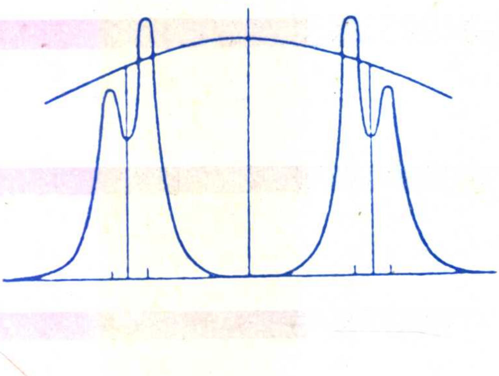
弹性系统的随机振动

〔苏联〕B. B. Болотин 著

徐昭鑫 江晓仑 译



西南交通大学出版社

弹性系统的随机振动

〔苏联〕B. B. Болотин 著

徐昭鑫　江晓仑 译

西南交通大学出版社

1991　成都

新登字（川）018号

弹性系统的随机振动

В. В. Болотин 著

徐昭鑫 江晓仑 译

*

西南交通大学出版社出版发行

(四川 成都九里堤)

西南交通大学出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：14.625

字数：255千字 印数：1—2000册

1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷

ISBN 7—81022—240—6/O·027

定价：6.25元

俄文原本所附内容简介

书中系统地叙述了随机振动理论，而主要注意了连续弹性系统。叙述了随机载荷的表述方法和随机振动理论问题的解法，包括连续系统宽带随机振动计算的渐近方法。考虑了参数激振和非线性系统的随机振动。给出了机械系统可靠性理论的要点，及此理论在系统的随机振动防护计算方面的应用。讨论了随机振动场测量规划的原则。

此书供工作于机械制造、航空、建筑及其它技术领域的工程师和研究人员，以及相应专业的高年级本科生和研究生使用。

书中有表3个，插图88帧，参考文献目录160条。

俄文原著：B. B. Болотин, Случайные колебания упругих систем, Физико-математической литературы издательства «Наука», Москва, 1979.

英译本：编辑 H. H. E. Leipholz, 译者 I. Shenkman, 书名 Random vibrations of elastic systems, by V. V. Bolotin, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, The Netherlands, 1984.

中译本序言

Болотин, В. В. 是有世界声望的苏联力学家。他在结构振动和动态稳定性方面有很深的造诣，发表过很多论文和专著。《弹性系统的随机振动》一书内容丰富而全面，系统而深入，非常切合我国当前四化建设的需要，因此把它译出以供应用。相信将有益于与这方面有关的工程技术、研究工作和教学工作。

书中系统并重点地叙述和介绍了随机分布载荷，线性系统的随机振动理论和近似的方法，连续系统的渐近方法，参数激振系统和非线性系统随机振动的各种方法，可靠性和寿命估计，连续系统随机振动的实验安排，等。其特点是，对每类问题均由浅入深地加以阐述，既有理论方面的介绍，也有应用方面的考虑；援引了较多的算例和结果；对于一些专门的问题和方法，都提供了参考线索。对于机械振动和随机振动基础知识面稍广的读者，阅读本书时一般不会有太大的困难。对于一些专门的问题和方法，当然最好能参阅一些有关的著作或文章；在应用书中有关的结论和公式时，则作一些详细的推导或参考原始文献将是有益的。

由于我们在开始时没有找到俄文原著，所以初稿是由英译本翻译的。第一至第四章由江晓仑译出，序言和其余各章则由徐昭鑫译出。初稿将完成时找到了俄文原著，由徐昭鑫对照俄文原著和英译本校订了一遍，意在用词和语意等各方

面都尽量按照原著。但英译本编辑在其序言中曾提及原著作者对英译本曾提供过修改意见，然而英译本中又均未有注释，因而在俄、英文本有所不同时，只能按文意估计。对可能是原作者的修改意见，或系英译者合理改动的地方，则按英译本；而在认为是英译本误植或改动不甚妥当之处，则仍按俄文原著。对一些较重要的有差异的地方，均加了注释。但对一些俄、英文本中明显的误植或可能的笔误，则为避免加注过多，并未一一注明。书中每节（§）中的小标题是原有的，但其编号，如“1.1.1”等则是中译本另加的。

对于中译本，虽然我们想尽量做到既忠实于原著，且避免学术上的错误，而又尽量使其接近于中文著作的可读性，但由于时间比较匆促，且限于我们的水平，以及不同的文笔和风格难于完全求取一致，必然不能完全如愿。在此谨望读者予以指正，为感。

本书的翻译工作是在西南交通大学及其出版社和工程力学系领导的关怀和支持下，并在有关人员的直接帮助下得以顺利进行的。成都科技大学图书馆提供了俄文原著，西南交通大学图书馆提供了英译本。奚绍中教授校阅了译稿。对此，我们均致以深切的谢意。

徐昭鑫

1990年12月

英译本编辑序

在过去几十年中弹性系统的随机振动这一课题已经成为非常重要了，特别是因为它适用于流体力学和空气力学的技术问题。这类问题包括飞机、火箭和钻油平台；还应包括由于喷气流的声辐射和地震扰动所引起的结构物的弹性振动。随机振动理论的应用实为众多，而此理论的发展则对数学家、力学家和工程师提出了要求。因此，象V.V.Bolotin博士这样一位第一流权威所著的一本随机振动方面的书籍必定会受到在此领域内工作的每个人的热烈欢迎。对很快就致力于把这本书译成英文这件事就不须惊奇了。

我真诚地感谢非常称职的翻译者I. Shenkman的合作；感谢C.Jones夫人，她打出了初稿；还有Th. Brunsting, P. Keskikiikonen和R. Piché，他们读了初稿，且提出了需要改正和变动的地方。我为委托我编辑英译本而感谢Martinus Nijhoff Publishers BV，并感激如此善意地支持我工作的F.J.van Drunen, N①. Nijhoff Publishers BV的发行人。还要特别感谢Waterloo大学固体力学部的L.Strouth夫人，她称职而高效地准备了最后的文稿。

最后，但非最少地，感谢V.V.Bolotin博士，他提出了忠告，并提供了此书俄文版的更新内容。

H.H.E.Leipholz 1984.1.于Waterloo大学

---

① 原文如此。疑为M。——徐注。

作 者 序

随机振动理论在工程中正在得到愈来愈多的应用。例如，它是分析大气紊流、紊流边界层中的压强脉动、喷气流声辐射等作用下的飞行器结构的基础；它也是分析行驶于不平路径上或由其它原因而承受振动的道路车辆的基础。随机振动理论的方法还广泛应用于分析受风压作用的高耸建筑，在海浪作用下的船舶和其他海洋结构物，以及在地震作用下的建筑和结构物。在科学刊物中，随机振动和振动可靠性问题方面的发表论文已日见增多。随机振动理论是现代应用力学中迅速发展的方向之一。

本书系统地叙述了随机振动理论中的问题和它们的解法，并特别注重于连续系统。书中共有八章。第一章是引论性质的，在其中给出了关于作用在机械系统上的随机载荷的一般概念及用概率表述这些载荷的方法的一般概念。第二章叙述了随机振动问题的解法(主要是应用于解连续系统的)。

其后两章专论线性连续系统的随机振动。第三章讨论弹性和粘一弹性系统中广义坐标的互相关计算问题①，三维弹性系统随机振动的传递问题，以及弹性一声学系统的振动。第四章叙述了线性连续系统宽带随机振动的渐近计算方法。这类振动的特点是同时激发极大数量的固有振型，因而对振动场的特征可以发现某些新的规律性，并得出渐近估计。

---

① 英译本改为“广义坐标的相互耦合”。似非。——徐注。

第五章考虑了参数激振随机振动。此章叙述了研究随机系统稳定性的方法和构造随机不稳定区的有效方法。特别注意了受窄带平稳随机过程激发的参数共振。第六章考虑了非线性系统的随机振动。这几章不仅考虑了有限自由度数系统，也考虑了连续系统。

最后两章专论与随机振动理论紧密联系的应用问题。第七章叙述了把机械系统的可靠性理论应用于随机振动系统时的基础及用此理论的各种方法以分析系统对随机振动的防护优化。在最后一章中，讨论了测量随机振动场的规划原则。考虑了传感器数目的选定和它们在振动结构物上的优化布置，也考虑了由于负载传感器后振动场改变而需作出的修正问题。

书末的参考文献目录绝非是完全的，但读者可从它得出在苏联以及国外关于所有基本方向和学派的一般概念。此外，还在脚注中指明了撰写书中相应部分时所直接利用的内容出处。

本书援引了 1959 年以后作者在随机振动理论及其应用方面的著述。部分材料取自作者在莫斯科动力学院为高年级大学生和研究生历年的授课讲义。某些问题是作者和其学生及同事在莫斯科动力学院合作研究的，这可从文献目录中看出。部分手稿曾由 В. П. Чирков，В. П. Радин，Н. И. Жинжер，В. Ю. Волоховский，В. Г. Москвин，В. Е. Хроматов，В. Л. Васенин，В. А. Семенов 和 А. Н. Щербаков 验阅过，作者为此向他们表示真诚的谢意。

В. В. Болотин

1978 年 6 月

目　录

第一章　作用在机械系统上的随机载荷

§1.1　载荷为时间的随机函数

1.1.1　引　言

在本章中考虑解析给定作用在机械系统上的随机载荷的基本方法，以及关于某些类载荷的实验资料。将不仅把载荷理解为外力，而且还理解为一些外部运动学作用（亦即，一个系统或它的一些点的规定位移），以及热效应、辐射效应等。如果外部影响源的功率与所激励的振动过程的功率相比足够地大，以致系统的性状对加载过程的影响可以略去不计，那么，可以把加载看作随机地给定的。否则就必须计及与环境的相互作用，或联合考虑系统的振动与在环境内所发生的过程。这类问题经常发生在声学及流一气一弹性力学问题之中。今后，如果不特别说明，将假定加载为随机地给定的。

将把随机载荷分为两个基本类：一类是作为时间的随机函数给出的，而另一类是作为时间和空间坐标的随机函数给出的。属于第一类的是，例如，刚体基础位移对系统的运动学作用，对确定点施加集中力的作用等。第二类随机加载的一些例子是在结构物上的风或海浪的压力，以及由于湍流边界层中的脉动而在飞行器表面上产生的压力。

第一类载荷用随机过程理论中的一些方法描述，而对于第二类载荷则应用随机场理论描述。

1.1.2 多维随机过程的两个基本描述方法

设把在时间 t 的某个间隔 T 内的加载表示为一组 m 个一般地是时间的随机函数 $q_1(t)$，$q_2(t)$，…，$q_m(t)$ 的形式。这一函数集合形成一个 m 维随机过程 $\mathbf{q}(t)$。该随机过程 $\mathbf{q}(t)$ 可以由两种基本方法描述。第一种方法是，在所考虑的时间间隔 T 之中的任何时刻，给定过程分量的联合分布（联合概率密度）的完备系。第二种方法是在时间间隔 T 中给定过程分量的矩函数的完备系。矩函数由过程 $\mathbf{q}(t)$ 在不同瞬时的分量相乘，并对实现的集合求平均而得出：

$$\langle \mathbf{q}(t)\rangle^{①},\ \langle \mathbf{q}(t_1)\otimes\mathbf{q}(t_2)\rangle,\ \langle \mathbf{q}(t_1)\otimes\mathbf{q}(t_2)\otimes\mathbf{q}(t_3)\rangle,\cdots。\tag{1.1}$$

这里，尖括弧表示对实现的集合求平均②；符号 $\otimes$ 代表完全的（张量）乘法，也就是，表达式 $\mathbf{q}(t_1)\otimes\mathbf{q}(t_2)\otimes\cdots\mathbf{q}(t_r)$ 是一个在 t_1，t_2，…，t_r 瞬时，过程 $\mathbf{q}(t)$ 的诸分量 $q_1(t)$，$q_2(t)$，…，$q_m(t)$ 的所有可能的 m^r 个乘积的有序集。在式（1.1）中，顺次列入的一些量为：过程 $\mathbf{q}(t)$ 的数学期望，m^2 个二阶矩的函数集，m^3 个三阶矩的函数集，等。下列公式给出了两种描述方法之间的联系：

$$\langle \mathbf{q}(t)\rangle=\int \mathbf{q}p(\mathbf{q};\ t)d\mathbf{q},$$

① 矢量符号，按国家标准和国际标准应排黑斜体。限于条件，本书用黑正体。——责编注。

② 通常也用〈·〉表示时域或样本平均，而用$E[\cdot]$表示总体或集合平均。——徐注。

$$\left.\begin{aligned}
&\langle \mathbf{q}(t_1)\otimes\mathbf{q}(t_2)\rangle\\
&=\iint(\mathbf{q}_1\otimes\mathbf{q}_2)p(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2;t_1,\ t_2)d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2,\\
&\langle \mathbf{q}(t_1)\otimes\mathbf{q}(t_2)\otimes\mathbf{q}(t_3)\rangle\\
&=\iiint(\mathbf{q}_1\otimes\mathbf{q}_2\otimes\mathbf{q}_3)p(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3;t_1,t_2,t_3)\\
&\times d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

式中，$p(\mathbf{q};\ t)$ 为过程 $\mathbf{q}(t)$ 的分量在瞬时 t 的联合概率密度函数；$p(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2;\ t_1,\ t_2)$ 为过程 $\mathbf{q}(t)$ 的分量在瞬时 t_1 和 t_2 的联合概率密度，等；$d\mathbf{q}\equiv dq_1 dq_2\cdots dq_m$。

1.1.3 多维随机过程的相关函数

在解决应用问题时，由于两个原因，并不使用随机函数的完全表述。第一，对于随机函数作足够详细的描述所需要的统计信息的容量是如此之大，以致实际上不可能获得。第二，在一般情况下对外部影响的完全描述将导致统计动力学问题求解过于繁复和冗长。因此，在应用中，当给定外部影响，并求解在此影响下系统的响应时，可限于低次近似。在相关理论的范围内，随机函数由它们的数学期望和相关函数给定。后者是作为中心化过程 $\widetilde{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{q}(t)-\langle\mathbf{q}(t)\rangle$ 分量的二阶矩而引入的，即

$$K_{jk}(t_1,\ t_2)=\langle\widetilde{q}_j(t_1)\ \widetilde{q}_k(t_2)\rangle\tag{1.3}$$

由相关函数组成的矩阵 $K(t_1,\ t_2)$ 称为相关矩阵。请注意，在文献中，特别是在外国文献中，也经常使用"协方差函数"和"协方差矩阵"这些名称。

众所周知，正态过程由它们的数学期望和相关函数完全

确定，并且，正态过程通过线性系统之后仍然是正态的。这就使相关性表述成为分析线性系统随机振动的一种非常方便的方法。当考虑非线性系统时，通常必须使用与此不同的方法。

1.1.4 多维平稳过程的表述

考虑一个在 $T=(-\infty,\ \infty)$ 内给出的过程 $\mathbf{q}(t)$，它的所有概率特征量（联合概率密度，矩函数和相关函数）都与其初始时间的选择无关。这样的过程称为平稳的和平稳约束的（stationarily constrained）过程。为简便起见，以后将只称它们为平稳过程。其相关矩阵 $K(\tau)$ 的元素为时移 $\tau=t_2-t_1$ 的函数，由下面的关系式定义

$$K_{jk}(\tau)=\langle\widetilde{q}_j(t)\,\widetilde{q}_k(t+\tau)\rangle \tag{1.4}$$

如果过程的任何函数对于时间求平均的结果与相应函数对于所有实现的集合求平均的结果相同，则平稳随机过程称为遍历的①。遍历的平稳过程表明其对时间的概率性质为：在一个足够长的过程实现自身中包含了关于整个过程的信息。在应用中，在统计处理观测数据时，经常采用遍历的假设。注意，对于遍历过程，当 $|\tau|\to\infty$ 时 $\|K(\tau)\|\to0$。

设过程 $\mathbf{q}(t)$ 可用 Fourier-Stieltjes 广义随机积分形式的谱表示式

$$\mathbf{q}(t)=\langle\mathbf{q}\rangle+\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\mathbf{Z}(d\omega) \tag{1.5}$$

这里，$\mathbf{Z}(\omega)$ 表示 m 维分布函数（频率 ω 的广义随机矢量函数），$\langle\mathbf{Z}(\omega)\rangle=0$，$\mathbf{Z}(\Delta\omega)=\mathbf{Z}(\omega+\Delta\omega)-\mathbf{Z}(\omega)$。因为假

① 或称各态历经的。——徐注。

定 q(t) 是一个实过程，所以 $Z^*(\omega)=Z(-\omega)$（星号表示复共轭值）。该分布函数满足如下的关系：

$$\langle Z^* d\omega \otimes Z(d\omega')\rangle = \begin{cases} 0 & \text{当 } d\omega \cap d\omega' = \varnothing \\ S(\omega)d\omega & \text{当 } d\omega = d\omega' \end{cases} \tag{1.6}$$

式中，$S(\omega)$ 为维度为 $m\times m$ 的方阵，称为过程 q(t) 的谱矩阵。在论述应用问题的文献中，经常把谱表示式（1.5）写成类似于普通的Fourier 积分的形式：

$$q(t)=\langle q\rangle+\int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.7}$$

而把 Fourier 谱 $Q(\omega)$ 理解为频率 ω 的广义随机矢函数，并且满足如下关系

$$\langle Q(\omega)\rangle=0 \qquad \langle Q^*(\omega)\otimes Q(\omega')\rangle = S(\omega)\delta(\omega-\omega') \tag{1.8}$$

式中，$\delta(\omega)$ 为 δ 函数①。

矩阵 $S(\omega)$ 的元素 $S_{jk}(\omega)$ 为过程 q(t) 分量的联合谱密度②。元素 $S_{jk}(\omega)$ 与相关矩阵的元素以 Wiener-**Хинчин** 关系式相联系：

$$\begin{aligned} K_{jk}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{jk}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \\ S_{jk}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{jk}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \end{aligned} \tag{1.9}$$

下面列举实过程 q(t) 的矩阵 $S(\omega)$ 的基本性质。这一矩阵的所有对角元素均为实的和非负的，而非对角元素一般

① 为 Dirac δ 函数。——徐注。

② 或称互谱密度。——徐注。