清

初等数学解题思路

(上)

CHU DENG
SHU XUE
JIE TI SI LU

海洋出版社

初等数学解题思路

CHUDENG
SHUXUE
JIETISILU

初等数学解题思路

上　册

邓禹绩　肖　钰
　　　　　　　　　编
薛川坪　靳尚成

吕凤翥　　　审校

海洋出版社

1983年·北京

内 容 提 要

本书是根据全日制十二年制《中学数学教学大纲》（草案）及十年制中学数学新编通用教材并结合多年的教学经验编成的。其目的在于加深读者对中学数学基本内容的理解，开阔读者的解题思路，提高解题的能力。

全书分上、中、下三册。上册内容分解题方法总论（怎样解题）和代数；中册内容为平面几何、立体几何、三角；下册内容为解析几何、微积分。作者对上述内容作了系统整理，着重分析讨论了解题思路和方法。每章附有练习及答案，对有一定难度的练习作了提示或解答。其内容可适应今后五年内高中数学教学需要。

本书可供中学生课外阅读，也可作为具有中等文化程度的中青年同志自学用书。对中学数学教师、大专师范院校师生也是一部很有价值的参考书。

初等数学解题思路

上 册

邓禹绩 肖 钰 薛川坪 靳尚成 编

吕凤翥 审校

海洋出版社出版

（北京市复兴门外大街）

新华书店北京发行所发行机工印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：15 1/2 字数：300千字

1983年 9 月第一版 1983年 9 月第一次印刷

印数：100,000 册

统一书号：7193·0244 定价：1.55元

目　录

第一篇　怎样解数学题

怎样解数学题，这是许多人所关心的一个问题。要很好地回答它不是很容易的，因为它没有一个固定的简单的方法。只能多做练习，不断总结，才能提高自已的解题能力。人们通常从两个方面培养解题能力：1.对数学基础理论知识学深学透。不仅了解某一理论的表面特征，掌握其成立条件，还要进一步研究它的实质以及它与别的知识之间的联系；2.在解题过程中钻研解题方法，在解题过程中学会思考、分析的能力。

有步骤地思考分析问题是提高解题能力的关键。通常步骤如下：

第一步审题：搞清已知、求解（或求证）。

对这一步不能轻视、马虎，要思考每个已知条件的作用，要把已知条件看全（包括直接的或隐含的），要把所求的问题理解准确，否则就会造成根本性的错误。

第二步分析：选择解题方法。

首先要学会联想和类比，即考查一下是否见过类似的问题；如果见过，那就想是否可用同一解法来解这道题或还需作些适当的变换才可能。如果必须另辟途径，那就应该联想到此题条件和要求涉及到哪些数学知识（包括定义、定理、公式及其它性质）。找到了有关的数学知识，就找到了解题的“子弹”。进一步，就可寻找解题的途径，即探索解题思路，研究解题方法，这是解题的“瞄准”工作。必要时可作题目

的图示，使条件的特征直观。

第三步解题：要层次清楚，步步有理。

解答的每一步都必须有根据；解答的叙述要合理，规格要符合要求；解答必须正确而简明。

第四步讨论：分类研究，全面考虑，

许多习题要进行讨论，在什么条件下有解，有多少不同的解；什么条件下无解。总之，要做全面的考虑。

第五步检验：验证结果是否正确。

解题的每一步都不能粗心大意，要养成检查的习惯并学会估值、量纲、逆推、改换解法，将字母代入特殊值等检验方法。

第六步小结：不断总结经验，增强解题能力。

一道题解答完毕，不应就此终了，要想一想有没有更合理的解题方法，条件、结论可能发生什么变化，从此题可以得出什么结论等。使得做一道题会一类题的解法，并达到掌握知识，提高能力的目的。

完整的解题方案有时不是解题前就提出来，而是在解题过程中形成的。

寻找解法不一定一次成功，失败了，要返回去更仔细地分析题意，寻找失败原因，探索新的解法。

解题的方法一般是随着数学知识的增多而逐渐增加，一下子罗列出所有数学解题方法是不可能的。可是，中学生还是需要积累一些解题方法。

下面我们仅从几个方面作点介绍：

一、用概念解题的方法；

二、常用的技巧和主要的方法；

三、分析综合的思维方法；

四、“化整为零”的分析方法；

五、从特殊到一般的推理方法；

六、几何题的代数、三角解法。

一、用概念解题的方法

正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提。一切分析和推理主要是依据概念和应用概念进行的，只有透彻理解并灵活运用数学概念，才能掌握运算的技能技巧，才会做到正确、合理、迅速的逻辑论证。因此树立用概念解题的思想是十分重要的。

（一）运用概念解决问题

在数学中，除了少数几个最基本的概念（如集合、点、直线、平面等）外，大部分数学概念都是以下定义的方法描述其本质属性的，因而在解题中恰当地使用定义是十分重要的，而很多学生则往往忽略这点。在实例中如：

例1 求方程 $x^2+ax+b=0$ 与方程 $x^2+px+q=0$ 有且仅有一个公共根的条件，并求这个公共根。

解：设 α 为它们的公共根，根据根的定义

$$(I)\quad \begin{cases} \alpha^2+a\alpha+b=0 & (1) \\ \alpha^2+p\alpha+q=0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$ $(a-p)\alpha=q-b$，当 $a\neq p$ 时，两方程有且仅有一个公共根 $\alpha=\dfrac{q-b}{a-p}$.

此题用方程根的定义来解较为简捷，若使用韦达定理分别设两方程的根为 α、β 和 α、γ 列出四个方程

$$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=b;$$

$$\alpha+\gamma=-p,\quad \alpha\gamma=q,$$

消去 β、γ 仍为方程组（I），这样做走了弯路是因为没有充分认识已知条件的本质，不能恰当地使用概念，将简单问题复杂化了。推荐几道使用根的定义的题目供读者参考：

1） 方程 $x^2+ax+b=0$ 的根为 α，β，$f(n)=\alpha^n+\beta^n$ 求：$f(n+2)+af(n+1)+bf(n)$ 的值。（答：0）

2） 若方程 $a\cos x+b\sin x+c=0$ 在 $[0,\pi]$ 中有相异两根 α、β，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值。$\left(\text{答：}\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)$

例2 若 ε 是 1 的 n 次方根中的一个，求 $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}$

解：ε 是 1 的 n 次方根则 $\varepsilon^n=1$

当 $\varepsilon\neq 1$ 时 $\quad 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}=\dfrac{1(1-\varepsilon^n)}{1-\varepsilon}=0$

当 $\varepsilon=1$ 时 原式 $=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}}=n$

此题虽小但概念性很强，首先是 n 次方根的定义，另外还要注意等比数列求和公式的条件，分情况讨论。

例3 设抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）过焦点的弦 AB，与 x 轴成倾角 θ，求 $|AB|$。

此题解法很多，比如可以用求交点坐标、或应用直线参数方程等方法去解，下面介绍另外两种解法。

解法一：应用抛物线的定义和韦达定理解。

设直线 AB 的方程为 $y=\mathrm{tg}\theta\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$

代入抛物线方程 $y^2=2px$ 得：

$$x^2\mathrm{tg}^2\theta-p\ (\mathrm{tg}^2\theta+2)x+\frac{p^2}{4}\mathrm{tg}^2\theta=0$$

由韦达定理：$x_1+x_2=\dfrac{p(\mathrm{tg}^2\theta+2)}{\mathrm{tg}^2\theta}$

如图1-1，令 C 为 AB 中点，直线 l 为抛物线的准线，并作 $AD\perp l$，$BE\perp l$，$CH\perp l$ 交 y 轴于 G.

由抛物线定义得 $|AD|=|AF|$，$|BE|=|BF|$

$\therefore\ |AB|=|AF|+|BF|=|AD|+|BE|=2|CH|$

$$=2|CG|+2|HG|=|x_1+x_2|+p$$

$$=\frac{p(\mathrm{tg}^2\theta+2)+p\cdot\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}$$

解法二：应用二次曲线统一定义和极坐标方程解。

以焦点 F 为极点，Fx 为极轴建立极坐标系（如图1-2），

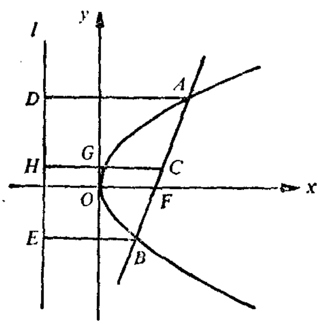

图 1-1

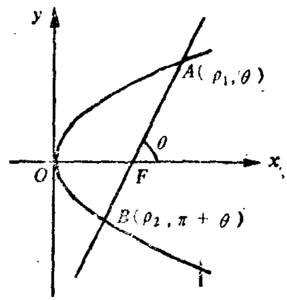

图 1-2

则抛物线的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$

令 A 点坐标为 $(\rho_1,\ \theta)$，B 点坐标为 $(\rho_2,\ \pi+\theta)$，

则 $|AB|=\rho_1+\rho_2=\dfrac{p}{1-\cos\theta}+\dfrac{p}{1-\cos(\pi+\theta)}$

$$=\frac{2p}{\sin^2\theta}$$

显然利用极坐标方程计算较为简洁。

在解析几何中用概念解题的例子很多，下面推荐几道供读者练习：

1） 求证以抛物线的焦点弦（过焦点的直线被抛物线所截的线段）为直径的圆必切此抛物线的准线。

2） 在椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 上求一点，它到右焦点的距离等于到左焦点距离的 4 倍。

提示：由椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 焦点坐标为 (4, 0) (−4, 0)；设椭圆上点 $p(x, y)$ 到右焦点的距离为 m，到左焦点的距离为 n，则

$$\begin{cases} m=4n \\ m+n=2a=10 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} m=8 \\ n=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-4)^2+y^2}=8 \\ \sqrt{(x+4)+y^2}=2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=-\frac{15}{4}, & -\frac{15}{4} \\ y=\frac{3\sqrt{7}}{4}, & -\frac{3\sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

$$\therefore p\left(-\frac{15}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4}\right) \text{ 或 } p\left(-\frac{15}{4}, -\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$$

3） 设△ABC 周长是50，底边 $AB=24$，令 AB 不动，并且在不改变三角形周长的条件下，移动顶点 C，求 C 点的轨迹方程。（答：$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$，且 $y\neq 0$）

数学符号是符号化了的数学概念，它有着高度的抽象性，只有深刻地理解概念才能正确使用数学符号。