

初等数学  
解题思路

CHU DENG  
SHU XUE  
JIE TISI LU

海洋出版社

Luochina

# 初中数学 解题思路

CHUZHONG  
SHUXUE  
JITIE SİLUI

湖南教育出版社

# 初等数学解题思路

上 册

邓禹绩 肖 钰 编

薛川坪 靳尚成

吕凤翥 审校

海洋出版社

1983年·北京

## 内 容 提 要

本书是根据全日制十二年制《中学数学教学大纲》(草案)及十年制中学数学新编通用教材并结合多年的教学经验编成的。其目的在于加深读者对中学数学基本内容的理解,开阔读者的解题思路,提高解题的能力。

全书分上、中、下三册。上册内容分解题方法总论(怎样解题)和代数;中册内容为平面几何、立体几何、三角;下册内容为解析几何、微积分。作者对上述内容作了系统整理,着重分析讨论了解题思路和方法。每章附有练习及答案,对有一定难度的练习作了提示或解答。其内容可适应今后五年内高中数学教学需要。

本书可供中学生课外阅读,也可作为具有中等文化程度的中青年同志自学用书。对中学数学教师、大专师范院校师生也是一部很有价值的参考书。

## 初等数学解题思路

### 上 册

邓禹绩 肖 钰 编  
薛川坪 靳尚成  
吕凤翥 审校

---

海洋出版社出版

(北京市复兴门外大街)

新华书店北京发行所发行机工印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 15 1/2 字数: 300千字

1983年 9 月第一版 1983年 9 月第一次印刷

印数: 100,000册

---

统一书号: 7193·0244 定价: 1.55元

# 目 录

<b>第一篇 怎样解数学题</b> .....	( 1 )
一、用概念解题的方法 .....	( 3 )
二、常用的技巧和主要的方法 .....	( 13 )
三、分析综合的思维方法 .....	( 27 )
四、化整为零的分析方法 .....	( 41 )
五、从特殊到一般的推理方法 .....	( 50 )
六、几何题的代数、三角解法 .....	( 59 )
<b>第二篇 代数</b> .....	( 71 )
<b>第一章 集合</b> .....	( 71 )
基本内容 .....	( 71 )
(一) 常用的集合表示方法 .....	( 71 )
(二) 常用的集合符号 .....	( 71 )
(三) 集合的一般概念 .....	( 71 )
(四) 集合的运算性质 .....	( 72 )
(五) 集合元素的数的运算性质 .....	( 73 )
(六) 单值对应 .....	( 73 )
例题类型和解题方法 .....	( 74 )
(一) 集合 .....	( 74 )
(二) 对应 .....	( 80 )
练习1—1 .....	( 82 )
练习1—2 .....	( 85 )
<b>第二章 数和式</b> .....	( 86 )
<b>一 数</b> .....	( 86 )
基本内容 .....	( 86 )
(一) 数的系统表 .....	( 86 )
(二) 数的概念及其运算 .....	( 86 )

例题类型和解题方法 .....	( 90 )
(一) 实数的运算 .....	( 90 )
(二) 复数 .....	( 93 )
练习2—1 .....	( 104 )
练习2—2 .....	( 108 )
二、代数式 .....	( 109 )
基本内容 .....	( 109 )
(一) 代数式的一般概念 .....	( 109 )
(二) 整式 .....	( 110 )
(三) 分式 .....	( 112 )
(四) 根式 .....	( 113 )
例题类型和解题方法 .....	( 114 )
(一) 整式 .....	( 114 )
(二) 分式 .....	( 125 )
(三) 根式 .....	( 127 )
练习2—3 .....	( 132 )
练习2—4 .....	( 139 )
三、指数和对数 .....	( 140 )
基本内容 .....	( 140 )
(一) 指数 .....	( 140 )
(二) 对数 .....	( 141 )
例题类型和解题方法 .....	( 142 )
(一) 指数幂的运算 .....	( 142 )
(二) 对数的计算 .....	( 146 )
练习2—5 .....	( 156 )
练习2—6 .....	( 159 )
第三章、方程和方程组 .....	( 160 )
一、方程 .....	( 160 )
基本内容 .....	( 160 )

(一) 关于方程的几个概念 .....	(160)
(二) 关于方程的同解性 .....	(161)
(三) 方程的增根与遗根 .....	(161)
例题类型和解题方法 .....	(162)
(一) 一元一次方程 .....	(162)
(二) 一元二次方程 .....	(164)
(三) 高次方程 .....	(173)
(四) 分式方程 .....	(178)
(五) 无理方程 .....	(180)
(六) 指数方程和对数方程 .....	(185)
练习3—1 .....	(190)
练习3—2 .....	(195)
二、方程组 .....	(196)
基本内容 .....	(196)
(一) 方程组的有关概念 .....	(196)
(二) 行列式和线性方程组 .....	(197)
(三) 二元二次方程组 .....	(199)
(四) 指数方程组和对数方程组 .....	(199)
(五) 布列方程 (或方程组) 解应用题 .....	(199)
例题类型和解题方法 .....	(199)
(一) 行列式 .....	(199)
(二) 二元线性方程组 .....	(204)
(三) 三元线性方程组 .....	(206)
(四) 二元二次方程组 .....	(208)
(五) 指数方程组和对数方程组 .....	(216)
(六) 布列方程 (或方程组) 解应用题 .....	(219)
练习3—3 .....	(220)
练习3—4 .....	(226)
<b>第四章 不等式</b> .....	<b>(227)</b>

一、解不等式 .....	( 227 )
基本内容 .....	( 227 )
(一) 不等式的概念及性质 .....	( 227 )
(二) 不等式(组)解的集合及解不等式(组) .....	( 228 )
例题类型和解题方法 .....	( 229 )
(一) 一元一次不等式 .....	( 229 )
(二) 一元一次不等式组 .....	( 230 )
(三) 一元二次不等式 .....	( 231 )
(四) 简单的高次不等式 .....	( 234 )
(五) 简单的分式不等式 .....	( 235 )
(六) 绝对值不等式 .....	( 236 )
(七) 简单的无理不等式 .....	( 238 )
(八) 解不等式的应用 .....	( 240 )
练习4—1 .....	( 242 )
练习4—2 .....	( 244 )
二、不等式的证明 .....	( 245 )
基本内容 .....	( 245 )
(一) 几个重要的不等式 .....	( 245 )
(二) 含有绝对值的不等式(或等式) 的几个定理 .....	( 245 )
例题类型和解题方法 .....	( 246 )
(一) 比较法 .....	( 246 )
(二) 分析法 .....	( 247 )
(三) 综合法 .....	( 248 )
(四) 放缩法 .....	( 250 )
(五) 判别式法 .....	( 252 )
(六) 三角代换法 .....	( 253 )
(七) 其它方法 .....	( 254 )
练习4—3 .....	( 255 )



练习4—4 .....	(257)
<b>第五章 函数</b> .....	(258)
基本内容 .....	(258)
(一) 有关函数的基本概念 .....	(258)
(二) 初等函数的主要性质 .....	(259)
(三) 各类初等函数的研究 .....	(260)
例题类型和解题方法 .....	(263)
(一) 关于函数概念的例题 .....	(263)
(二) 关于正、反比例函数、一次函数、 二次函数及幂函数的例题 .....	(267)
(三) 关于指数函数、对数函数的例题 .....	(277)
(四) 关于函数的极值问题 .....	(281)
练习5—1 .....	(289)
练习5—2 .....	(291)
练习5—3 .....	(292)
练习5—4 .....	(293)
练习5—5 .....	(294)
练习5—6 .....	(296)
<b>第六章 数列</b> .....	(297)
基本内容 .....	(297)
(一) 数列的一般概念 .....	(297)
(二) 等差数列和等比数列 .....	(298)
例题类型和解题方法 .....	(299)
(一) 关于数列一般概念的例题 .....	(299)
(二) 等差数列、等比数列的例题 .....	(302)
练习6—1 .....	(317)
练习6—2 .....	(318)
练习6—3 .....	(319)
<b>第七章 排列组合、数学归纳法、二项式定理</b> .....	(321)

一、排列组合 .....	( 321 )
基本内容 .....	( 321 )
(一) 基本原理 .....	( 321 )
(二) 排列、组合 .....	( 321 )
例题类型和解题方法 .....	( 322 )
(一) 计算题 .....	( 322 )
(二) 解方程 .....	( 323 )
(三) 证明题 .....	( 324 )
(四) 应用问题 .....	( 325 )
练习7—1 .....	( 331 )
二、数学归纳法 .....	( 333 )
基本内容 .....	( 333 )
例题类型和解题方法 .....	( 333 )
(一) 证明恒等式 .....	( 334 )
(二) 证整除 .....	( 336 )
(三) 证明不等式 .....	( 337 )
(四) 证明几何问题 .....	( 338 )
(五) 其它 .....	( 338 )
练习7—2 .....	( 340 )
三、二项式定理 .....	( 341 )
基本内容 .....	( 341 )
(一) 二项式定理 .....	( 341 )
(二) 二项展开式的通项公式 .....	( 341 )
(三) 二项展开式的性质 .....	( 341 )
例题类型和解题方法 .....	( 342 )
(一) 求二项展开式 .....	( 342 )
(二) 使用通项公式解题 .....	( 343 )
(三) 其它 .....	( 345 )
练习7—3 .....	( 349 )

练习7—4 .....	(350)
<b>第八章 概率初步</b> .....	<b>(352)</b>
基本内容 .....	(352)
(一) 概念 .....	(352)
(二) 计算 .....	(353)
例题类型和解题方法 .....	(355)
(一) 等可能事件的概率 .....	(355)
(二) 用概率的性质计算互斥事件、相互独立事件的概率 .....	(357)
(三) 独立重复试验的概率 .....	(361)
(四) 条件概率 .....	(364)
练习8—1 .....	(369)
练习8—2 .....	(371)
<b>第九章 向量</b> .....	<b>(373)</b>
基本内容 .....	(373)
(一) 概念 .....	(373)
(二) 运算 .....	(375)
例题类型和解题方法 .....	(379)
(一) 向量的运算 .....	(379)
(二) 向量在几何中的应用 .....	(387)
(三) 向量在三角中的应用 .....	(392)
(四) 向量在复数计算中的应用 .....	(393)
(五) 向量在物理中的应用 .....	(394)
练习9—1 .....	(396)
练习9—2 .....	(398)
答案 .....	(399)
<b>附中、下册目录</b> .....	<b>(482)</b>

## 第一篇 怎样解数学题

怎样解数学题，这是许多人所关心的一个问题。要很好地回答它不是很容易的，因为它没有一个固定的简单的方法。只能多做练习，不断总结，才能提高自己的解题能力。人们通常从两个方面培养解题能力：1.对数学基础理论知识学深学透。不仅了解某一理论的表面特征，掌握其成立条件，还要进一步研究它的实质以及它与别的相关知识之间的联系；2.在解题过程中钻研解题方法，在解题过程中学会思考、分析的能力。

有步骤地思考分析问题是提高解题能力的关键。通常步骤如下：

第一步审题：搞清已知、求解（或求证）。

对这一步不能轻视、马虎，要思考每个已知条件的作用，要把已知条件看全（包括直接的或隐含的），要把所求的问题理解准确，否则就会造成根本性的错误。

第二步分析：选择解题方法。

首先要学会联想和类比，即考查一下是否见过类似的问题；如果见过，那就想是否可用同一解法来解这道题或还需作些适当的变换才可能。如果必须另辟途径，那就应该联想到此题条件和要求涉及到哪些数学知识（包括定义、定理、公式及其它性质）。找到了有关的数学知识，就找到了解题的“子弹”。进一步，就可寻找解题的途径，即探索解题思路，研究解题方法，这是解题的“瞄准”工作。必要时可作题目

的图示，使条件的特征直观。

第三步解题：要层次清楚，步步有理。

解答的每一步都必须有根据；解答的叙述要合理，规格要符合要求；解答必须正确而简明。

第四步讨论：分类研究，全面考虑，

许多习题要进行讨论，在什么条件下有解，有多少不同的解；什么条件下无解。总之，要做全面的考虑。

第五步检验：验证结果是否正确。

解题的每一步都不能粗心大意，要养成检查的习惯并学会估值、量纲、逆推、改换解法，将字母代入特殊值等检验方法。

第六步小结：不断总结经验，增强解题能力。

一道题解答完毕，不应就此終了，要想一想有没有更合理的解题方法，条件、结论可能发生什么变化，从此题可以得出什么结论等。使得做一道题会一类题的解法，并达到掌握知识，提高能力的目的。

完整的解题方案有时不是解题前就提出来，而是在解题过程中形成的。

寻找解法不一定一次成功，失败了，要返回去更仔细地分析题意，寻找失败原因，探索新的解法。

解题的方法一般是随着数学知识的增多而逐渐增加，一下子罗列出所有数学解题方法是不可能的。可是，中学生还是需要积累一些解题方法。

下面我们仅从几个方面作点介绍：

- 一、用概念解题的方法；
- 二、常用的技巧和主要的方法；
- 三、分析综合的思维方法；

- 四、“化整为零”的分析方法；
- 五、从特殊到一般的推理方法；
- 六、几何题的代数、三角解法。

## 一、用概念解题的方法

正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提。一切分析和推理主要是依据概念和应用概念进行的，只有透彻理解并灵活运用数学概念，才能掌握运算的技能技巧，才会做到正确、合理、迅速的逻辑论证。因此树立用概念解题的思想是十分重要的。

### (一) 运用概念解决问题

在数学中，除了少数几个最基本的概念（如集合、点、直线、平面等）外，大部分数学概念都是以下定义的方法描述其本质属性的，因而在解题中恰当地使用定义是十分重要的，而很多学生则往往忽略这点。在实例中如：

**例1** 求方程  $x^2 + ax + b = 0$  与方程  $x^2 + px + q = 0$  有且仅有一个公共根的条件，并求这个公共根。

**解：**设  $\alpha$  为它们的公共根，根据根的定义

$$(I) \begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + b = 0 & (1) \\ \alpha^2 + p\alpha + q = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)-(2)  $(a-p)\alpha = q-b$ ，当  $a \neq p$  时，两方程有且仅有一个公共根  $\alpha = \frac{q-b}{a-p}$ 。

此题用方程根的定义来解较为简捷，若使用韦达定理分别设两方程的根为  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\alpha$ 、 $\gamma$  列出四个方程

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b;$$

$$\alpha + \gamma = -p, \quad \alpha\gamma = q,$$

消去  $\beta, \gamma$  仍为方程组 (I), 这样做走了弯路是因为没有充分认识已知条件的本质, 不能恰当地使用概念, 将简单问题复杂化了。推荐几道使用根的定义的题目供读者参考:

1) 方程  $x^2 + ax + b = 0$  的根为  $\alpha, \beta$ ,  $f(n) = \alpha^n + \beta^n$  求:  $f(n+2) + af(n+1) + bf(n)$  的值。(答: 0)

2) 若方程  $a\cos x + b\sin x + c = 0$  在  $(0, \pi)$  中有相异两根  $\alpha, \beta$ , 求  $\sin(\alpha + \beta)$  的值。(答:  $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ )

例2 若  $\varepsilon$  是 1 的  $n$  次方根中的一个, 求  $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1}$

解:  $\varepsilon$  是 1 的  $n$  次方根则  $\varepsilon^n = 1$

$$\text{当 } \varepsilon \neq 1 \text{ 时 } 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1} = \frac{1(1 - \varepsilon^n)}{1 - \varepsilon} = 0$$

$$\text{当 } \varepsilon = 1 \text{ 时 } \text{原式} = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ 个}} = n$$

此题虽小但概念性很强, 首先是  $n$  次方根的定义, 另外还要注意等比数列求和公式的条件, 分情况讨论。

例3 设抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 过焦点的弦  $AB$ , 与  $x$  轴成倾角  $\theta$ , 求  $|AB|$ 。

此题解法很多, 比如可以用求交点坐标、或应用直线参数方程等方法去解, 下面介绍另外两种解法。

解法一: 应用抛物线的定义和韦达定理理解。

$$\text{设直线 } AB \text{ 的方程为 } y = \operatorname{tg}\theta \left( x - \frac{p}{2} \right)$$

代入抛物线方程  $y^2 = 2px$  得:

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \theta - p(\operatorname{tg}^2 \theta + 2)x + \frac{p^2}{4} \operatorname{tg}^2 \theta = 0$$

$$\text{由韦达定理: } x_1 + x_2 = \frac{p(\operatorname{tg}^2 \theta + 2)}{\operatorname{tg}^2 \theta}$$

如图1-1, 令  $C$  为  $AB$  中点, 直线  $l$  为抛物线的准线, 并作  $AD \perp l$ ,  $BE \perp l$ ,  $CH \perp l$  交  $y$  轴于  $G$ .

由抛物线定义得  $|AD| = |AF|$ ,  $|BE| = |BF|$

$$\therefore |AB| = |AF| + |BF| = |AD| + |BE| = 2|CH|$$

$$= 2|CG| + 2|HG| = |x_1 + x_2| + p$$

$$= \frac{p(\operatorname{tg}^2 \theta + 2) + p \cdot \operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$$

**解法二:** 应用二次曲线统一定义和极坐标方程解。

以焦点  $F$  为极点,  $Fx$  为极轴建立极坐标系 (如图1-2),

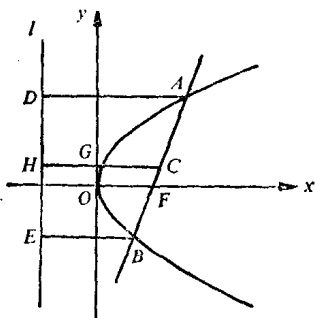


图 1-1

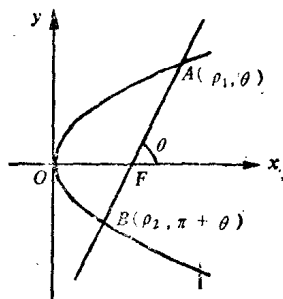


图 1-2

则抛物线的极坐标方程为  $\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$

令  $A$  点坐标为  $(\rho_1, \theta)$ ,  $B$  点坐标为  $(\rho_2, \pi + \theta)$ ,

$$\text{则 } |AB| = \rho_1 + \rho_2 = \frac{p}{1 - \cos \theta} + \frac{p}{1 - \cos(\pi + \theta)}$$



$$= \frac{2p}{\sin^2 \theta}$$

显然利用极坐标方程计算较为简洁。

在解析几何中用概念解题的例子很多，下面推荐几道供读者练习：

1) 求证以抛物线的焦点弦（过焦点的直线被抛物线所截的线段）为直径的圆必切此抛物线的准线。

2) 在椭圆  $9x^2 + 25y^2 = 225$  上求一点，它到右焦点的距离等于到左焦点距离的 4 倍。

提示：由椭圆方程  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  焦点坐标为  $(4, 0)$

$(-4, 0)$ ；设椭圆上点  $p(x, y)$  到右焦点的距离为  $m$ ，到左焦点的距离为  $n$ ，则

$$\begin{cases} m=4n \\ m+n=2a=10 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} m=8 \\ n=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 8 \\ \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = -\frac{15}{4}, & -\frac{15}{4} \\ y = \frac{3\sqrt{7}}{4}, & -\frac{3\sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

$$\therefore p\left(-\frac{15}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4}\right) \text{ 或 } p\left(-\frac{15}{4}, -\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$$

3) 设  $\triangle ABC$  周长是 50，底边  $AB=24$ ，令  $AB$  不动，并且在不改变三角形周长的条件下，移动顶点  $C$ ，求  $C$  点的

轨迹方程。（答：  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ ，且  $y \neq 0$ ）

数学符号是符号化了的数学概念，它有着高度的抽象性，只有深刻地理解概念才能正确使用数学符号。