 阶原点矩**，把$(X-EX)^k$的数学期望$\mu_k=E[(X-EX)^k]$称做X的 **k 阶中心矩**，这里k是任意正整数. 应当指出，一个随机变量的矩不一定存在. 但是，如果对某一正整数r，它的r阶矩存在，则对任意正整数$k\leqslant r$，它的k阶矩也一定存在. 易见数学期望是一阶原点矩，方差则是二阶中心矩.

在k阶中心矩的定义中，把二项式$(X-EX)^k$展开就得到原点矩和中心矩的如下关系：

$$\mu_k=\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r\nu_1^{k-r}\nu_r, \tag{1-1-10}$$

式中$C_k^r=k!/r!(k-r)!$是从k个元素中取r个的不同组合数. 类似地，将$E[X^k]=E\{[(X-EX)+EX]^k\}$展开则可得原点矩和中心矩的另一关系：

$$\nu_k=\sum_{r=0}^{k}C_k^r\nu_1^r\mu_{k-r}. \tag{1-1-11}$$

特别地，对于$k=1,2,3,4$有

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1=0,\\
&\mu_2=\nu_2-\nu_1^2,\\
&\mu_3=\nu_3-3\,\nu_2\nu_1+2\,\nu_1^3,\\
&\mu_4=\nu_4-4\,\nu_3\nu_1+6\,\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4.
\end{aligned}\right\}\tag{1-1-12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_1=\nu_1,\\
&\nu_2=\mu_2+\nu_1^2,\\
&\nu_3=\mu_3+3\,\nu_1\mu_2+\nu_1^3,\\
&\nu_4=u_4+4\,\nu_1\mu_3+6\,\nu_1^2\mu_2+\nu_1^4.
\end{aligned}\right\}\tag{1-1-13}$$

除了原点矩和中心矩外，有时还会用到阶乘矩．人们把 $E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$称做随机变量X的**k阶阶乘矩．**

下面介绍两个关于数学期望的计算公式．先设X是非负整数值随机变量．按定义

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k),\tag{1-1-14}$$

这里EX或者有限，或者等于∞．把上式写成如下的三角阵列：

$$\begin{aligned}
EX=&P(X=1)\\
&+P(X=2)+P(X=2)\\
&+\cdots\\
&+P(\underbrace{X=k)+P(X=k)+\cdots+P}_{\text{共 }k\text{ 项}}(X=k)\\
&+\cdots,
\end{aligned}$$

对每一纵向列先求和即得

$$\begin{aligned}
EX&=P(X\geqslant1)+P(X\geqslant2)+\cdots\\
&\quad+P(X\geqslant k)+\cdots\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geqslant k).
\end{aligned}\tag{1-1-15}$$

当X是一般的非负随机变量时(1-1-15)式可推广为

$$EX=\int_0^{\infty}(1-F(x))dx, \qquad (1\text{-}1\text{-}16)$$

这里EX或者有限，或者等于∞. 下面给出(1-1-16)式的证明. 按分部积分公式推得(1-1-16)式右端等于

$$\lim_{x\to\infty}x(1-F(x))+\int_0^{\infty}x\,dF(x).$$

注意上式的第二项等于EX. 现先设$EX<\infty$,这时只需证明第一项等于零. 事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x(1-F(x))&=\lim_{x\to\infty}x\int_x^{\infty}dF(y)\\&\leqslant\lim_{x\to\infty}\int_x^{\infty}y\,dF(y)=0.\end{aligned}$$

若$EX=\infty$,则因$\lim\limits_{x\to\infty} x(1-F(x))\geqslant 0$,故(1-1-16)式两端都等于$\infty$.

如果除去对X的非负性要求，我们可以利用类似的方法证明若EX存在，则有

$$EX=\int_0^{\infty}(1-F(x))dx-\int_{-\infty}^{0}F(x)dx. \qquad (1\text{-}1\text{-}17)$$

更一般地，对任意正整数k有

$$\begin{aligned}E[|X|^k]&=\int_0^{\infty}P(|X|^k>x)dx\\&=k\int_0^{\infty}x^{k-1}P(|X|>x)dx. \qquad (1\text{-}1\text{-}18)\end{aligned}$$

当我们要同时考虑两个或更多的随机变量时，就需要研究这些随机变量的联合概率分布. 在这里只讨论两个随机变量的情形,当变量数目大于2时情况是类似的.

设X和Y是任意两个随机变量. X和Y的(二维)联合概率分布(简称联合分布)定义为

$$F(x,y)\equiv P(X\leqslant x,Y\leqslant y),-\infty<x,y<\infty. \qquad (1\text{-}1\text{-}19)$$

X和Y的边沿分布$F_X(x)$和$F_Y(y)$ 可以从它们的联合分布求出，即

$$F_X(x)\equiv P(X\leqslant x)=\lim_{y\to\infty}P(X\leqslant x,Y\leqslant y)\equiv F(x,\infty),\tag{1-1-20}$$

$$F_Y(y)\equiv P(Y\leqslant y)=\lim_{x\to\infty}P(X\leqslant x,Y\leqslant y)\equiv F(\infty,y).\tag{1-1-21}$$

当X和Y均为离散时，它们的**联合密度函数**(或称**联合质量函数**)是

$$f(x,y)\equiv P(X=x,Y=y).\tag{1-1-22}$$

而X和Y的边沿密度(质量)函数则依次是

$$f_X(x)=\sum_{y:f(x,y)>0}f(x,y)①;\tag{1-1-23}$$

$$f_Y(y)=\sum_{x:f(x,y)>0}f(x,y).\tag{1-1-24}$$

我们说X和Y是**联合连续的**，如果存在一个定义在$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$上的非负函数$f(x,y)$，使得对一切实数$x,y$，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv.$$

这时，函数 $f(x,y)$ 称做X和Y的**联合密度函数**. X和Y 的边沿密度函数依次是

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy;\tag{1-1-25}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx.\tag{1-1-26}$$

事实上，对任意实数a有

$$F_X(a)=P(X\leqslant a)=P(X\leqslant a,Y<\infty)$$

---

① 求和号下面的 $y:f(x,y)>0$ 是指满足 $f(x,y)>0$ 的 y.

$$= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx. \tag{1-1-27}$$

类似地，对任意实数 b 有

$$F_Y(b) = \int_{-\infty}^{b} f_Y(y)\,dy. \tag{1-1-28}$$

随机变量 X 和 Y 称做相互独立的，如果对任意实数 x 和 y 有

$$P(X \leqslant x, Y \leqslant y) = P(X \leqslant x)P(Y \leqslant y). \tag{1-1-29}$$

上式也可写成

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y). \tag{1-1-30}$$

当 X 和 Y 均是离散或是联合连续时，独立性条件可通过它们的密度函数表为

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x,y \in \boldsymbol{R} \tag{1-1-31}$$

(在 X,Y 为联合连续时，只要对几乎所有的 x,y(Lebesgue 测度)上式成立即可)。

两个随机变量 X 和 Y 的**协方差** $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &\equiv E[(X-EX)(Y-EY)] \\ &= E[XY] - EX \cdot EY.\end{aligned} \tag{1-1-32}$$

X 和 Y 的**相关系数** ρ_{XY} 则定义为

$$\rho_{XY} \equiv \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}X \cdot \mathrm{Var}Y}}. \tag{1-1-33}$$

如果 X 和 Y 相互独立，则易证 $E[XY] = EX \cdot EY$，从而有 $\mathrm{Cov}\cdot(X,Y) = 0$。但注意从 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ 一般不能推出 X 和 Y 相互独立。

容易验证，设 X 和 Y 是任意两个有数学期望的随机变量，a 和 b 是任意常数，则有

$$E[aX + bY] = aEX + bEY. \tag{1-1-34}$$

但方差一般并不具有这样的线性性质．事实上，

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[X+Y] &= E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\ &= E[(X-EX)^2+(Y-EY)^2 \\ &\quad +2(X-EX)(Y-EY)] \\ &= \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y+2\operatorname{Cov}(X,Y).\end{aligned} \tag{1-1-35}$$

因此，当且只当 $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$ 时才有

$$\operatorname{Var}[X+Y]=\operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y. \tag{1-1-36}$$

不难证明对任意随机变量 X 和常数 a 有

$$\operatorname{Var}[aX]=a^2\operatorname{Var}X. \tag{1-1-37}$$

在理论或实际中常常需要把一个随机变量或随机向量通过某种变换变为一个新的随机变量或随机向量．这时，一个重要的问题是要求出新的变量或向量的分布函数或密度函数．我们先考察线性变换 $Y=aX+b$ 的简单情形．设 X 的分布函数是 $F_X(x)$ 且 $a\neq 0$，则 Y 的分布函数是

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(aX+b\leqslant y)=P(aX\leqslant y-b) \\ &= \begin{cases}P(X\leqslant (y-b)/a)=F_X((y-b)/a), & a>0, \\ P(X\geqslant (y-b)/a)=1-F_X([(y-b)/a]-0), & a<0.\end{cases}\end{aligned} \tag{1-1-38}$$

若 $F_X(x)$ 有密度函数 $f_X(x)$，则 $F_Y(y)$ 的密度函数 $f_Y(y)$ 存在，而且由(1-1-38)式易得

$$f_Y(y)=f_X((y-b)/a)/|a|. \tag{1-1-39}$$

下面给出一个适用于较一般情形的结果．

定理 1-1-1 设 n 维随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 有密度函数 $f_X(x_1,\cdots,x_n)$．又设 n 元函数 $y_i=u_i(x_1,\cdots,x_n)$，$i=1,\cdots,n$，满足下列条件：