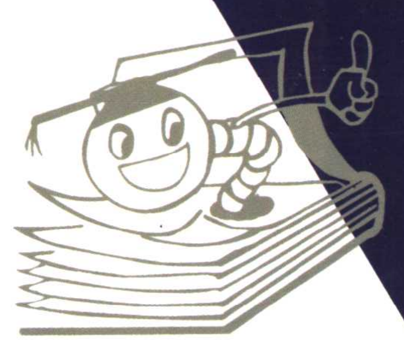
考试虫

2004年版



考试虫学习体系

# 洞穿考研数学（理工类）
## ——名师授课听课笔记

最贴近考生需求的考研数学书！！！

主编：牟俊霖　李青吉
审订：赵建中

航空工业出版社

# 洞穿考研数学(理工类)

## ——名师授课听课笔记

航空工业出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

洞穿考研数学:理工类/牟俊霖等主编.
-北京:航空工业出版社,2003.4
ISBN 7-80183-142-X
I.洞… II.牟… III.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV.013
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025065 号

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

| | |
|---|---|
| 北京富生印刷厂 | 全国各地新华书店经销 |
| 2003 年 8 月第 1 版 | 2003 年 9 月第 2 次印刷 |
| 开本:787×1092 1/16 | 印张:41.25 字数:660 千字 |
| 印数:5001-8000 | 定价:44.00 元 |

# 前　言

当你决定购买本书的时候，你应当考虑：你从本书中得到的收益和你应当支付的成本．重要的是你的收益能否大于你的成本．一般而言，读书的时间成本远远地大于货币成本．特别是在准备考研的过程中，时间是最宝贵的，因此，既节省时间又能提高成绩是问题的关键．以下是对本书特点的分析，这将有助于你做出决策．

**一、权威性**

**本书 80% 的题目选自近 20 年(1979～2003)的考研真题**．

这近 20 年的 2000 多道考研真题构成了一本最权威、最全面的考研复习资料．我们认真研究了历年考研试题的特点，发现两条重要规律．第一：考研大纲上所有考点都已命制过考题，而且**考研试题总是不断重复出现**，有的试题几乎就是重复前几年的试题．第二：**理工类和经济类试题总是交替出考题**，我们每年都能发现前几年理工类出过的考题稍作变换就出现在经济类试卷中．其原因在于：数学考研大纲上规定的考点是有限的，经过近二十年的考研命题，出现过的考题已经涵盖了所有的考点，再出考题时重复是不可避免的．请同学们参看**附表一**中所列举的典型的考题重复的情况．

所以要想在考研中取得好成绩，必须认真掌握考研真题．为了让读者能够把握好这些真题，我们把 2001 年以前的试题精选分类，作为例题或习题；把 2001～2003 年的试题附于书后，作为最权威的模拟试题，这样就能把解题方法与真题很好地结合起来．

当然，我们选题没有拘泥于理工类与经济类之区分，而是综合了各次试卷的同类试题．

**二、系统性与独特性**

对于数学来讲，巧力胜过蛮劲．本书作者苦心研究，**总结出这个时代的众多数学精英们的智慧，以弥补个体思维的局限**．其目的只有一个，就是让同学们轻松获取考研数学过关捷径，改变考生考试命运．本书独到之处在于建立了一个以大纲各考点内在联系为基础的活的题型框架．为了让考生掌握这个**全新的题型框架**，我们从以下四方面增强了它的内在联系：

1．**全新而合理的章节安排**．我们摒弃了按教材章节安排内容顺序的方法，而是把相关章节进行整合，让读者通过对比分析来达到对知识的融会贯通．例如，按教材顺序，在一元函数导数和二元函数偏导数中间夹着一章不定积分，同学们很难看出一元、二元函数微分的内在联系，其实二者不论从解题方法和思路上都很相似，所以我们把这两章归纳在一起．又如，线性代数中的证明题分散在行列式、矩阵、向量、线性方程组等章节当中，同学们很难从总体上把握，我们把它们综合归纳成一章——线性代数中的证明题．具体的章节安排及其理由，请同学们参照**附表二**．

2．**在每一章每一节中，我们把解题方法类似的例题归为一种题型，把每一节归纳成几种或十几种题型**．这样做的优点在于：每一节题型数目较少，而且各题型之间有很强的内在联系，相对零散的几十个例题而言，更便于掌握．同时，由于每一种题型下设几个类似小题，同学们可以从不同的角度分析掌握这种题型，从而把握各种题型的实质．通过我们的归纳总结，所有的题型用一张表格就可以完全的凸现出来，相信考生有信心掌握好，参见**附表三**．

3．**解题方法的讲解，一般先讲基本方法，后讲特殊方法，同时归纳出一系列解题的基本步骤**，以便读者在解题的时候有一个清晰的思路．这些解题的基本步骤能帮助你尽快地找到解题思路，提高解题效率．例如，求极限时，应先把非标准题型转换为标准题型，这要用到对数恒等式，或用换元法、通分法，然后想办法用洛必达法则，同时要注意能求出极限的因子应首先求出等．

4．**在书的前面，我们总结了基本公式与重要定理、基本题型与解题方法两个重要附录，这是**

**本书的精华之所在**.许多考生在临考前,三角函数公式都记不住,许多复杂的公式记不牢,但要找一个公式却要翻看好几本书,极为不便;同时,对各种题型没有一个清晰的、全面的认识,想拿起书来复习又没有时间,不复习又不放心.为了解决考生这方面的困难,我们精心准备了这两个重要附录.这样学习数学在某种程度上就转化为记忆性的工作,每天只需花十分钟就可以把它们复习一遍,从而稳定心情,避免不必要的焦虑和担心,这是至关重要的!

最后,考生在练习和考试的时候,首先应判断题目属于哪一章哪一节的何种题型,然后确定这种题型的基本解题方法,按照这种循序渐进的思维方法解题,会减少解题过程中的盲目性,提高解题的效率.相反,如果只记住了几种缺乏内在联系的思维定势,一遇到难题就不知道选用何种方法,而且有限的几种思维定势是不足以应对灵活多变的考研试题.我们相信,**建立在考研大纲各知识点内在联系基础上的题型框架,可以确保考生取得好成绩**.

**三、简捷性**

**1.基础知识的总结简明扼要,尽力避免深奥的数学定义**.

对一些较难的概念用简单的例子加以说明,同时指出其实质.例如,在讲解随机变量、随机变量的分布函数与分布密度、随机变量的数学期望与方差这些抽象的概念时,我们用一些十分简单的例子来说明这些概念,并指出数学期望的实质就是平均数,随机变量的概率就是其权数等.

**2.本书中归纳了许多适用、快捷的简便方法**.

如果读者能较好地运用它们,将会提高你的解题速度和准确性,进而在考试中为你争取到更多的时间.这些方法十分简单,你在熟悉基础知识后就可熟练掌握(解题方法参见具体章节),现举例如下:

(1)在求$(1+0)^{\infty}$型极限的时候,只须求“$0\cdot\infty$”的极限,于是利用观察法就可得到答案.

例如,(87.3)求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^{x})^{1/x}$,用观察法可得出答案 e.

(2)在二阶常系数微分方程特解的求解过程中,引入微分算子法,将大大节约解题时间和提高准确率.

例如,(92.2)求微分方程 $y''+2y-3y=e^{-3x}$,用此方法很快就能得出其特解为$-(\frac{x^2}{2}+x)e^{x}$.

(3)关于高等数学的存在性证明题,我们归纳出:凡是可分离变量的用凑微分的方法解;其余的全部用解微分方程的方法求解.

(4)在判定级数敛散性时,用等价无穷小代换法求解.

例如,(95.1)设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$,判断级数$\sum\limits_{n=1}^{n}u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{n}u_n{}^2$ 的敛散性(本题原为选择题).

由于 $u_n{}^2=\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$,所以可判断$\sum\limits_{n=1}^{n}u_n{}^2$ 发散.

(5)**用观察法求解线性方程组的基础解系**.我们极力向你推荐这种快捷而准确的解题方法.参见线性代数第一章第三节的基础知识讲解(P.350).

**四、鉴于同类辅导书没有给出解题的详尽过程,给同学们的学习带来不便,本书所有的习题都给出了清晰、详尽的答案**.

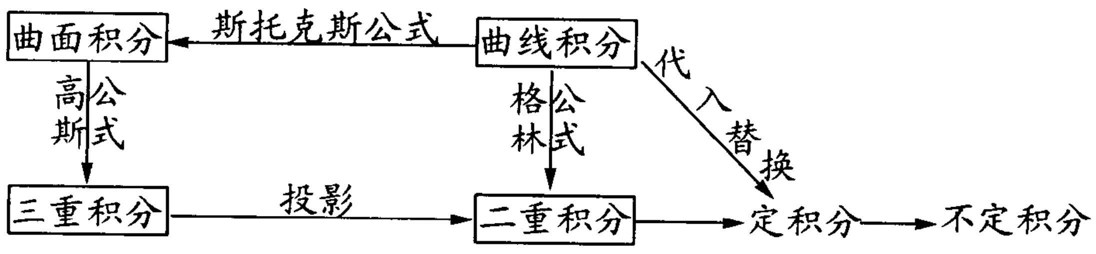
请记住:答题的最高境界是再现!我只要拿几道过去考过的题考考你,请你给我讲讲其中蕴含的奥妙,我就能知道你数学能考多少分.

编者于北京

附表一：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (96.1) 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限. | (03.1) $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限. | 隔七年同类题. |
| 2 | (89.3) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$. | (93.1) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$. | 理工仿经济. |
| 3 | (92.4) 求 $I=\int\frac{\arctan e^x}{e^x}dx$. | (03.1) 求 $\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$. | 只差一个数值. |
| 4 | (91.1) 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dv$，其中 $\Omega$ 是曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周形成的曲面与 $z=4$ 所围成的立体. | (97.1) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 $\Omega$ 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域. | 间接六年的同类题，只差数值不同. |
| 5 | (同济大学等八所院校 85) 用铁锤把铁钉击入木板，设木板对铁钉阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤第一次锤击时将铁钉击入 1cm，若每次锤击所做功相等，问第 $n$ 次击时，又将铁钉击入多少？ | (03.1) 某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层，汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功，设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 $k$，$k>0$），汽锤第一次击打将桩打进地下 $a$m，根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$，问(1)汽锤击打桩3次后，可将桩打进地下多深？(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？ | 显然(03.1)仿照左边的题命制的，间隔年限较大. |
| 6 | (阜新矿业学院 85) 设 $f(x)$ 连续且满足方程 $\int_0^x tf(t)dt=x^2+f(x)$，求 $f(x)$. | (92.3) 求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$. | 此二题类似. |
| 7 | (97.3) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$，求 $f(t)$. | (02.4) 设闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant y, x\geqslant 0$，$f(x,y)$ 为 $D$ 上的连续函数，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_{D}f(u,v)dudv$，求 $f(x,y)$. | 前题两边求导；后题两边积分（二重）. |
| 8 | (92.4) 矩阵 $A=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$ 的非零特征值为______. | (99.1) 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的元素全为 1，则 $A$ 的 $n$ 个特征值为______. | 理工仿经济，后题为前题的一般情况. |
| 9 | (87.1) $A$ 为 $n$ 阶方阵，且 $A$ 的行列式 $\mid A\mid=a\neq 0$，而 $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，求 $\mid A^*\mid$. | (90.4) $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，求 $\mid A^*\mid$（该题为选择题）. | 经济仿理工. |
| 10 | (94.1) 设四元线性齐次方程组（Ⅰ）为：$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，已知某线性齐次方程（Ⅱ）的通解为 $k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$，求(1)求线性方程（Ⅰ）的基础解系.(2)问线性方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）是否有非零公共解？若有求出所有非零公共解，若没有说明理由. | (02.4) 设四元齐次线性方程组（Ⅰ）为：$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$，且已知另一四元齐次线性方程组（Ⅱ）的一个基础解系为：$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T, \alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$，求(1)求方程组（Ⅰ）的一个基础解系；(2)当 $a$ 为何值时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解. | 经济仿理工，解题方法完全类似，间隔八年. |
| 11 | (95.1) 设三阶实对称矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$，对应 $\lambda_1$ 的特征向量 $\xi_1=[0,1,1]^T$，求 $A$. | (97.3) 三阶实对成矩阵的征值是 1,2,3，矩阵 $A$ 的属于特征值 1,2 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T, \alpha_2=(1,-2,-1)^T$，求(1)求 $A$ 的属于特征值 3 的特征向量(2)求矩阵 $A$. | 经济仿理工，隔两年. |
| 12 | (93.1) 一批产品有 10 个正品和两个次品，任意抽取两次，每次抽出一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为______. | (97.1) 袋内有 50 个球，20 个为黄色，30 个为白色，今两人依次各从中取一球，取后不放回，则第二人取得黄球的概率______. | 这两题模型一样，数值不同. |
| 13 | (88.3) 随机变量 $X$ 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布，试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度函数. | (95.1) 随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\geqslant 0\\0, \quad x<0\end{cases}$，求 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$. | 同为求 $Y=e^X$ 型的分布. |
| 14 | (99.3) 假设二维随机变量 $(X,Y)$ 在矩形 $G\{(X,Y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，记 $U=\begin{cases}0, & 若 X\leqslant Y\\1, & 若 X>Y\end{cases}$，$V=\begin{cases}0, & 若 X\leqslant 2Y\\1, & 若 X>2Y\end{cases}$，(1)求 $U,V$ 的联合分布.(2)求 $U,V$ 的相关系数 $r$（该题分值为 9 分）. | (02.3) 假设随机变量 $U$ 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，随机变量 $X=\begin{cases}-1, & 若 U\leqslant -1\\1, & 若 U>-1\end{cases}$；$Y=\begin{cases}-1, & 若 U\leqslant -1\\1, & 若 U>1\end{cases}$；试求(1) $X$ 和 $Y$ 的联合概率分布；(2) $D(X+Y)$. | 经济类重复考题，间隔三年. |
| 15 | (99.4) 假设随机变量 $X$ 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数______（该题为选择题）. | (02.3) 假设一设备开机后无故障工作的时间 $X$ 服从指数分布，平均无故障工作的时间 $(EX)$ 为 5 小时，设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机，试求该设备每次开机无故障工作的时间 $Y$ 的分布函数 $F(y)$. | 前后二题同为指数分布，且 $Y=\min\{X,2\}$ 相同！ |
| 16 | (89.3) 随机变量 $X$ 的数学期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，由切比雪夫不等式，$P\{\mid X-\mu\mid\geqslant 3\sigma\}$. | (01.1) 设随机变量 $X$ 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{\mid X-E(X)\mid\geqslant 2\}$. | 后题为前题特例. |
| 17 | (96.4) 设来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，样本均值 $\bar{X}=5$，则未知参数 $\mu$ 置信度为 0.95 的置信区间______. | (03.1) 已知一批零件的长度 $X$（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机的抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40(cm)，则 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间是______. | 理工仿经济，仅数值不同. |

## 附表二.

| | | |
|---|---|---|
| 第一篇 高等数学 | 第一章 | **极限与级数**.极限与级数联系很紧密.例如:用幂级数展开式求极限是常用方法;求幂级数收敛域就是求$\sqrt[n]{u_n(x)}$或$\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$的极限;极限中的等价无穷小代换还可以用于判定级数敛散性. |
| | 第二章 | **一元、二元函数的微分及其运用**.本章把一元函数的导数、二元函数的偏导数与全微分,以及用导数法作图,证明不等式,求函数最值等相关内容归纳在一起. |
| | 第三章 | **不定积分、定积分、二重积分**.二重积分通过累次积分化为定积分,而求解定积分首先要求出不定积分. |
| | 第四章 | **空间解析几何、三重积分、曲线与曲面积分**.没有空间解析几何的基本知识,如投影,向量等,很难求解三重积分、曲线与曲面积分;我们还可以从下图中看到各种积分之间的相互转换关系:   |
| | 第五章 | **积分的几何运用与物理运用**.这些知识点分散在各章节,读者难以全面的掌握,所以我们综合归纳为一章. |
| | 第六章 | **常微分方程**. |
| | 第七章 | **高等数学中的证明题**.本章归纳了高等数学中证明题的常用方法.例如:用泰勒公式展开式证明有关题型,用费尔马定理证明$f'(\xi)=0$,用作辅助函数法证明存在性问题等. |
| 第二篇 线性代数 | 第一章 | **基础知识与基本题型**.本章按行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型分为五节,逐一讲解了线性代数中的基础知识与基本题型,这主要应对考研题中的选择和填空题. |
| | 第二章 | **线性代数中的解答题**.求向量组的线性表示、求解线性方程组以及矩阵相似对角化等问题的方法十分固定,要么对矩阵作初等变换,要么求行列式,然后讨论参数取值,即可求解. |
| | 第三章 | **线性代数中的证明题**.本章把线性代数中分散在各章节的证明题归纳在一起,总结出九种常用证明题题型. |
| 第三篇 概率论与数理统计初步 | 第一章 | **随机事件及其概率(古典概率)**. |
| | 第二章 | **随机变量的分布与数字特征**.求随机变量的分布与数字特征都要用到高等数学中微积分的知识.例如:二维随机变量的联合分布和数字特征要用二重积分求解;已知分布函数求分布密度要求导数.而且求解分布是求解数字特征的基础. |
| | 第三章 | **大数定律、中心极限定理与数理统计**.中心极限定理是数理统计中推断统计分布的基础,而推断统计分布又是数理统计中区间估计和假设性检验的基础,所以应把这三部分有机结合起来. |

## 附表三：

# 重要公式与基本定理

## 三角公式(高中知识)

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cos\beta$ $\quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\quad \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$ $\quad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\quad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$ $\quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

### 一、重要极限与等价无穷小代换

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$;  2. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$;

3. $\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x-1 \sim x$;

4. $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;  5. $a^x-1 \sim x\ln a$;  6. $(1+\alpha x)^\beta-1 \sim \alpha\beta x$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty}x^na^{-x} = 0(a>1)$;  8. $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x = 0 \quad (\alpha>0)$.

### 二、常用幂级数展开式

1. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,(-1<x<1)$

2. $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n,(-1<x<1)$

3. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^n}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

4. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

5. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

6. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,(-1<x\leqslant1)$

7. $(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,(-1<x<1)$

8. $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\cdots,(-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2})$

9. $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$

10. $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$

## 三、Fourier 级数

| 区间 | 展开式与和函数 |
|---|---|
| $[a,b]$ | $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) = S(x)$,其中<br>$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, (n = 0,1,2,\cdots)$<br>$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, (n = 1,2,\cdots), l = \frac{b-a}{2}$<br>$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b) \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & x \in (a,b) \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点} \\ \frac{1}{2}[f(a^+) + f(b^-)], & x = a \text{ 或 } b \end{cases}$ |
| $[0,l]$<br>(正弦展开) | $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x = S(x)$<br>其中 $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x (n = 1,2,\cdots)$<br>$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (1,l) \text{ 为 } f \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & x \in (0,l) \text{ 为 } f \text{ 的第一类间断点} \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } l \end{cases}$ |
| $[0,l]$<br>(余弦展开) | $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x = S(x)$<br>其中 $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x (n = 0,1,2\cdots)$<br>$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,l) \text{ 为 } f \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & x \in (0,l) \text{ 为 } f \text{ 的第一类间断点} \\ f(0^+), & x = 0 \\ f(l^-), & x = l \end{cases}$ |

## 四、导数公式

$(x^a)' = ax^{a-1};\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$　　$(e^x)' = e^x;(a^x)' = a^x\ln a(a > 0)$

$(\sin x)' = \cos x;(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$　　$(\ln x)' = \frac{1}{x};(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}(0 < a \neq 1)$

$(\cos x)' = -\sin x;(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$　　$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)'$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x};(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$　　$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\text{arccot}\,x)'$

## 五、高阶导数公式

1. $(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}$
2. $(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
3. $(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
4. $((ax+b)^\beta)^{(n)} = a^n\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)(ax+b)^{\beta-n}$
5. $(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$
6. $(\ln(ax+b))^{(n)} = (-1)^{n-1}a^n(n-1)!\frac{1}{(ax+b)^n}$

## 六、积分公式

$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C(a \neq -1)$　　$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$　　$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(0 < a \neq 1)$　　$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$　　$\int \text{sh}x dx = \text{ch}x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$　　$\int \text{ch}x dx = \text{sh}x + C$

$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$　　$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec x\tan x dx = \sec x + C$

$\int \csc x\cot x dx = -\csc x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$　　$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan x + \sec x| + C$　　$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\cot x - \csc x| + C$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$　　$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$　　$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$$

$$\int\ln x\,dx=x(\ln x-1)+C$$

## 七、向量运算

1. 方向余弦

$a=xi+yj+zk=(x,y,z)$ 的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

2. 向量运算

设 $a=\{x_1,y_1,z_1\},b=\{x_2,y_2,z_2\}$，则

$a+b=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}$； $\lambda a=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$；

$a\cdot b=|a||b|\cos(a,b)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$（数量积）；

$a\cdot b=b\cdot a;(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$； $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}\text{（向量积）}$$

$a\times b=-b\times a$； $(\lambda a)\times b=\lambda(a\times b)$； $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

$$[a\,b\,c]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\text{（混合积）}$$

$[a\,b\,c]=[b\,c\,a]=[c\,a\,b]$； $[a\,a\,b]=0$； $[a\,b\,c]=-[b\,c\,a]$，

$[\lambda a\,b\,c]=\lambda[a\,b\,c]$； $[(a_1+a_2)\,b\,c]=[a_1\,b\,c]+[a_2\,b\,c]$

## 八、空间解析几何

1. 空间直线方程

一般式：$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\end{cases}$ 两点式：$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$

点向式：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$； 参数式：$x=x_0+tl,y=y_0+tm,z=z_0+tn$

2. 平面方程

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$； 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

三点式：$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0$；截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

3. 距离公式

点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的距离

$$d=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L:\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离，$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\tau|}{|\tau|}$，$\tau=\{l,m,n\}$.

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离，$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

4. 二次曲面

| 曲面名称 | 方　程 | 曲面名称 | 方　程 |
|---|---|---|---|
| 椭球面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ | 旋转抛物面 | $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z(p>0)$ |
| 椭圆抛物面 | $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$ | 双曲抛物面 | $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(q,p>0)$ |
| 单叶双曲面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ | 双叶双曲面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ |
| 二次锥面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ | 椭圆柱面 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ |
| 双曲柱面 | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | 抛物柱面 | $\frac{x^2}{2p}=y(p>0)$ |

## 九、多元函数积分基本公式

1. 二重积分

若 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$.

若 $D=\{(x,y):c\leqslant y\leqslant \mathrm{d},\varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y)\}$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

2. 三重积分

若 $\Omega=\{(x,y,z):\varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y),(x,y)\in D\}$，则

$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

若 $\Omega=\{(x,y,z):a\leqslant z\leqslant b,(x,y)\in D_z\}$，则

$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_z$ 为 $\Omega$ 的截面(平行于 $xy$ 平面).

3. Green 公式：$\oint\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，($L$ 为 $D$ 的正向边界).

4. Gauss 公式：$\oiint\limits_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega(P_x+Q_y+R_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$（$\sum$ 是 $\Omega$ 的外表面).

5. 斯托克斯公式：$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$，其中曲线 $L$ 的方向与

曲面$\sum$所取侧的法线方向满足右手法则，即用右手四指表示 $L$ 的方向，则拇指的指向就是曲面$\sum$所取侧的法线方向.

6. 弧元：$dS = \sqrt{d^2x + d^2y} = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}dt = \sqrt{1 + y'^2_x}dx = \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}d\theta$.

面积元：$d\sigma = dxdy = rdrd\theta, dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$.

体积元：$dv = dxdydz = rdrd\theta dz = \rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$，$(r,\theta,z)$与$(\rho,\varphi,\theta)$分别为柱面坐标与球面坐标.

## 十、行列式

1. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

2. 与矩阵有关的公式（以下 $A,B$ 为 $n$ 阶方阵）

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$；$|A| = \prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，$\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为 $A$ 的特征值.

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$|kA| = k^n|A|$； $|A^n| = |A|^{n-1}$.

$|AB| = |A||B| = |BA|$， $|AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$.

设 $C,D$ 分别为 $m$ 阶，$k$ 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} C & * \\ O & D \end{vmatrix} = |C||D|；\begin{vmatrix} C & O \\ * & D \end{vmatrix} = |C||D|；\begin{vmatrix} O & D \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^{m\cdot n}|C||D|.$$

## 十一、矩阵的运算公式

1. 逆矩阵

$(A^{-1})^{-1} = A$；$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$；$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{bmatrix}；\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}；\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

2. 伴随矩阵（$A,B$ 为 $n$ 阶方阵）

$A^*A = AA^* = |A|I$； $A^* = |A|A^{-1}$； $(kA)^* = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;　　$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$;　　$(A^*)^* = |A|^{n-2}A(n \geqslant 2)$

$(A^T)^* = (A^*)^T$;　　$(AB)^* = B^*A^*$

3. 矩阵的秩

$r(A) = r(A^T)$,　$r(A \pm B) \leqslant r(A) + r(B)$,　$r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$

若 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$,则 $r(A) + r(B) - n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.

若 $AB = 0$,则 $r(A) + r(B) \leqslant n$.

## 十二、向量空间

$(\alpha,\alpha) \geqslant 0$;　$(\alpha,\alpha) = 0 \Leftrightarrow a = 0$;　$(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$

$(k_1\alpha + k_2\beta,\gamma) = k_1(\alpha,\gamma) + k_2(\beta,\gamma)$

$|(\alpha,\beta)| \leqslant |\alpha||\beta|$,($|\alpha|$ 表示 $\alpha$ 的长度)

$(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ 与 $\beta$ 正交

Schmidt 正交化方法:设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,令 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,\cdots$,

$\beta_n = a_n - \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}$,再令 $\xi_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|}$, $i = 1,2,\cdots,n$,

则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为标准正交向量组.

## 十三、常用概率公式

1. 条件概率:$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$,其中 $A$, $B$ 为随机事件,$P(A) > 0$.

2. 乘法公式:$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$,其中 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为随机事件,$P(A_1\cdots A_n) \neq 0$.

3. 全概率公式:$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$,其中 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为样本空间 $\Omega$ 的一个完全事件组,$P(A_i) > 0$, $i = 0,1,2,\cdots,n$.

4. 贝叶斯公式:$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$, $i = 1,2,\cdots,n$,其中,对 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的要求同 3.

5. 广义加法公式:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

## 十四、常用分布

| | 分布 | 参数 | 分布律或概率强度 | 数学期望 | 方差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | (0 - 1) 分布 | $p$<br>$0 < p < 1$ | $P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$<br>$k = 0,1$ | $p$ | $p(1-p)$ |
| 2. | 二项分布 $B(n,p)$ | $n,p; n \geqslant 1$,<br>$0 < p < 1$ | $P(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$<br>$k = 0,1,\cdots,n$ | $np$ | $np(1-p)$ |