

青 年 科 学 家 文 库

# 时变随机系统

郭 雷 著

青年科学家文库

# 时变随机系统

——稳定性、估计与控制

郭 雷 著

吉林科学技术出版社

【吉】新登字03号

青年科学家文库

时变随机系统—稳定性、估计与控制

郭雷著

责任编辑：李 玫

封面设计：杨玉中

出版：吉林科学技术出版社  
发行：

850×1168毫米32开本

7.5印张

插页4

177,000字

1993年11月第1版

1993年11月第1次印刷

印刷：长春市永昌福利印刷厂

印数：1-1140册

定价：9.20元

装订：长春市东新印刷厂

ISBN 7-5384-1402-9/TP·26

# Time -Varying Stochastic Systems

—Stability, Estimation and Control

LEI GUO

Jilin Science and Technology Press

## 内 容 提 要

时变随机系统广泛存在于客观实际中。本书从理论上对这类系统的稳定性、估计与适应控制等问题进行了统一的、严谨的论述。全书共分六章,内容既包含了常用的经典结果,又侧重介绍了国内外最新进展,其中许多属于作者近年来在这方面的研究成果。

本书的对象为自动控制、系统科学、信号处理、概率统计、时间序列、社会经济等专业的有关科研人员、工程师、教师及研究生。

## SUMMARY

Since almost all practical systems are time-varying and subject to random disturbances, stability analysis, estimation and adaptive control of such kind of systems are of great importance in both theory and applications . This book provides a mathematically rigorous and self-contained description of the topic. Both classical and new findings are included, and many of the results reflect the author's own research work.

For researchers , engineers, teachers and graduate students in the fields of automatic control, systems science, signal processing, time series analysis and econometrics, this book will prove to be a valuable resource.

## 《青年科学家文库》评审委员会

|          |         |     |     |     |
|----------|---------|-----|-----|-----|
| 顾        | 问：      | 王大珩 | 杨振宁 |     |
| 主 任 委 员： |         | 高景德 |     |     |
| 副主任委员：   |         | 高 潮 | 刘东生 | 卢良恕 |
|          |         | 丁石孙 | 鲍雯珊 |     |
| 委 员：     | 按姓氏笔画排列 |     |     |     |
|          |         | 王寿仁 | 王泽九 | 石元春 |
|          |         | 叶耀先 | 田光华 | 许 翔 |
|          |         | 杨芙清 | 吴 博 | 何耀坤 |
|          |         | 张锐生 | 陆道培 | 陈运泰 |
|          |         | 陈佳洱 | 陈章良 | 罗 伟 |
|          |         | 赵玉秋 | 赵柏林 | 俞鸿儒 |
|          |         | 姜东华 | 顾方舟 | 高为炳 |
|          |         | 阎隆飞 | 雷天觉 | 黎乐民 |

# 祖国的希望 未来的曙光

## ——寄语青年科技工作者

王大珩

翻开吉林科学技术出版社送来的《青年科学家文库》书目及作者名单,一个个自强好学,勇于探索创新的青年人仿佛就在眼前,使我欣慰,感到后生有望。所以在《文库》编辑出版之际,我很乐于借此机会,同广大青年科技工作者讲几句共勉的话。

这些年来,一大批在五星红旗下诞生,成长起来的年轻科技工作者崭露头角,在面向国民经济主战场的应用研究和在基础科学以及高技术研究等诸多方面取得优异成就,有的跻身于国际领先地位,或达到国际先进水平,有的填补国内空白,这些成果对推动科学技术进步,发展国民经济起到了重要作用。为鼓励青年科技工作者的科学研究和发明创造,中国科学技术协会、中国科学院分别设立了青年科技奖和青年科学家奖,规定每两年评选一次。首届青年科技奖评出94名,首届青年科学家奖评出25名,他们是从全国数以百万计的青年科技工作者中层层遴选出的佼佼者。

在此基础上,经过中国科协和中国科学院的推存,吉



林科学技术出版社编辑出版首届部分获奖者的著作,并获得长白山学术著作出版基金的资助,这对广大青年科技工作者是很大的鼓舞。出版社关心青年科技工作者的成长是值得赞扬的。

当今,在激烈的国际竞争中,重要的是看一个国家的综合国力,而其中重要的一个方面是科学技术的进步,所以各国都把科学技术作为推动经济发展和社会进步的重要手段。我国是一个拥有十一亿人口的大国,经济还很落后,但是我们有志气、有能力振兴中华,立足于世界民族之林。实现这样的宏愿,要靠我们几代人的艰苦奋斗。中国科学技术的兴旺发达要靠我们老中青科技工作者团结合作,但归根到底要靠你们青年人。长江后浪推前浪,一代更比一代强。党和人民把国家的前途、民族的命运寄托在你们青年人身上,正如江泽民同志所说:“你们是祖国的希望所在,是中国未来的曙光。”

我们这些人都已年逾古稀,要你们接好班,要有理想、有志气。一个人也好,一个民族也好,都要有一点精神,要有使命感,要有民族自强心,要为国家、为民族争口气,奋发向上,勇于进取;作为优秀的青年科技人才,除业务上有突出成就外,还要有不计名利、无私奉献的高尚精神,现在尤其要提倡这种精神,还要有求实的科学态度,尊重知识,尊重他人的劳动;你们还要发扬中华民族的美德,那就是要有集体主义精神,要团结协作,自力更生,艰苦奋斗,不屈不挠地去拼搏,满怀希望,开拓未来!

## 序

在自然科学的各领域中,由于问题提法不同、研究角度各异,同一个研究课题往往有不同的名称。“时变随机系统”就是其中之一。

在自动控制领域内,为了描述和控制工程技术中的动态系统,就要把它们随时间变化的动态特性以及随机因素的干扰考虑进去,这就要求控制理论工作者研究时变随机控制系统。由于反馈控制的作用和系统的时变性质,所涉及的过程一般不具平稳性。用反馈控制使性能指标达到极值,是这一类时变随机系统的特点。在时间序列分析领域中,为了研究社会生态现象,特别是研究经济现象,经典的常系数 ARMAX 模型有时不能充分描述问题的本质,这就迫使人们研究时变 ARMAX 模型或非线性时间序列,实质上,这也是研究时变随机系统。在信号处理领域内,为了在噪声环境中提取有用的信号,通常用递推估计算法,虽然此时没有反馈控制但所研究的过程是时变和非平稳的,对估计值渐近性质的研究实际上也是时变随机系统研究的内容。在数理统计中,随机逼近算法是为求带噪声量测的函数的极点或零点而提出来的,它在随机优化和适应控制中有广泛应用,这类算法也可看做时变随机系统。此外,时变随机系统的研究结果在其它领域(如神经网络,模式识别,学习系统,离散事件动态系统等)也有潜在的应用价值。

综上所述,研究时变随机系统的渐近性质以及对它的估计与控制,反映了几个领域的共同需要。为了结合计算机应用,在实际问题中考虑离散时间系统显得尤为重要。但对离散时间系统,没有象连续时间情况下伊藤公式这一类有力工具,加之过程又不平稳,所以分析起来相当困难。虽然在随机控制系统、信号处理、时间序

列分析、随机逼近等不同领域内,都有它们各自成功的著作,但在国内外文献中,仍缺乏用统一的观点来研究不同领域中提炼出来的具有共性的问题。郭雷的力作《时变随机系统:稳定性、估计与控制》是人们所期待的这方面有深度的专著。

这本专著,不仅概述了一系列重要的经典结果,同时也包括了郭雷近年来的研究成果,有些是首次发表。本书有下列四个特点:一、对时变参数系统的稳定性给出扼要但深入的叙述,还包括作者对非负定系统的研究结果;二、对时变随机系统给出非平稳情形下的稳定性分析,特别引人注目;三、对实际中常用的各种典型时变参数估计算法,给出了统一适用的随机稳定性条件,是一组适用范围广、独创性强的工作;四、在实际应用中,算法中遗忘因子的选取通常有很大的盲目性,而作者给出了一般条件下遗忘因子的选取办法,有充分的理论依据,具有重要的应用价值。

综观全书,作者用高超的数学技巧,对时变随机系统给出了很有特色的分析。本书写作严谨,文字流畅,结果深刻,适用范围广,有关领域的广大科研人员和工程技术人员必将得益于这本专著。

郭雷研究员对定常随机系统辨识和适应控制做过一系列有影响的工作,并在美国出版专著,国际上对他的工作有高度评价。现在,他又在几年钻研的基础上,写出这本专著,用统一的观点研究了几个不同领域共同关心的问题,必将产生广泛影响。

**陈翰馥** 1992.12

中国科学院院士、系统科学所研究员

## 前 言

时变随机系统广泛存在于客观世界中。顾名思义,这类系统的特征是“时变”与“随机”。“时变”是指系统的动态特性随着时间的变化而变化,而“随机”则是指系统在运行过程中受到各种随机因素的干扰和(或)对系统的输入及输出量测时存在着随机误差。这类例子在航空、航天、航海、工业过程、社会、经济、生物、生态等领域中比比皆是。例如,空间飞行器的动态特性依赖于空气动力学参数,而这些参数既会随着飞行高度、飞行速度及大气中随机因素的变化而变化,也会随着飞行器燃料的逐渐消耗而改变。又如,水上船舶的动态特性可由航向、速度和牵引力等的特性来描述,它们不但随水域状况(如深浅)而改变,而且还会受到波浪、风和气流等随机因素的干扰。再如,化学反应过程的参数随环境温度、湿度和其它随机因素的变化而变化,其反应速度也随催化剂活性的衰减而变慢,……。这些均可看作是时变随机系统。

描述时变随机系统的数学模型可能是非线性的,也可能是无穷维的,系统的动态可能随时间连续地变化,也可能只在离散时间变化。在本书中我们主要讨论离散时间系统,这主要基于下列考虑:(i)一般来讲,通过适当选取采样周期,可将连续时间系统化为离散时间系统;(ii)在社会、经济、工程及生态等领域中有大量动态系统用离散时间模型来描述更为自然和合理;(iii)无论什么系统,在对它们施加控制时,一般都采用计算机技术,因此,以离散形式描述的结果更便于实际应用。设多输入、多输出的离散时间动态系统由下述常差分方程描述:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, \xi_k, k) \quad (1a)$$

$$y_k = g(x_k, \eta_k, k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1b)$$

其中:  $x_k$  是状态变量(假定是  $n$  维的),  $u_k$  和  $y_k$  分别表示  $m$  维输入及  $p$  维输出,  $\xi_k$  和  $\eta_k$  分别表示状态方程的随机干扰和随机量测误差, 而  $f(\cdot)$  与  $g(\cdot)$  是适当维数的可测函数. 上述方程的一类重要特例是下述线性时变随机系统:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \xi_k \quad (2a)$$

$$y_k = C_k x_k + \eta_k \quad (2b)$$

其中  $A_k, B_k$  与  $C_k$  是适当维数的时变随机矩阵. 从另一角度来讲, 也可以将(2)看作是(1)的线性近似(借助 Taylor 展式而得), 这种近似在实际应用中被大量采用, 且效果很好. 若进一步假设方程(2)的系数  $A_k, B_k$  和  $C_k$  分别为确定性的定常矩阵  $A, B$  和  $C$ , 则称(2)为线性定常随机系统. 由于这类系统形式简单且理论上又比较完备, 在应用中受到广泛重视. 在辨识与适应控制领域内, 目前所见的几乎所有的专著都是以线性定常系统为主要讨论对象. 关于这方面的最新进展以及作者在这方面的研究工作, 已在作者与陈翰馥研究员合作的专著《Identification and Stochastic Adaptive Control》(Birkhäuser, Boston, 1991)一书中作了总结, 在此不重点讨论.

方程(1)的另外一类重要特例是下述形式的非线性迭代算法

$$x_{k+1} = x_k + L_k H(x_k, u_k, k) \quad (3)$$

这里  $L_k$  是算法增益,  $H(x_k, u_k, k)$  表示预测误差的线性或非线性函数,  $u_k$  不一定限于反馈输入, 它可以代表任意可测输入, 也可以代表非可测干扰输入. 这类算法出现在现代科学的若干领域中. 在系统辨识领域, 若取  $L_k \rightarrow 0$  (当  $k \rightarrow \infty$  时, 下同), 则(3)称为无穷记忆算法(如最小二乘法), 这时  $x_k$  代表对系统的未知参数向量  $x^*$  的估计; 若取  $L_k \neq 0$ , 则(3)称为有穷记忆算法(例如遗忘因子法). 这时  $x_k$  代表对系统的未知的时变参数过程的估计. 在信号处理领域, 一般取  $L_k \neq 0$  (例如 LMS 算法), 而  $x_k$  代表对某一信号

过程的适应跟踪,这类算法可应用于有源噪音消除及恒等器设计等。在随机逼近领域,一般取  $L_k \rightarrow 0$  (例如 Robbins—Monro 算法),  $x_k$  代表对某一未知函数零点或极值的估计。这类随机优化算法在包括模式识别及离散事件动态系统 (DEDS) 在内的许多领域中都有重要应用。一般地,若用  $\tilde{x}_k$  表示  $x_k$  与被估计量之差,则在许多情形下,对算法 (3) 进行收敛性分析的关键一步是下述线性方程的稳定性研究:

$$\tilde{x}_{k+1} = A_k \tilde{x}_k, \quad \tilde{x}_0 \neq 0 \quad (4)$$

其中  $\{A_k\}$  是某随机矩阵序列,其具体形式因算法不同而异。显而易见,方程 (4) 是方程 (2a) 的特例。

因此,研究方程 (2) 不仅从系统的角度来讲是必要的,而且对一大类随机递推算法的分析也有重要应用。鉴于此,在本书中我们将重点讨论线性时变随机系统 (2)。

本书的副标题——稳定性、估计与控制表明了本书的主要内容。全书共分六章。第一章给出本书所需的某些基本概念与已知结果,它们涉及分析代数、随机过程、稳定性、控制系统等领域。第二章讨论确定性线性时变系统的稳定性。这类结果可用来研究随机方程的样本稳定性。这一章包含了一些重要的经典结果,例如,在一致能镇定及一致能检测条件下,系统 (2) 的输入输出有界 (BI-BO) 与方程 (4) 指数稳定的等价性,以及 Desoer 的下列常用结果:若  $A_k$  有界、慢时变且其特征值一致在单位圆内,则 (4) 必指数稳定。同时,也包括作者本人关于非负定系统的研究结果。第三章讨论各种随机情形下时变系统的稳定性。经典的结果包括著名的 Furstenberg-Kesten 定理,即对任何平稳遍历矩阵序列  $\{A_k\}$ ,若  $E[\log^+ \|A_1\|] < \infty$ , 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1\| \triangleq \lambda < +\infty$$

几乎处处存在且  $\lambda$  的值即不依赖于样本也不依赖于范数。还包括经典随机平均方法的应用,即如何从“平均”方程的稳定性推知随

机方程本身的稳定性,也包括作者最近关于非平稳情形下的稳定性结果。第四、五章讨论与(2)等价的时变回归模型的估计与适应控制问题,主要内容基于作者近期的部分工作。第四章将给出保证各类算法稳定性所需的统一的随机激励条件,并进一步对LMS和遗忘因子两种算法分析其跟踪性能,探讨算法适应速率(或步长)的最优选取方式。特别地,我们将证明,在很一般的条件下,若参数的变化率用 $\gamma$ 来刻画,则当参数慢时变时,递推最小二乘算法中的遗忘因子 $\lambda$ 的合理选取方式是

$$\lambda = 1 - \frac{\gamma}{\sigma_v} \sqrt{\frac{\text{tr}(Q_w)}{\text{tr}(S^{-1})}}$$

其中 $\sigma_v$ ,  $Q_w$ 及 $S$ 分别代表观测噪声方差、参数变差方差及回归向量之“能量”。第五章讨论适应控制问题。我们将看到,若系统同时存在下列三种不确定性因素:参数慢时变、随机扰动及小的未建模动态特性,则通过对简单的梯度算法投影,便可设计出稳健的适应控制器。本章最后还简要介绍了Markov过程遍历理论的应用。最后一章,即第六章从数学上严格建立了一大类最小二乘自校正调节器的基本理论(稳定性、最优性等),这曾是自适应控制领域吸引过人们大量研究而长期未能解决的难题。特别地,对著名的Åström-Wittenmark自校正调节器,这一章不但证明了其稳定性与最优性,而且还建立了如下的对数律:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^* - w_i)^2 \sim (q + p - 1)\sigma^2 \log n$$

其中 $y_i$ ,  $y_i^*$ 和 $w_i$ 分别表示系统输出,被跟踪信号与噪声, $p$ 和 $q$ 分别是系统传递函数的分母与分子的阶数,而 $\sigma^2$ 是噪声方差。这个对数律精确刻画了Åström-Wittenmark自校正调节器的收敛速度。

本书第四、五章结果的研究始于作者1987—1989年在澳大利亚时的工作。回国后,研究工作得到国家自然科学基金会、国家科委及中国科学院的资助。在书中某些内容的最初研究与形成过程

中,作者曾得益于先后与其合作的国内外多位同行(见参考文献),他们包括 J. B. Moore 教授(澳大利亚),S. P. Meyn 教授(美国),M. Niełzwiecki 博士(波兰),L. Ljung 教授(瑞典),P. Priouret 博士(法国),以及中科院系统所的陈翰馥研究员和张纪锋博士等,作者在此一并致谢。作者还要感谢中国科协、长白山学术著作出版基金会以及吉林科技出版社对出版本书给予的支持。

作者水平有限,书中不妥之处,恳请读者指正。

郭 雷

1992 年 11 月于北京



# 目 次

|                                      |       |
|--------------------------------------|-------|
| 第 1 章 预备知识 .....                     | (1)   |
| 1.1 范数与矩阵 .....                      | (1)   |
| 1.2 实序列与不等式 .....                    | (9)   |
| 1.3 鞅与随机过程 .....                     | (18)  |
| 1.4 系统的稳定性概念 .....                   | (27)  |
| 1.5 控制系统的某些基本概念 .....                | (33)  |
| 第 2 章 稳定性理论 I: 确定性情形 .....           | (39)  |
| 2.1 系统的内部与外部稳定性 .....                | (39)  |
| 2.2 Lyapunov 方程与稳定性反例 .....          | (47)  |
| 2.3 非负定系统 .....                      | (52)  |
| 2.4 慢时变系统 .....                      | (62)  |
| 2.5 周期系统 .....                       | (65)  |
| 2.6 扰动稳定性 .....                      | (66)  |
| 第 3 章 稳定性理论 II: 随机情形 .....           | (74)  |
| 3.1 引言 .....                         | (74)  |
| 3.2 Furstenberg-Kesten 定理及有关结果 ..... | (75)  |
| 3.3 随机平均方法 .....                     | (83)  |
| 3.4 一维非平稳系统 .....                    | (88)  |
| 3.5 高维问题的转化 .....                    | (98)  |
| 3.6 随机扰动下的稳定性 .....                  | (109) |
| 第 4 章 时变参数估计 .....                   | (122) |
| 4.1 引言 .....                         | (122) |
| 4.2 算法稳定性 .....                      | (125) |
| 4.3 LMS 算法性能分析 .....                 | (128) |
| 4.4 遗忘因子算法性能分析 .....                 | (141) |