攻读硕士学位

研究生量子力学入学试题选解

马 涛 倪致祥 张德明 编

福建科学技术出版社

攻 读 硕 士 学 位

研究生量子力学入学试题选解

马 涛 倪致祥 张德明 编

福建科学技术出版社

一九八六年・福州

责任编辑：王水锦

攻读硕士学位
《研究生量子力学入学试题选解》
马　涛　倪致祥　张德明 编
*
福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米　1/32　16.25印张　361千字
1986年6月第1版
1986年6月第1次印刷
印数：1—2,500
书号：15211·50　　定价：3.05元

前　言

《研究生量子力学入学试题选解》是从近五年来，国内五十多所高等院校和研究所招收攻读硕士学位研究生的量子力学试题中选编出来的，涉及物理类理论物理、固体物理等有关专业。对选出的230多道题作了详细的解答，其中有些题目给出了两种或两种以上的不同解法。附录中，列出了每份考题的内容以及各题的分数。其中，对未被选入选解的题目，若与选解中某题类似，则注明参见某题，而对一些解答明显的题目，注明解答从略。

在目前物理名词尚未能统一的情况下，我们对选出的题目将保持原题所用的名词和符号，所给解答也沿用了这些名词和符号而未加改动。这样做可能会有助于读者熟悉一些不同的名词和符号。

由于我们水平有限，对所给出的解法不一定最优，希望读者给予指正。

本《选解》承北京师范大学物理系喀兴林教授审阅。在编写过程中，还得到了有关院校和单位的许多同志的大力支持，尤其得到了阜阳师范学院的院、系领导同志的热情支持，在此我们一并表示感谢！

编　者

1984年6月

目　录

第一章　量子力学的基本概念、基本原理
和基本方法……………………………………（1）
第二章　一维问题、中心力场、带电粒子
在电磁场中的运动……………………………（53）
第三章　角动量理论……………………………………（144）
第四章　微扰理论………………………………………（266）
第五章　散射问题………………………………………（369）
第六章　多粒子体系、综合题目、相对论量子力学……（392）
附录　攻读硕士学位研究生量子力学入学试题
（一九八〇——一九八四）…………………（476）

第一章　量子力学的基本概念、基本原理和基本方法

一、基本原理

原理1 微观系统的状态用希尔伯特空间中的矢量$|\Psi\rangle$描述。

原理2 物理量相当于希尔伯特空间中的厄米算符。物理量所能取的值是算符的本征值。物理量A在状态$|\Psi\rangle$中的平均值为

$$\langle A\rangle=\frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

原理3 系统的广义坐标q_i和其共厄的正则动量p_i之间满足下列对易关系：

$$[q_i,q_k]=[p_i,p_k]=0$$

$$[p_i,q_k]=-i\hbar\delta_{ik}$$

原理4 微观系统的状态$|\Psi\rangle$随时间变化的规律是薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle=H|\psi\rangle$$

H为体系的哈密顿算符。

原理5 全同粒子系统的波函数只有两种可能：对于任何二粒子的对调，波函数或者是完全对称的或者是完全反对称的。由完全对称的波函数描述的粒子称为玻色子；由完全反对称的波函数描述的粒子称为费米子。

二、主要推论

推论1 连续性方程

在$|\psi\rangle$态中，粒子按位置分布的几率密度为$\rho=\langle\psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi\rangle$。几率密度流为

$$\vec{j}=R_e\langle\psi|\left(|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\frac{p}{m}\right)|\psi\rangle$$

ρ和$\vec{j}$满足方程$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0$

推论2 测不准原理

设ΔA、ΔB为态$|\psi\rangle$中力学量A、B的方均根偏差，则

$$\Delta A\Delta B\geqslant\frac{1}{2}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|$$

推论3 泡利不相容原理

不可能有两个或两个以上的全同费米子处在同一个单粒子状态。

1—1 完成下列二小题：

(1) A、B 二算子对易，$|\psi_1>$、$|\psi_2>$是A的二个本征函数，本征值不同，证明：$<\psi_1|B|\psi_2>=0$。

(2) 态叠加原理的一般说法如下："如果 ψ_1和 ψ_2 是体系的二个可能状态，那么它们的线性叠加 $\psi=C_1\psi_1+C_2\psi_2$ 也是这个体系的一个可能状态。"

上述说法中的公式可以有以下四种理解：

① $\psi(x)=C_1\psi_1(x)+C_2\psi_2(x)$

② $\psi(x,t)=C_1(t)\psi_1(x,t)+C_2(t)\psi_2(x,t)$

③ $\psi(x,t)=C_1(t)\psi_1(x)+C_2(t)\psi_2(x)$

④ $\psi(x,t)=C_1\psi_1(x,t)+C_2\psi_2(x,t)$

其中C_1、C_2是任意复常数，$C_1(t)$、$C_2(t)$是t的任意复函数。你认为哪种理解是对的？指出问题的关键所在。

解 (1) 设：$A|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$

$$A|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle,\quad a_1 \neq a_2$$

则 $\langle\psi_1|(AB - BA)|\psi_2\rangle$

$= \langle\psi_1|AB|\psi_2\rangle - \langle\psi_1|BA|\psi_2\rangle$

$= a_1\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle - a_2\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle$

$= (a_1 - a_2)\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle$　　　　(利用A的厄米性)

由题设 $a_1 \neq a_2$，故

$$\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$$

(2) 第①和第④种理解是对的。因为只有满足薛定谔方程的态才是可能实现的。在④中 $\psi_1(x,t)$和 $\psi_2(x,t)$ 满足薛定谔方程时，$C_1\psi_1(x,t) + C_2\psi_2(x,t)$ 也满足薛定谔方程，而①则是④中态ψ 不依赖于时间的特例。

1—2 为什么说如取轨道角动量 $L = l\hbar$，则空间量子化与测不准关系矛盾？而当取$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$，则空间量子化不违背测不准关系？对后者给予定量说明，讨论测不准关系式中何时等号成立，何时等号不成立。

解 由测不准关系 $\Delta A \Delta B \geqslant \dfrac{|\langle|[A,B]|\rangle|}{2}$

所以 $$\Delta L_x \Delta L_y \geqslant \frac{\hbar}{2}\langle L_z\rangle$$

取L^2、L_z的共同本征态$|l, \mathrm{m}\rangle$，有：$\langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0$，$\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle$ ($\langle\ \rangle$表示平均值)

而 $(\Delta L_x)^2 = \langle L_x^2\rangle - \langle L_x\rangle^2 = \langle L_x^2\rangle$

$$(\Delta L_y)^2 = \langle L_y^2 \rangle - \langle L_y \rangle^2 = \langle L_y^2 \rangle$$

所以 $\Delta L_x \Delta L_y = \langle L_x^2 \rangle = \dfrac{1}{2}\langle L^2 - L_z^2 \rangle$

即 $\langle L^2 \rangle - \langle L_z^2 \rangle \geqslant \hbar |\langle L_z \rangle|$

若取$L = l\hbar$，则$l^2\hbar^2 - m^2\hbar^2 \geqslant \hbar^2 |m|$ 当$|m| = l$ 时，与测不准关系矛盾。

如取 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$，则

$$l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 \geqslant \hbar^2 |m|$$

对任何m 值都成立。

显然，当$m = \pm l$ 时，上式中等号成立。

当$m \neq \pm l$时，等号不成立。

1—3 系统的波函数的形式为：

$$\psi = \varphi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} + \varphi(x)e^{\frac{i}{\hbar}Et}$$

问此系统是否处于定态？为什么？

解法1 $\psi(x,t) = \varphi(x)\cos\dfrac{E}{\hbar}t$

$$\rho = \psi^*\psi = |\varphi(x)|^2\cos^2\frac{E}{\hbar}t$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -|\varphi(x)|^2\frac{E}{\hbar}\sin^2\frac{E}{\hbar}t \neq 0$$

故为非定态。

解法2 定态波函数满足$\hat{H}\psi = E\psi$。

由 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ 知 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi$ 或

$$\dot{\psi}/\psi=\frac{E}{i\hbar}\text{为常数。}$$

但 $\frac{d}{dt}[\varphi(x)\cos\frac{E}{\hbar}t]/\varphi(x)\cos\frac{E}{\hbar}t=-\frac{E}{\hbar}tg\frac{E}{\hbar}t\neq$ 常数，故为非定态。

1—4 A、B 的本征值分别为 a_n、b_n，在任一态 $|\psi\rangle$ 先测得 A 值为 a_n，再测得 B 值 b_n 的几率为 $p(a_n, b_n)$，而先测得 B 值 b_n 再测 A 得 a_n 的几率为 $p(b_n, a_n)$，问：$p(a_n, b_n)=p(b_n, a_n)$ 的条件如何？试证之。

解 为简单起见，我们假定，A、B 都单独构成力学量的完全集，即 $|a_n\rangle$、$|b_n\rangle$ 皆可作为基矢。

$|\psi\rangle=\sum\limits_n c_n|a_n\rangle$，其中 $c_n=\langle a_n|\psi\rangle$ 在态 $|\psi\rangle$ 中测 A 得 a_n 的几率为 $|c_n|^2=|\langle a_n|\psi\rangle|^2$。在态 $|\psi\rangle$ 下测量 A 得 a_n 后变态 $|\psi\rangle$ 为 $|a_n\rangle$，在态 $|a_n\rangle$ 下测 B 得 b_n 的几率为 $|\langle b_n|a_n\rangle|^2$。

故在态 $|\psi\rangle$ 下先测 A 得 a_n，再测 B 得 b_n 的几率为：

$$p(a_n, b_n)=|\langle a_n|\psi\rangle|^2\cdot|\langle b_n|a_n\rangle|^2\cdots \quad (1)$$

同理，可以求出在态 $|\psi\rangle$ 下先测 B 得 b_n，再测 A 得 a_n 的几率

$$p(b_n, a_n)=|\langle b_n|\psi\rangle|^2\cdot|\langle a_n|b_n\rangle|^2\cdots \quad (2)$$

若 $p(a_n, b_n)=p(b_n, a_n)$ 对一切 n 都成立，由(1)和(2)知：

$$|\langle a_n|\psi\rangle|^2\cdot|\langle b_n|a_n\rangle|^2=|\langle b_n|\psi\rangle|^2\cdot|\langle a_n|b_n\rangle|^2$$

即 $\quad |\langle a_n|\psi\rangle|^2=|\langle b_n|\psi\rangle|^2\cdots \quad (3)$

由态 $|\psi\rangle$ 的任意性，(3)式对一切 n 成立必有：

$$|a_n\rangle=|b_n\rangle \qquad \text{对一切 } n \text{ 成立}$$

故 A、B 有共同的本征函数系（即上式成立）为 $p(a_n, b_n)$

$=p(b_n, a_n)$的条件（注意，不能由此推出 A、B 对易的结论。例如 L^2与L_z 对易，但并不满足本题要求。）

1—5 电子在均匀电场$\vec{E}=(0,0,\varepsilon)$中运动，$\hat{H}=\dfrac{\vec{p}^2}{2m}-e\varepsilon z$，试判断下列各量中哪些是守恒量：$p_x$、$p_y$、$p_z$、$p^2$、$L_x$、$L_y$、$L_z$、$S_z$、$S^2$

解 $[p_x, H]=[p_y, H]=0$，p_x，p_y为守恒量

$[p_z, H]=-e\varepsilon[p_z, z]=i\hbar e\varepsilon$ p_z不是守恒量

$[p^2, H]=2i\hbar e\varepsilon p_z$ p^2不是守恒量

$[L_x, H]=e\varepsilon[L_x, z]\neq 0$ L_x不是守恒量

$[L_y, H]=-e\varepsilon[L_y, z]\neq 0$ L_y不是守恒量

$[L_z, H]=-e\varepsilon[L_z, z]\neq 0$ L_z是守恒量

$[S_z, H]=[S^2, H]=0$ S_z，S^2都是守恒量。

1—6 已知位势为$V(\vec{r})$时，力矩算子为$\vec{M}=\vec{r}\times(-\nabla V)$求证：$\dfrac{d}{dt}\langle\hat{\vec{L}}\rangle=\langle\hat{\vec{M}}\rangle$。其中$\hat{\vec{L}}$为轨道角动量算子，$\langle\ \rangle$表示算子的平均值。

解 $$\frac{d}{dt}\langle\vec{L}\rangle=\frac{1}{i\hbar}\langle[\vec{L}, H]\rangle$$

$$H=\frac{p^2}{2m}+V,\quad \vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

即 $$[\vec{L}, H]=\left[\vec{r}\times\vec{p}, \frac{p^2}{2m}\right]+[\vec{r}\times\vec{p}, V]$$

$$=\left[\vec{r}, \frac{p^2}{2m}\right]\times\vec{p}+\vec{r}\times[\vec{p}, V]$$

$$=i\hbar\frac{\vec{p}}{m}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\hbar}{i}\nabla V$$

$$=-i\hbar\vec{r}\times\nabla V=i\hbar\vec{M}$$

所以 $\dfrac{d}{dt}\langle\vec{L}\rangle=\dfrac{1}{i\hbar}\langle i\hbar\vec{M}\rangle=\langle\vec{M}\rangle$

1—7 算子$\vec{K}=\dfrac{1}{2m}[|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\vec{p}+\vec{p}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|]$在$|\psi\rangle$态的平均值是什么？怎样理解$\vec{K}$的意义？其中$\vec{r}$和$\vec{p}$分别为坐标和动量算子。

解 算子K在态$|\psi\rangle$下的平均值（设$|\psi\rangle$已归一化）：

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\vec{K}|\psi\rangle &= \frac{1}{2m}\Big[\langle\psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\vec{p}|\psi\rangle \ \hat{\vec{p}}\psi \\
&\quad + \langle\psi|\vec{p}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi\rangle\Big] \ \hat{\vec{r}}\psi \\
&= \frac{1}{2m}\Big[\psi^*(\vec{r})\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(\vec{r})-\frac{\hbar}{i}\nabla\psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\Big] \\
&= \vec{j}(\vec{r})
\end{aligned}
$$

故 $\langle\psi|\vec{K}|\psi\rangle=\vec{j}(\vec{r})$为几率流密度。

算子$\vec{K}$的意义：

考虑 $\langle\psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi\rangle=|\langle\psi|\vec{r}\rangle|^2=|\psi(\vec{r})|^2$

$=\rho(\vec{r})$

即$\langle\psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\psi\rangle$为几率密度。又$\dfrac{\vec{p}}{m}$为粒子的速度算子。

注意到$\dfrac{\vec{p}}{m}$和$|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|$不对易。所以$K$算子是由几率密度和粒子的速度构成的具有适当对称性的符合厄米性要求的算子。

1—8 （1）试用动量算子$\hat{P}$表示出有限大位移算子$\hat{T}$，$\hat{T}$的定义是，$T\psi(\vec{r})=\psi(\vec{r}+\Delta\vec{r})$。

(2) 一个双粒子体系的哈密顿量$H=\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}+V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$，求这个体系的力学量的完全集合。

解 (1) $T\psi(\vec{r})=\psi(\vec{r}+\Delta\vec{r})$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\Delta\vec{r}\cdot\nabla)^n\psi(\vec{r})$$

故 $T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\Delta\vec{r}\cdot\nabla)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\Delta\vec{r}\frac{i}{\hbar}\vec{p}\right)^n$

$$=e^{\frac{i}{\hbar}\Delta\vec{r}\cdot\vec{p}}$$

(2) 取质心系。令$(m_1+m_2)\vec{R}=m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2$，

$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$

体系的哈密顿量 $H=\frac{\vec{P}^2}{2M}+\frac{\vec{p}^2}{2\mu}+V(r)$

其中 $M=m_1+m_2$, $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$, $\vec{p}=\frac{\mu}{m_1}\vec{p}_1-\frac{\mu}{m_2}\vec{p}_2$

因为 $[P_i, R_j]=-i\hbar\delta_{ij}$, $[p_i, x_j]=-i\hbar\delta_{ij}$

$[P_i, p_j]=[P_i, x_j]=[R_i, x_j]=[R_i, p_j]=0$

故 H、P_x、P_y、P_z、L^2、L_z彼此对易，组成完全集($\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$)

1—9 根据光速C有限及能量E和时间的测不准关系，估计正负电子对能发生湮没的最长距离。

解 由能量与时间的测不准关系：$\Delta t\Delta E\geqslant\hbar$，测量一系

统的能量使得测量误差在 ΔE 之内所需要的测量时间 Δt，必须满足 $\Delta t \geqslant \frac{\hbar}{\Delta E}$。因此，在 $\tau \leqslant \frac{\hbar}{E}$ 时间内，如果观测一个能量为E的粒子，就不可能观测到，称为虚粒子。正负电子对通过交换虚光子而相互作用，虚光子的生存时间 $\tau \leqslant \frac{\hbar}{E}$。而光速$C$有限，在时间 τ 内通过的距离为 $R = C\tau \leqslant \frac{\hbar c}{E}$，正负电子对的湮没过程为 $e^+e^- \to 2r$。为保证能量守恒，$E \geqslant m_e c^2$（m_e为电子的静止质量）。所以正负电子对能发生湮没的最长距离

$$R_{max} \approx \frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1.05\times 10^{-27}}{9.11\times 10^{-28}\times 3\times 10^{10}}$$

$$= 3.85\times 10^{-11}\ (\text{厘米})$$

1—10　证明：如果一个物理系统的哈密顿量在空间平移下不变，则此系统的总动量是守恒的。

证　平移算符　$D(\vec{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{p}}$

由题设系统的哈密顿量在空间平移下不变，即

$$D(\vec{a}) H D^{-1}(\vec{a}) = H$$

考虑无限小平移，即　$\vec{a} \to 0$

$$D(\vec{a}) = 1 + \frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{p},\quad D^{-1}(\vec{a}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{p}$$

所以　$D(\vec{a}) H D^{-1}(\vec{a}) = \left(1 + \frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{p}\right) H \left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{p}\right)$

$$= H + \frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot[\vec{p}, H]$$

（已略去了二阶小量）。故

$$H = H + \frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot[\vec{p}, H]$$

或 $[\vec{p}, H] = 0$，即总动量 $\vec{p}$ 是守恒的。

1—11 计算和证明：

(1) 试计算 $\hat{P}_x e^{2x} - e^{2x}\hat{P}_x = ?$

(2) 证明宇称算符 $\hat{P}$ 是厄米算符

解 (1) $(\hat{P}_x e^{2x} - e^{2x}\hat{P}_x)\psi(x)$

$$= \hat{P}_x(e^{2x}\psi(x)) - e^{2x}\hat{P}_x\psi(x)$$

$$= \frac{2\hbar}{i}e^{2x}\psi(x)$$

由 $\psi(x)$ 的任意性知 $\left(\hat{P}_x e^{2x} - e^{2x}\hat{P}_x\right) = \frac{2\hbar}{i}e^{2x}$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(\vec{r})\hat{P}\psi(\vec{r})d\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(\vec{r})\psi(-\vec{r})d\vec{r}$$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty}\psi^*(-\vec{r})\psi(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\vec{r})[\hat{P}\psi(\vec{r})]^*\,d\vec{r}$$

故，$\hat{P}$ 为厄米算符。

1—12 对于坐标 x 构成算符 $e^{\hat{x}}$。

(1) 证明它是厄米算符；

(2) 求出它在坐标、动量表象中的表示。

解 (1) $$(e^{\hat{x}})^+ = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{x}^n}{n!}\right)^+ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\hat{x}^+)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{x}^n}{n!}=e^{\hat{x}}$$

所以$e^{\hat{x}}$是厄米算符。 $\langle x|F|x'\rangle = F(x', \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x})\delta(x-x')$

（2）因为 $\langle x|e^{\hat{x}}|x'\rangle = e^{x'}\delta(x-x')$

所以 $\langle x|e^{\hat{x}}|\psi\rangle = \int \langle x|e^{\hat{x}}|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle dx'$

$$=\int e^{x'}\delta(x-x')\langle x'|\psi\rangle dx' = e^{x}\langle x|\psi\rangle$$

即在坐标表象中，$e^{\hat{x}}$为e^{x}。 $\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$

在动量p表象中，

$$\langle p|e^{\hat{x}}|p'\rangle = \int \langle p|e^{\hat{x}}|x'\rangle\langle x'|p\rangle dx'$$

$$=\int e^{x'}\langle p|x'\rangle\langle x'|p'\rangle dx'$$

$$=\int e^{x'}\frac{1}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x'}dx'$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\int e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p-i\hbar)x'}dx'$$

$$=\delta(p'-p-i\hbar)$$

所以 $\langle p|e^{\hat{x}}|\psi\rangle = \int \langle p|e^{\hat{x}}|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle dp'$

$$=\int \delta(p'-p-ih)\langle p'|\psi\rangle dp'$$

$$=\langle p+ih|\psi\rangle$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ih)^n}{n!}\cdot\frac{d^n}{dp^n}\langle p|\psi\rangle$$

$$=e^{i\hbar\frac{\partial}{\partial p}}\langle p|\psi\rangle$$

即在p表象中，$e^{\hat{x}}$的表示为：

$$e^{i\hbar\frac{\partial}{\partial p}}$$

1—13　完成下列二小题

（1）$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$是粒子的位置算子。

$\vec{L}=L_x\vec{i}+L_y\vec{j}+L_z\vec{k}$是粒子的轨道角动量算子。

证明$\vec{r}\cdot\vec{L}=0$。

（2）r是粒子到原点的距离，p_r为一算子，现在已知：

1）对易式$[r,\ p_r]=i\hbar$，

（2）$p_r^2=-\hbar^2\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}$。求$p_r$

解　（1）因为$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

所以　$\vec{r}\cdot\vec{L}=\vec{r}\cdot\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times\vec{r}\cdot\vec{p}=0$

（2）设$P_r=\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial r}+f(r)$，其中$f(r)$为$r$的某个函数。则

$$p_r^2=\left[\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial r}+f(r)\right]\left[\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial r}+f(r)\right]$$

$$=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial r}f+\frac{\hbar}{i}\ f\frac{\partial}{\partial r}+f^2$$

$$=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2f\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial f}{\partial r}+f^2$$

由题给　$p_r^2=-\hbar^2\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\hbar^2\frac{2}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}$

两式比较可得：

$$\begin{cases}2f\frac{\hbar}{i}=-\hbar^2\frac{2}{r}\\[2mm]\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial f}{\partial r}+f^2=0\end{cases}$$