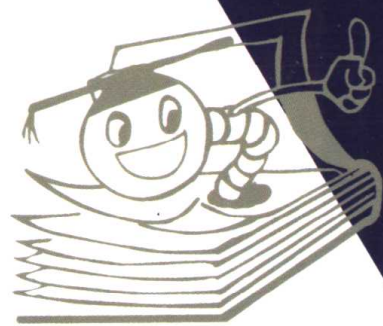


考试



2004 年版

考试虫学习体系

洞穿考研数学（理工类） ——名师授课听课笔记

最贴近考生需求的考研数学书!!!

主编：牟俊霖 李青吉

审订：赵建中

航空工业出版社

洞穿考研数学(理工类)

——名师授课听课笔记

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

洞穿考研数学:理工类/牟俊霖等主编.

—北京:航空工业出版社,2003.4

ISBN 7-80183-142-X

I. 洞… II. 牟… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025065 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

北京富生印刷厂

全国各地新华书店经销

2003 年 8 月第 1 版

2003 年 9 月第 2 次印刷

开本:787×1092 1/16

印张:41.25 字数:660 千字

印数:5001-8000

定价:44.00 元

本社图书如有缺页、倒页、脱页、残页等情况,请与本社发行部联系负责调换. 联系电话:64890262、64941995.

前言

当你决定购买本书的时候,你应当考虑:你从本书中得到的收益和你应当支付的成本.重要的是你的收益能否大于你的成本.一般而言,读书的时间成本远远地大于货币成本.特别是在准备考研的过程中,时间是最宝贵的,因此,既节省时间又能提高成绩是问题的关键.以下是对本书特点的分析,这将有助于你做出决策.

一、权威性

本书 80% 的题目选自近 20 年(1979~2003)的考研真题.

这近 20 年的 2000 多道考研真题构成了一本最权威、最全面的考研复习资料.我们认真研究了历年考研试题的特点,发现两条重要规律.第一:考研大纲上所有考点都已命制过考题,而且考研试题总是不断重复出现,有的试题几乎就是重复前几年的试题.第二:理工类和经济类试题总是交替出考题,我们每年都能发现前几年理工类出过的考题稍作变换就出现在经济类试卷中.其原因在于:数学考研大纲上规定的考点是有限的,经过近二十年的考研命题,出现过的考题已经涵盖了所有的考点,再出考题时重复是不可避免的.请同学们参看附表一中所列举的典型的考题重复的情况.

所以要想在考研中取得好成绩,必须认真掌握考研真题.为了让读者能够把握好这些真题,我们把 2001 年以前的试题精选分类,作为例题或习题;把 2001~2003 年的试题附于书后,作为最权威的模拟试题,这样就能把解题方法与真题很好地结合起来.

当然,我们选题没有拘泥于理工类与经济类之区分,而是综合了各次试卷的同类试题.

二、系统性与独特性

对于数学来讲,巧力胜过蛮劲.本书作者苦心研究,总结出这个时代的众多数学精英们的智慧,以弥补个体思维的局限.其目的只有一个,就是让同学们轻松获取考研数学过关捷径,改变考生考试命运.本书独到之处在于建立了一个以大纲各考点内在联系为基础的活的题型框架.为了让考生掌握这个全新的题型框架,我们从以下四方面增强了它的内在联系:

1. 全新而合理的章节安排.我们摒弃了按教材章节安排内容顺序的方法,而是把相关章节进行整合,让读者通过对比分析来达到对知识的融会贯通.例如,按教材顺序,在一元函数导数和二元函数偏导数中间夹着一章不定积分,同学们很难看出一元、二元函数微分的内在联系,其实二者不论从解题方法和思路上都很相似,所以我们把这两章归纳在一起.又如,线性代数中的证明题分散在行列式、矩阵、向量、线性方程组等章节当中,同学们很难从总体上把握,我们把它们综合归纳成一章——线性代数中的证明题.具体的章节安排及其理由,请同学们参照附表二.

2. 在每一章每一节中,我们把解题方法类似的例题归为一种题型,把每一节归纳成几种或十几种题型.这样做的优点在于:每一节题型数目较少,而且各题型之间有很强的内在联系,相对零散的几十个例题而言,更便于掌握.同时,由于每一种题型下设几个类似小题,同学们可以从不同的角度分析掌握这种题型,从而把握各种题型的实质.通过我们的归纳总结,所有的题型用一张表格就可以完全的凸现出来,相信考生有信心掌握好,参见附表三.

3. 解题方法的讲解,一般先讲基本方法,后讲特殊方法,同时归纳出一系列解题的基本步骤,以便读者在解题的时候有一个清晰的思路.这些解题的基本步骤能帮助你尽快地找到解题思路,提高解题效率.例如,求极限时,应先把非标准题型转换为标准题型,这要用到对数恒等式,或用换元法、通分法,然后想办法用洛必达法则,同时要注意能求出极限的因子应首先求出等.

4. 在书的前面,我们总结了基本公式与重要定理、基本题型与解题方法两个重要附录,这是

本书的精华之所在.许多考生在临考前,三角函数公式都记不住,许多复杂的公式记不牢,但找一个公式却要翻看好几本书,极为不便;同时,对各种题型没有一个清晰的、全面的认识,想拿起书来复习又没有时间,不复习又不放心.为了解决考生这方面的困难,我们精心准备了这两个重要附录.这样学习数学在某种程度上就转化为记忆性的工作,每天只需花十分钟就可以把它们复习一遍,从而稳定心情,避免不必要的焦虑和担心,这是至关重要的!

最后,考生在练习和考试的时候,首先应判断题目属于哪一章哪一节的何种题型,然后确定这种题型的基本解题方法,按照这种循序渐进的思维方法解题,会减少解题过程中的盲目性,提高解题的效率.相反,如果只记住了几种缺乏内在联系的思维定势,一遇到难题就不知道选用何种方法,而且有限的几种思维定势是不足以应对灵活多变的考研试题.我们相信,建立在考研大纲各知识点内在联系基础上的题型框架,可以确保考生取得好成绩.

三、简捷性

1. 基础知识的总结简明扼要,尽力避免深奥的数学定义.

对一些较难的概念用简单的例子加以说明,同时指出其实质.例如,在讲解随机变量、随机变量的分布函数与分布密度、随机变量的数学期望与方差这些抽象的概念时,我们用一些十分简单的例子来说明这些概念,并指出数学期望的实质就是平均数,随机变量的概率就是其权数等.

2. 本书中归纳了许多适用、快捷的简便方法.

如果读者能较好地运用它们,将会提高你的解题速度和准确性,进而在考试中为你争取到更多的时间.这些方法十分简单,你在熟悉基础知识后就可熟练掌握(解题方法参见具体章节),现举例如下:

(1)在求 $(1+0)^\infty$ 型极限的时候,只须求“ $0 \cdot \infty$ ”的极限,于是利用观察法就可得到答案.

例如,(87.3)求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x e^x)^{1/x}$,用观察法可得出答案 e .

(2)在二阶常系数微分方程特解的求解过程中,引入微分算子法,将大大节约解题时间和提高准确率.

例如,(92.2)求微分方程 $y'' + 2y - 3y = e^{-3x}$,用此方法很快就能得出其特解为 $-(\frac{x^2}{2} + x)e^x$.

(3)关于高等数学的存在性证明题,我们归纳出:凡是可分离变量的用凑微分的方法解;其余的全部用解微分方程的方法求解.

(4)在判定级数敛散性时,用等价无穷小代换法求解.

例如,(95.1)设 $u_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$,判断级数 $\sum_{n=1}^n u_n, \sum_{n=1}^n u_n^2$ 的敛散性(本题原为选择题).

由于 $u_n^2 = \ln^2(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty)$,所以可判断 $\sum_{n=1}^n u_n^2$ 发散.

(5)用观察法求解线性方程组的基础解系.我们极力向你推荐这种快捷而准确的解题方法.参见线性代数第一章第三节的基础知识讲解(P.350).

四、鉴于同类辅导书没有给出解题的详尽过程,给同学们的学习带来不便,本书所有的习题都给出了清晰、详尽的答案.

请记住:答题的最高境界是再现!我只要拿几道过去考过的题考考你,请你给我讲讲其中蕴含的奥妙,我就能知道你数学能考多少分.

编者于北京

附表一:

1	(96.1) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.	(03.1) $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.	隔七年同类题.
2	(89.3) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.	(93.1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.	理工仿经济.
3	(92.4) 求 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$.	(03.1) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.	只差一个数值.
4	(91.1) 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与 $z = 4$ 所围成的立体.	(97.1) 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z = 8$ 所围成的区域.	间接六年的同类题, 只差数值不同.
5	(同济大学等八所院校 85) 用铁锤把铁钉击入木板. 设木板对铁钉阻力与铁钉进入木板的深度成正比, 铁锤第一次锤击时将铁钉击入 1cm, 若每次锤击所做功相等, 问第 n 次击时, 又将铁钉击入多少?	(03.1) 某建筑工程打地基时, 需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打, 都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为 $k, k > 0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下 a m, 根据设计方案, 要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r ($0 < r < 1$). 问 (1) 汽锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深? (2) 若击打次数不限, 汽锤至多能将桩打进地下多深?	显然 (03.1) 仿照左边的题命制的, 间隔年限较大.
6	(阜新矿业学院 85) 设 $f(x)$ 连续且满足方程 $\int_0^x y f(t) dt = x^2 + f(x)$, 求 $f(x)$.	(92.3) 求连续函数 $f(x)$, 使它满足 $f(x) + 2 \int_0^x f(t) dt = x^2$.	此二题类似.
7	(97.3) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(t) = e^{at^2} + \int_0^t f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy$, 求 $f(t)$.	(02.4) 设闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0, f(x, y)$ 为 D 上的连续函数, 且 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(u, v) du dv$, 求 $f(x, y)$.	前题两边求导; 后题两边积分 (二重).
8	(92.4) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的非零特征值为_____.	(99.1) 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 n 个特征值为_____.	理工仿经济, 后题为前题的一般情况.
9	(87.1) A 为 n 阶方阵, 且 A 的行列式 $ A = a \neq 0$, 而 A^* 是 A 的伴随矩阵, 求 $ A^* $.	(90.4) A 是 n 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 求 $ A^* $ (该题为选择题).	经济仿理工.
10	(94.1) 设四元线性齐次方程组 (I) 为: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, 已知某线性齐次方程 (II) 的通解为 $k_1(0, 1, 1, 0)^T + k_2(-1, 2, 2, 1)^T$, 求 (1) 求线性方程 (I) 的基础解系. (2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有求出所有非零公共解, 若没有说明理由.	(02.4) 设四元齐次线性方程组 (I) 为: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, 且已知另一四元齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为: $a_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, a_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$, 求 (1) 求方程组 (I) 的一个基础解系; (2) 当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.	经济仿理工, 解题方法完全类似, 间隔八年.
11	(95.1) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应 λ_1 的特征向量 $\xi_1 = [0, 1, 1]^T$, 求 A .	(97.3) 三阶实对称矩阵的特征值是 1, 2, 3, 矩阵 A 的属于特征值 1, 2 的特征向量分别是 $a_1 = (-1, -1, 1)^T, a_2 = (1, -2, -1)^T$, 求 (1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量 (2) 求矩阵 A .	经济仿理工, 隔两年.
12	(93.1) 一批产品有 10 个正品和两个次品, 任意抽取两次, 每次抽出一个, 抽出后不再放回, 则第二次抽出的是次品的概率为_____.	(97.1) 袋内有 50 个球, 20 个为黄色, 30 个为白色, 今两人依次各从中取一球, 取后不放回, 则第二人取得黄球的概率_____.	这两题模型一样, 数值不同.
13	(88.3) 随机变量 X 在区间 $(1, 2)$ 上服从均匀分布, 试求随机变量 $Y = e^{2X}$ 的概率密度函数.	(95.1) 随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 求 $Y = e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.	同为求 $Y = e^X$ 型的分布.
14	(99.3) 假设二维随机变量 (X, Y) 在矩形 $G: \{ (X, Y) 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \}$ 上服从均匀分布, 记 $U = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leq Y \\ 1, & \text{若 } X > Y \end{cases}, V = \begin{cases} 0, & \text{若 } X \leq 2Y \\ 1, & \text{若 } X > 2Y \end{cases}$, (1) 求 U, V 的联合分布. (2) 求 U, V 的相关系数 r (该题分值为 9 分).	(02.3) 假设随机变量 U 在区间 $[-2, 2]$ 上服从均匀分布, 随机变量 $X = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq -1 \\ 1, & \text{若 } U > -1 \end{cases}; Y = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq -1 \\ 1, & \text{若 } U > 1 \end{cases}$; 试求 (1) X 和 Y 的联合概率分布; (2) $D(X+Y)$.	经济类重复考题, 间隔三年.
15	(99.4) 假设随机变量 X 服从指数分布, 则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数_____ (该题为选择题).	(02.3) 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布, 平均无故障工作的时间 (EX) 为 5 小时, 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作 2 小时便关机, 试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.	前后二题同为指数分布, 且 $Y = \min\{X, 2\}$ 相同!
16	(89.3) 随机变量 X 的数学期望 $EX = \mu$, 方差 $DX = \sigma^2$, 由切比雪夫不等式, $P\{ X - \mu \geq 3\sigma\}$.	(01.1) 设随机变量 X 的方差为 2, 则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{ X - E(X) \geq 2\}$.	后题为前题特例.
17	(96.4) 设来自正态总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X} = 5$, 则未知参数 μ 置信度为 0.95 的置信区间_____.	(03.1) 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机的抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.	理工仿经济, 仅数值不同.

附表二.

第一篇 高等数学	第一章	极限与级数. 极限与级数联系很紧密. 例如: 用幂级数展开式求极限是常用方法; 求幂级数收敛域就是求 $\sqrt[n]{u_n(x)}$ 或 $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$ 的极限; 极限中的等价无穷小代换还可以用于判定级数敛散性.
	第二章	一元、二元函数的微分及其运用. 本章把一元函数的导数、二元函数的偏导数与全微分, 以及用导数法作图, 证明不等式, 求函数最值等相关内容归纳在一起.
	第三章	不定积分、定积分、二重积分. 二重积分通过累次积分化为定积分, 而求解定积分首先要求出不定积分.
	第四章	空间解析几何、三重积分、曲线与曲面积分. 没有空间解析几何的基本知识, 如投影, 向量等, 很难求解三重积分、曲线与曲面积分; 我们还可以从下图中看到各种积分之间的相互转换关系:
	第五章	积分的几何运用与物理运用. 这些知识点分散在各章节, 读者难以全面的掌握, 所以我们综合归纳为一章.
	第六章	常微分方程.
	第七章	高等数学中的证明题. 本章归纳了高等数学中证明题的常用方法. 例如: 用泰勒公式展开式证明有关题型, 用费尔马定理证明 $f'(\xi) = 0$, 用作辅助函数法证明存在性问题等.
第二篇 线性代数	第一章	基础知识与基本题型. 本章按行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型分为五节, 逐一讲解了线性代数中的基础知识与基本题型, 这主要应对考研题中的选择和填空题.
	第二章	线性代数中的解答题. 求向量组的线性表示、求解线性方程组以及矩阵相似对角化等方法十分固定, 要么对矩阵作初等变换, 要么求行列式, 然后讨论参数取值, 即可求解.
	第三章	线性代数中的证明题. 本章把线性代数中分散在各章节的证明题归纳在一起, 总结出九种常用证明题题型.
第三篇 概率论与数理统计初步	第一章	随机事件及其概率(古典概率).
	第二章	随机变量的分布与数字特征. 求随机变量的分布与数字特征都要用到高等数学中微积分的知识. 例如: 二维随机变量的联合分布和数字特征要用二重积分求解; 已知分布函数求分布密度要求导数. 而且求解分布是求解数字特征的基础.
	第三章	大数定律、中心极限定理与数理统计. 中心极限定理是数理统计中推断统计分布的基础, 而推断统计分布又是数理统计中区间估计和假设性检验的基础, 所以应把这三部分有机结合起来.

附表三:

第一篇 高等数学			
第一章	第一节	题型一:利用恒等变形求极限	4 页
		题型二:把 $\infty - \infty$ 化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$	5 页
		题型三:含有指数的 $\infty^0, 0^0, 1^\infty$, 取对数恒等式	6 页
		题型四:用幂级数展开式求极限	7 页
		题型五:用夹逼定理和定积分定义求极限	8 页
	第二节	题型六:用单调有界准则求数列极限	9 页
		题型七:求数列极限(令 $n = x$, 即可求解)	10 页
		题型八:综合运用各种解题方法求解极限	10 页
		题型九:若级数收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$	11 页
		题型十:求极限中的参数	17 页
	第三节	题型一:确定无穷小的阶	17 页
		题型二:极限在导数定义中的运用	22 页
		题型三:讨论函数连续性、可导性	19 页
		题型四:极限在二元函数定义中的运用	23 页
		题型五:二元函数连续性与可微的判定(难点)	24 页
第二章	第一节	题型六:用极限计算广义积分	25 页
		题型七:广义积分收敛性的判定	26 页
		题型一:用比(根)值法判定级数的收敛性	36 页
		题型二:用莱布尼兹公式判定级数收敛性	37 页
		题型三:用比较法判定敛散性	38 页
	第二节	题型四:用比较审敛法证明级数收敛	39 页
		题型五:用求级数和法证明级数收敛	40 页
		题型六:用作辅助函数法判别级数敛散性	41 页
		题型七:求级数收敛域、收敛半径	42 页
		题型八:求函数幂级数展开式	43 页
	第三节	题型九:级数求和	45 页
		题型十:用解微分方程法求级数和	46 页
		题型十一:用分裂项法求级数和	47 页
		题型十二:狄利克雷收敛定理运用	48 页
		题型十三:傅里叶级数展开式的运用	49 页
第三章	第一节	题型十四:傅里叶级数中的有关证明题	51 页
		题型一:用导数定义求导	71 页
		题型二:复合函数的导数	72 页
		题型三:用取对数法求函数的导数	73 页
		题型四:隐函数及参变量表示函数的导数	73 页
	第二节	题型五:求函数的高阶导数	75 页
		题型六:反函数求导	76 页
		题型七:计算二元函数的偏导数	76 页
		题型八:复合函数偏导与全微分	77 页
		题型九:多元隐函数的导数	79 页
	第三节	题型一:导数应用——函数作图	87 页
		题型二:导数应用——方程根的讨论	89 页
		题型三:导数应用——不等式证明	91 页
		题型四:用一些特殊方法证明不等式	92 页
		题型五:导数应用——求函数极值	94 页
第四章	第一节	题型一:对 e^x 凑微分	107 页
		题型二:对 $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}$ 等凑微分	108 页
		题型三:对 $ax + b$ 形凑微分	109 页
		题型四:对复杂因式的整体凑微分法	109 页
		题型五:三角有理函数的积分	110 页
第五章	第一节	题型六:对反三角函数凑微分	111 页
		题型七:用三角换元法求不定积分	112 页
		题型八:用 t 换元法求不定积分	112 页
		题型九:有理式的不定积分	114 页
		题型十:用万能置换法求不定积分	114 页
	第二节	题型十一:分部积分法之一	115 页
		题型十二:分部积分之二(中间消去法求不定积分)	116 页
		题型十三:分部积分之三(求递推公式)	117 页
		题型十四:分段函数不定积分	118 页
		题型一:运用定积分的几何意义和奇偶性求定积分	123 页
	第三节	题型二:定积分计算中的三种错误	123 页
		题型三:定积分中值定理运用	124 页
		题型四:定积分估值	125 页
		题型五:公式 $\int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx$ 在计算中的运用	126 页
		题型六:计算定积分	126 页
第六章	第一节	题型七:分段函数的定积分	127 页
		题型八:含有 n 次幂的定积分计算	128 页
		题型九:无穷广义积分的计算	129 页
		题型十:变上限积分	130 页
		题型十一:柯西-施瓦茨不等式的运用	131 页
	第二节	题型十二:用作辅助函数法证明定积分不等式	132 页
		题型十三:用换元法证明定积分等式	133 页
		题型十四:直角坐标系下用定积分求面积和体积	134 页
		题型十五:极坐标下用定积分求面积	136 页
		题型一:变换积分次序	143 页
	第三节	题型二:直角坐标系下计算二重积分	144 页
		题型三:极坐标系下计算二重积分	146 页
		题型四:利用奇偶对称性简化二重积分的计算	147 页
		题型五:计算广义二重积分	148 页
		题型六:有关二重积分的证明	149 页
第七章	第一节	题型一:有关向量运算的基本公式、性质的题	166 页
		题型二:有关线面关系的证明题	167 页
		题型三:向量的几何意义	167 页
		题型四:投影的运用	168 页
		题型五:用要素法求解直线及平面方程	169 页
	第二节	题型六:用直线参数方程求解	170 页
		题型七:用平面束法求解直线及平面方程	171 页
		题型八:用平面相交法求直线方程	173 页
		题型九:空间曲线、曲面的切平面、切线方程	174 页
		题型十:求旋转曲面方程	175 页
	第三节	题型十一:画出空间图形之草图, 求出投影区域	175 页
		题型一:积分顺序变换与坐标系变换	179 页
		题型二:用直角坐标系计算三重积分	181 页
		题型三:用柱面坐标计算三重积分	182 页
		题型四:用球面坐标计算三重积分	183 页
第八章	第一节	题型五:用截面面积法计算三重积分	184 页
		题型六:三重积分中的计算技巧(变量位置对称、奇偶对称、重心公式)	185 页
		题型一:有关向量运算的基本公式、性质的题	166 页
		题型二:有关线面关系的证明题	167 页
		题型三:向量的几何意义	167 页
	第二节	题型四:投影的运用	168 页
		题型五:用要素法求解直线及平面方程	169 页
		题型六:用直线参数方程求解	170 页
		题型七:用平面束法求解直线及平面方程	171 页
		题型八:用平面相交法求直线方程	173 页
	第三节	题型九:空间曲线、曲面的切平面、切线方程	174 页
		题型十:求旋转曲面方程	175 页
		题型十一:画出空间图形之草图, 求出投影区域	175 页
		题型一:积分顺序变换与坐标系变换	179 页
		题型二:用直角坐标系计算三重积分	181 页
		题型三:用柱面坐标计算三重积分	182 页
		题型四:用球面坐标计算三重积分	183 页
		题型五:用截面面积法计算三重积分	184 页
		题型六:三重积分中的计算技巧(变量位置对称、奇偶对称、重心公式)	185 页

第五章 积分的几何运用与物理运用	曲线积分	题型一:用替换法求解第一类曲线积分	191 页	题型二:用直接替换法解第二类曲线积分	192 页	
		题型三:用格林公式计算第二类曲线积分	193 页	题型四: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 且含有不连续点	194 页	
		题型五:与路径无关定理的运用	195 页			
	曲面积分	题型一:第一类曲面积分的计算	201 页	题型二:第二类曲面积分的直接计算	203 页	
		题型三:用高斯公式计算曲面积分	204 页	题型四:积分区域内有不连续点, 作一个球(椭球)扣除此点	206 页	
		题型五:第一类、第二类曲面积分的转化	207 页	题型六:斯托克斯公式运用	208 页	
	第一节	题型一:求弧长	224 页	题型二:用曲线积分求侧面积	225 页	
		题型三:用曲线积分求旋转曲面面积	226 页	题型四:用曲面积分求面积	226 页	
	几何运用	题型五:用求截面面积法求体积	228 页	题型六:用三重积分求体积	228 页	
		题型七:几何极值	230 页			
	第二节	题型一:求液体压力	236 页	题型二:求功之一(用定积分)	237 页	
		题型三:求功之二:用曲线积分	239 页	题型四:引力计算之一(用定积分计算)	240 页	
	物理运用	题型五:引力计算之二(用二重、三重及曲面积分)	241 页	题型六:求质量与质心	242 页	
		题型七:求转动惯量	244 页	题型八:三度的计算	245 页	
		题型九:环流量与通量的计算	247 页			
	第六章 常微分方程	一阶微分方程	题型一:可分离变量的微分方程之一	261 页	题型二:可分离变量的微分方程之二	262 页
			题型三:一阶线性标准微分方程	262 页	题型四:可化为一阶线性微分方程的方程	263 页
			题型五:可降阶的高阶微分方程	264 页	题型六:全微分方程	265 页
		二阶微分方程	题型一:二阶常系数非齐次方程的通解	269 页	题型二:二阶常系数非齐次方程的解及参数的讨论	272 页
			题型三:三阶常系数非齐次方程的求解	273 页	题型四:含有变上限积分的微分方程(重点)	274 页
			题型五:欧拉方程	275 页	题型六:微分方程的几何应用	275 页
			题型七:微分的方程物理运用	278 页		
	高等数学中的证明题	第一节 有关函数周期性、奇偶性、对称性的证明				
第二节		题型一:用泰勒公式展开函数的方法证明	291 页	题型二:用中值定理展开函数的方法证明	293 页	
		题型三:用“ $\sum$ ”展开函数式的方法证明	294 页			
存在性证明		题型一:直接用介值定理证明	300 页	题型二:运用零值定理的证明	300 页	
		题型三:用费尔马定理证明 $f'(\xi) = 0$	301 页	题型四:一次或两次使用洛尔定理、拉氏定理证明	301 页	
		题型五:用凑微分法作辅助函数证明	303 页	题型六:用解微分方程法作辅助函数证明	305 页	
		题型七:用取导数法证明含积分号的等式	307 页			
	第二篇 线性代数					
第一章 基础知识与基本题型	第一节 行列式	题型一:有关 n 级排列与行列式定义的题型	317 页	题型二:用分裂行列式法求解行列式	319 页	
		题型三:用各行(列)求和法计算行列式	320 页	题型四:把其他的各行(列)乘以一个常数后 加到第一行(列)求行列式	320 页	
		题型五:用逐行(列)相消法求行列式	321 页	题型六:用递推法求解行列式	323 页	
		题型七:用范德蒙行列式求解行列式	324 页	题型八:用克莱姆法则解方程组	326 页	
	矩阵	题型一:有关矩阵的概念题	330 页	题型二:有关 A^n 的简单求解	332 页	
		题型三:求逆矩阵	333 页	题型四:矩阵方程	335 页	
		题型五:有关分块矩阵的计算	337 页			
	第三节	题型一:有关向量基本概念题	342 页	题型二:用初等变换求向量组的秩、极大无关组、 线性表示	345 页	
		题型三:有关向量空间的题	346 页			
	第四节	题型一:线性方程组的基本概念题	350 页	题型二:不含参数的简单线性方程组的求解	353 页	
	第五节	题型一:特征值、特征向量及二次型基本概念题	358 页	题型二:矩阵的相似对角化	360 页	
		题型三:化二次型为标准型	362 页			

第一章	题型一:矩阵的秩与向量的线性表示	379 页	题型二:求解线性方程组	381 页		
	题型三:线性方程组的公共解	385 页	题型四:特征值与特征向量的求解与运用	388 页		
	题型五:求矩阵的 n 次幂	390 页	题型六:已知矩阵可相似对角化求参数	392 页		
	题型七:已知矩阵部分特征值与特征向量, 逆求参数	394 页	题型八:已知矩阵相似求参数	396 页		
	题型九:判定矩阵相似并求 $P^{-1}AB = P$	397 页	题型十:利用二次型可相似对角化求参数	399 页		
	题型十一:判定二次型的正定	400 页	题型十二:二次型中的最值	401 页		
第三章	题型一:求证行列式	415 页	题型二:求逆矩阵与判定矩阵可逆	416 页		
	题型三:有关分块矩阵的证明	418 页	题型四:有关秩的证明	420 页		
	题型五:有关线性表示的证明	422 页	题型六:已知一组向量的相关性, 求证另一组向量的相关性	423 页		
	题型七:有关基础解系的证明	426 页	题型八:有关特征值和特征向量的证明	428 页		
	题型九:有关正定矩阵的证明	430 页				
第三篇 概率论与数理统计初步						
第一章	题型一:运用概率公式的转化求概率或证明	445 页	题型二:用几何概型计算概率	447 页		
	题型三:取球、放球模型的计算	448 页	题型四:分组模型	450 页		
	题型五:用分类讨论求解概率	450 页	题型六: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ 的转化	450 页		
	题型七:积、和事件的区别与转化	451 页	题型八:条件概率与乘法概率的区别与转化	453 页		
	题型九:全概、贝叶斯公式区别与转化	454 页				
第二章	第一节	题型一:根据随机事件求解简单概率和分布	470 页	题型二:二项分布的运用	471 页	
		题型三:泊松分布的运用 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, λ 为参数	472 页	题型四:几何分布的运用	473 页	
		题型五:分类讨论求分布之一:利用事件独立性	473 页	题型六:分类讨论求分布之二:利用 AB 之交集	475 页	
		题型七:二维离散型随机变量分布的表格题	477 页			
		题型一:一维随机变量分布函数求法(已知密度)	482 页	题型二:二维随机变量分布函数求法(已知密度)	483 页	
	第二节	题型三:已知分布函数求分布密度	484 页			
		第三节	题型一:一维随机变量函数的分布	487 页	题型二:二维随机变量的线性函数分布 与卷积公式的运用	489 页
			题型三:二维随机变量的函数分布: $Z = XY$ 或 $\sqrt{X^2 + Y^2}$ 或 X/Y	492 页	题型四:三种重要的随机变量函数的分布与实际运用: 即 $\max, \min, X_1, X_2, X_3$	494 页
	题型五:二维随机变量函数分布的实际运用		496 页			
	第四节	题型一:用级数求和法求一组随机变量数学期望	501 页	题型二:用 0 - 1 分布技巧求一组随机变量的期望	504 页	
		题型三:用直接积分法求数字特征	505 页	题型四:用间接法求随机变量的数字特征	506 页	
		题型五:用数字特征的性质计算数字特征	508 页	题型六:数学期望的实际运用	509 页	
	第五节	题型一:有关一维正态分布的题型	514 页	题型二:有关二维正态分布的题型	516 页	
		题型三:随机变量分布函数定义的运用	518 页	题型四:随机变量的等价转化	520 页	
	第三章	第一节 基础知识讲解与方法归纳				
		第一节	题型一:切比雪夫不等式的运用	544 页	题型二:中心极限定理运用	544 页
			题型三:推断统计分布(难点和重点)	547 页	题型四:矩估计	550 页
			题型五:极大似然估计	551 页	题型六:估计量的评价	553 页
题型七:区间估计			554 页	题型八:假设性检验	557 页	

重要公式与基本定理

三角公式(高中知识)

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

一、重要极限与等价无穷小代换

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e;$$

$$3. \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x;$$

$$4. 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2;$$

$$5. a^x - 1 \sim x \ln a;$$

$$6. (1+ax)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x;$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n a^{-x} = 0 (a > 1);$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0).$$

二、常用幂级数展开式

$$1. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, (-1 < x < 1)$$

$$2. \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n, (-1 < x < 1)$$

$$3. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$$

$$4. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$$

$$5. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$$

$$6. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, (-1 < x \leq 1)$$

$$7. (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + \cdots, (-1 < x < 1)$$

$$8. \tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \cdots, (-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2})$$

$$9. \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$$

$$10. \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$$

三、Fourier 级数

区间	展开式与和函数
$[a, b]$	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right) = S(x), \text{ 其中}$ $a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx, (n = 0, 1, 2, \cdots)$ $b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx, (n = 1, 2, \cdots), l = \frac{b-a}{2}$ $S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & x \in (a, b) \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点} \\ \frac{1}{2}[f(a^+) + f(b^-)], & x = a \text{ 或 } b \end{cases}$
$[0, l]$ (正弦展开)	$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x = S(x)$ $\text{其中 } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx (n = 1, 2, \cdots)$ $S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, l) \text{ 为 } f \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & x \in (0, l) \text{ 为 } f \text{ 的第一类间断点} \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } l \end{cases}$
$[0, l]$ (余弦展开)	$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x = S(x)$ $\text{其中 } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx (n = 0, 1, 2, \cdots)$ $S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, l) \text{ 为 } f \text{ 的连续点} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], & x \in (0, l) \text{ 为 } f \text{ 的第一类间断点} \\ f(0^+), & x = 0 \\ f(l^-), & x = l \end{cases}$

四、导数公式

$$\begin{aligned}
 (x^a)' &= ax^{a-1}; \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} & (e^x)' &= e^x; (a^x)' = a^x \ln a (a > 0) \\
 (\sin x)' &= \cos x; (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) & (\ln x)' &= \frac{1}{x}; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (0 < a \neq 1) \\
 (\cos x)' &= -\sin x; (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)' \\
 (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} = -(\operatorname{arccot} x)'
 \end{aligned}$$

五、高阶导数公式

$$\begin{aligned}
 1. (e^{ax+b})^{(n)} &= a^n e^{ax+b} \\
 2. (\sin(ax+b))^{(n)} &= a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right) \\
 3. (\cos(ax+b))^{(n)} &= a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right) \\
 4. ((ax+b)^\beta)^{(n)} &= a^n \beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)(ax+b)^{\beta-n} \\
 5. \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} &= \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}} \\
 6. (\ln(ax+b))^{(n)} &= (-1)^{n-1} a^n (n-1)! \frac{1}{(ax+b)^n}
 \end{aligned}$$

六、积分公式

$$\begin{aligned}
 \int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C (a \neq -1) & \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C & \int \frac{1}{\sqrt{x}} &= 2\sqrt{x} + C \\
 \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C (0 < a \neq 1) & \int e^x dx &= e^x + C \\
 \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \sinh x dx &= \cosh x + C \\
 \int \cos x dx &= \sin x + C & \int \cosh x dx &= \sinh x + C \\
 \int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + C & \int \cot x dx &= \ln|\sin x| + C \\
 \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C \\
 \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C \\
 \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C \\
 \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln|\tan x + \sec x| + C & \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln|\cot x - \csc x| + C \\
 \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\
 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C
 \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$$

七、向量运算

1. 方向余弦

$a = xi + yj + zk = (x, y, z)$ 的方向余弦:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

2. 向量运算

设 $a = \{x_1, y_1, z_1\}$, $b = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则

$$a + b = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}; \quad \lambda a = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\};$$

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(a, b) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \text{ (数量积)};$$

$$a \cdot b = b \cdot a; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c; (\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \text{ (向量积)}$$

$$a \times b = -b \times a; (\lambda a) \times b = \lambda(a \times b); a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$[abc] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ (混合积)}$$

$$[abc] = [bca] = [cab]; [a ab] = 0; [abc] = -[bca],$$

$$[\lambda a bc] = \lambda[abc]; [(a_1 + a_2) bc] = [a_1 bc] + [a_2 bc]$$

八、空间解析几何

1. 空间直线方程

$$\text{一般式: } \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{两点式: } \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\text{点向式: } \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};$$

$$\text{参数式: } x = x_0 + tl, y = y_0 + tm, z = z_0 + tn$$

2. 平面方程

$$\text{一般式: } Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$\text{点法式: } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{三点式: } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0; \text{截距式: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

3. 距离公式

点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离

$$d = |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 的距离, $d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \tau|}{|\tau|}, \tau = \{l, m, n\}$.

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离, $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. 二次曲面

曲面名称	方 程	曲面名称	方 程
椭球面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	旋转抛物面	$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z (p > 0)$
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z (p, q > 0)$	双曲抛物面	$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z (q, p > 0)$
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	抛物柱面	$\frac{x^2}{2p} = y (p > 0)$

九、多元函数积分基本公式

1. 二重积分

若 $D = \{(x, y): a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$.

若 $D = \{(x, y): c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

2. 三重积分

若 $\Omega = \{(x, y, z): \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in D\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

若 $\Omega = \{(x, y, z): a \leq z \leq b, (x, y) \in D_z\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy, \text{ 其中 } D_z \text{ 为 } \Omega \text{ 的截面(平行于 } xy \text{ 平面)}.$$

3. Green 公式: $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy, (L \text{ 为 } D \text{ 的正向边界}).$

4. Gauss 公式: $\oint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz (\Sigma \text{ 是 } \Omega \text{ 的外表面}).$

5. 斯托克斯公式: $\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS, \text{ 其中曲线 } L \text{ 的方向与}$

曲面 $\sum$ 所取侧的法线方向满足右手法则,即用右手四指表示 L 的方向,则拇指的指向就是曲面 $\sum$ 所取侧的法线方向.

$$6. \text{弧元: } dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta.$$

$$\text{面积元: } d\sigma = dx dy = r dr d\theta, dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

体积元: $dv = dx dy dz = r dr d\theta dz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$, (r, θ, z) 与 (ρ, φ, θ) 分别为柱面坐标与球面坐标.

十、行列式

1. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

2. 与矩阵有关的公式(以下 A, B 为 n 阶方阵)

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}; |A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n) \text{ 为 } A \text{ 的特征值.}$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \\ \ddots & & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$|kA| = k^n |A|; |A^n| = |A|^{n-1}.$$

$$|AB| = |A| |B| = |BA|, |AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \text{ 或 } |B| = 0.$$

设 C, D 分别为 m 阶, k 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} C & * \\ O & D \end{vmatrix} = |C| |D|; \begin{vmatrix} C & O \\ * & D \end{vmatrix} = |C| |D|; \begin{vmatrix} O & D \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |C| |D|.$$

十一、矩阵的运算公式

1. 逆矩阵

$$(A^{-1})^{-1} = A; (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T; (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}; (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1};$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & A_{ss} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & \\ & A_{22}^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

2. 伴随矩阵(A, B 为 n 阶方阵)

$$A^* A = A A^* = |A| I; A^* = |A| A^{-1}; (kA)^* = k^{n-1} |A| A^{-1} = k^{n-1} A^*$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*; \quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}; \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A (n \geq 2)$$

$$(A^T)^* = (A^*)^T; \quad (AB)^* = B^*A^*$$

3. 矩阵的秩

$$r(A) = r(A^T), \quad r(A \pm B) \leq r(A) + r(B), \quad r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

若 $A_{m \times n}, B_{n \times s}$, 则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

若 $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$.

十二、向量空间

$$(\alpha, \alpha) \geq 0; \quad (\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0; \quad (\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$$

$$(k_1\alpha + k_2\beta, \gamma) = k_1(\alpha, \gamma) + k_2(\beta, \gamma)$$

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha| |\beta|, (|\alpha| \text{ 表示 } \alpha \text{ 的长度})$$

$$(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 正交}$$

Schmidt 正交化方法: 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 令 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \dots,$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1}, \text{ 再令 } \xi_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|}, i = 1, 2, \dots, n,$$

则 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为标准正交向量组.

十三、常用概率公式

1. 条件概率: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 其中 A, B 为随机事件, $P(A) > 0$.

2. 乘法公式: $P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为随机事件, $P(A_1 \cdots A_n) \neq 0$.

3. 全概率公式: $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为样本空间 Ω 的一个完全事件组, $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

4. 贝叶斯公式: $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}, i = 1, 2, \dots, n$, 其中, 对 $A_i (i = 1, 2, \dots,$

$n)$ 的要求同 3.

5. 广义加法公式:

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n)$$

十四、常用分布

	分布	参数	分布律或概率强度	数学期望	方差
1.	(0-1) 分布	p $0 < p < 1$	$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$ $k = 0, 1$	p	$p(1-p)$
2.	二项分布 $B(n, p)$	$n, p; n \geq 1,$ $0 < p < 1$	$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$