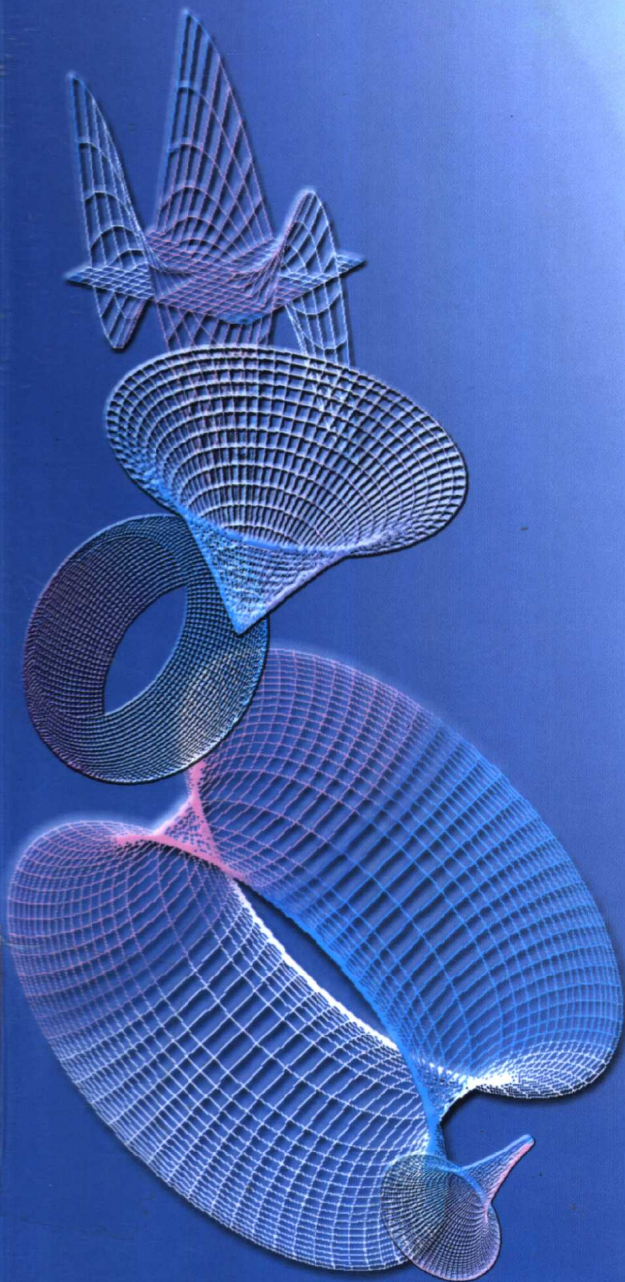


◎王幼宁 刘继志 / 编著



# 微分几何讲义

WEI

FEN

JI

HE

JIANG

YI

北京师范大学出版社

北京师范大学现代数学课程教材

# 微分几何讲义

王幼宁 刘继志 编著

北京师范大学出版社

·北京·

**图书在版编目(CIP)数据**

微分几何讲义/王幼宁,刘继志编著. —北京:北京师范大学出版社,2003.1

ISBN 7-303-06416-8

I. 微… II. ①王…②刘… III. 微分几何 IV. 0186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 107920 号

北京师范大学出版社出版发行

(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

出版人:常汝吉

北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:11.5 字数:287千字

2003年1月第1版 2003年1月第1次印刷

印数:1~3 000 定价:14.00元

## 序 言

在高等学校数学系的教学改革中,基础课的教学内容与教学方法的改革和现代化,始终是教学改革的中心环节。

北京师范大学数学系在长期的教改实践中,不断地总结经验,同时借鉴了我国一些著名数学家的重要思想,初步形成了如下的基本看法,这就是用现代数学的思想、观点和方法(包括适当运用现代数学的语言),对现行基础课的教学内容与体系进行改革,在保持基础课内容的基本系统性和完整性的基础上,为学生打开一个通向现代数学的窗口。

基于这个基本看法,北京师范大学数学系正在编著系列的基础课教材,将在北京师范大学出版社陆续出版。本书正是这套系列教材中首先完成的一部。

本书是作者们长期进行教改实践的研究成果,已在本科教学中多次试用,多次修改。作者们又长期活跃于科学研究第一线,在科研中取得了丰硕成果。本书加强了内蕴几何,加强了整体观念,将向量方法、张量方法、李

群与活动标架方法这些微分几何的重要方法,有机地融入经典内容之中;本书还有许多改革与创新,体现了作者们近年来的科研成果与思想。

本书在教学方法的改革上同样进行了有益的尝试,并取得了良好的效果。

今年正值北京师范大学的百年校庆,本书也是作者们以赤子之心向百年校庆的真诚献礼。在新的百年中,北京师范大学将创建新的辉煌,北京师范大学数学系也必将在其中做出自己应有的贡献。

郑学益

2002年12月

## 使用说明

作为教材,本讲义提供了大学微分几何课程中的基本知识、基本方法和一些重要思想的一种训练体系。本讲义可以供数学系、物理系以及相关各系或研究机构的学生、教师和研究人员参考。

本讲义是作者关于教育改革的研究成果之一,已在北京师范大学数学系多次试用并修改;配套的多媒体参考资料和网络交互教学实验也将逐步完善。本讲义在内容和结构上能够基本满足教改精神和我系的新教学计划对于微分几何课程的要求;配套的电子版也将使教学形式多样化和教学手段现代化,从而将给校内、外的学生提供更加有效、便利的学习微分几何课程的方式和条件。

### 1. 编写指导思想

根据我系新的教学计划和教学改革的精神,参考教育部有关高等教育和初等教育改革的相关课题的研究成果,按照教研室同事之间多次讨论所达成的共识,在微分几何课程的教材建设中应该遵循下列指导思想:加强几何直观及特色,强化几何量的概念,使学生对于微分几何学有一个较为完整的初步认识,为学生以后学习现代数学、现代物理学以及其他与几何密切相关的应用学科提供良好条件;完善课程自身的思想体系,在代数、分析和几何学思想的融合方面加以强调,在几何学和其他学科的科学思想的融合方面做出努力,初步反映出近几十年来几何学的迅猛发展以及与其他学科的相互影响和相互推动作用,初步反映出它对新技术的促进和推动作用;强调几何的客观实在性,培养学生对几何内在

性质的洞察力,加强应用性训练。

## 2. 与原有微分几何课程内容结构相比的调整取向

强调几何对象的客观属性和几何直观;强调内蕴几何;加强整体观念。反复强调以下两点:第一,从定性的几何特征出发,如何运用分析或代数的工具建立起定量的描述,这实际上是一个数学建模的过程;第二,从一个几何对象的定量描述中,如何运用分析或代数的工具研究其只依赖于几何特征的量。

## 3. 教学目的和内容安排

本讲义所涉及的内容可以大致划分为两个部分:一者为经典的局部微分几何主要内容,主要包含在第一至第六章;另一者主要为近代和现代整体微分几何的初步内容,主要包含在第七和第八章。前者将构成微分几何必修课(以下简称经典部分)的主体,后者可用于设置选修课程(以下简称整体部分)或指导学生阅读。注意,在设置课程时,上述划分只是一种参考形式,略有交叉和融合的章节完全可以重新安排阅读或讲授次序。

经典部分的教学内容建议安排在第四学期开设必修课,要求学生在数学上已经具备了一定的素养。以三维欧氏空间中的曲线和曲面的经典局部理论为中心而进行讨论;在适当的代数表示手段之下,以数学分析为主要工具来考察几何体和几何量。以具体内容作为载体,合理利用向量代数和向量分析所具有的直观优势,合理强调基于标架场及其运动公式的活动标架法所具有的理论地位,广泛使用线性代数语言所提供的简洁运算手段,启发研究几何问题时利用张量代数和张量分析所体现的几何不变属性。同时强调参数变换的影响,为以后向微分流形过渡或者广泛使用外微分和抽象活动标架法做出启示。

整体部分的配套教学内容建议安排在第六学期开设选修课,

要求学生在数学上已经具备了较为全面的基础素养。以数学分析为主要工具来考察整体几何体和几何量。列举三维欧氏空间中的曲线和曲面的整体微分几何的若干初步结果,同时展示若干典型的几何方法;给出曲面的整体表述,并建立相关的整体基本概念;考虑抽象曲面的几何结构,为引入微分流形和 Riemann 流形做好铺垫。

#### 4. 具体内容调整及其说明

作者借鉴、参考国内外多种教材的选材,并结合培养目标,按照编写指导思想在下列方面对本讲义具体内容进行了适当处理:

- ①将标架场的语言列为必备知识,用标架场的语言和几何不变量的思想贯穿教材全程,合理强调基于标架场及其运动公式的活动标架法所具有的理论地位并展示其实际作用,为更进一步的代数工具的运用提供背景;
- ②强调几何对象参数化的深层次意义,详尽解释曲线和曲面的概念,自然过渡到整体抽象曲面,为微分流形提供背景;
- ③强调较深层次分析工具和几何思想的融合,合理解释逼近手段和逼近方法的一般性;
- ④在一些经典的特殊对象上,强调几何直观对于严密论证的启发;
- ⑤用 Weingarten 变换的观点处理法曲率和主曲率,结合矩阵表示来简明地论证并提供计算方法;
- ⑥加强了测地线几何,深化对于指数映射的了解;
- ⑦针对教学对象的特点,强调非欧几何模型及其抽象化对于空间观的影响;
- ⑧详尽阐述平移概念,为联络理论提供直观背景;
- ⑨关于整体部分的许多经典定理的证明,提供了较为直观的阐述;
- ⑩深入讨论一些整体概念和整体方法,为理科基地建设提供配套微分几何教学内容。

#### 5. 整体部分的内容选取依据和内容处理说明

整体部分的内容选取是依据以下条件均衡做出的:①自身概念的理论价值是重要的,或处理方法的理论价值是重要的;②几何意义明确,相应结论或方法很直观;③可以用较简单的工具和具有几何背景的方法加以介绍,使之较易被学生接受;④提供进一步学习或研究的线索;可以为进一步学习或研究微分流形和 Riemann 几何学的理论、方法提供较为清晰的背景知



识,为较为深入地了解几何或物理空间结构做好铺垫。

在具体内容的处理上,除博采众长外,我们依照设计思想提出了一些独特的办法来进行操作,采用了一些最新的研究成果。

## 6. 写给学生的几点建议

在学习过程中,根据本讲义的特点和你自身情况的变化,请考虑下列具体建议是否对自己有益:①本讲义的目录较为详细,对于理解主要线索是有用的;时常看看、想想,也许能获得微分几何以外的收获——改善学习方式;②注意明确结论的或方法中蕴含的几何意义,不断提高直观能力和相应的严格表达能力——从中也可以不断训练理性思维能力并且体会理性思维的力量;③注意体会方法的一般性和特殊性——在感受奇妙现象的同时,一定不要忘记数学方法的一般性和有用性;④习题之中既包含传统形式的,也设置了少量开放形式的思考题作为创造性思维训练载体;开放题的求解更应注重过程,甚至不必在意最终是否解得结果;⑤电子版在许多方面可以帮助你,但沉溺其中的副作用不可忽视;纸媒介讲义能使你训练更强的抽象思维能力;⑥注意了解图形对象的常见性和有用性、复杂性,注意了解微分几何学的历史及其现今在各方面的应用,会帮助你更全面地了解学习相关课程的意义;⑦如果你想理解科学的空间观并且在这方面了解人类智慧的结晶,那么你的学习兴趣将会推动自己克服学习中可能遇到的困难,也就比较容易学完全部内容,到达一个新的起点;对于想在数、理理论上进一步深造的同学而言,这个起点尤为重要。

希望上述建议能帮助你不仅仅容易学到知识,更使你注意到方法、学到思想,并且在思维方式和学习能力上获得进步。

本讲义的内容和形式是改革的产物,是基于更好地服务于特殊的读者群体而做出的尝试结果,难免有不尽如人意之处。由于容量有限,有些很好的结果和方法并没有编入讲义;想了解具体对象的读者可以参阅其他书籍,比如参考文献中所列读物。

本讲义是在受到教育部理科基地创建名牌课程项目资助的基

基础上完成的;同时得到北京师范大学教务处、数学系的关怀,得到北京师范大学出版社及其编辑们的支持。在本书的写作和使用的这几年间,同事高红铸教授、孙宏伟博士提出了许多修正意见和具体建议,助教们和同学们也提出了质疑和修正意见。特别是郑学安教授在百忙中也欣然为本书作序。作者藉此一并表示衷心感谢!

本讲义若有疏漏之处,敬请各位读者继续指正;也欢迎各位读者与我们直接交流体会、共同进步!

作 者

2002年11月21日

### 本书常用符号表

符号	释 义
$E^n$	$n$ 维欧氏 (Euclid) 空间
$R^n$	$n$ 维实向量空间
$S^n$	$n$ 维球面
$C^k(U)$	$U$ 上的 $k$ 阶连续可微函数全体
$C^k$	所指定定义域上的 $k$ 阶连续可微函数全体
$\angle(\cdot, \cdot)$	所讨论对象“ $\cdot$ ”和“ $\cdot$ ”之间的夹角
$\Delta x$	$x$ 的增量
$\Delta f$	$f$ 在 Laplace 算子“ $\Delta$ ”下的作用结果
$\nabla f$	$f$ 的梯度向量
$\operatorname{div} a$	向量 $a$ 的散度
$\delta_i^j$	Kroneker delta
$T$	所指定曲线的单位切向量场
$N$	所指定曲线的主法向量场
$B$	所指定曲线的从法向量场
$\kappa$	所指定曲线的曲率函数
$\tau$	所指定曲线的挠率函数
$\kappa_g$	所指定曲面上的曲线的测地曲率函数
$\kappa_n$	所指定曲面上的法曲率函数
$K$	所指定曲面上的 Gauss 曲率函数
$H$	所指定曲面上的平均曲率函数
$g_{ij}$	第一基本形式 (Riemann 度量形式) 的系数 (分量)
$g^{ij}$	第一基本形式系数矩阵的逆矩阵的第 $(i, j)$ 个元素
$\Omega_{ij}$	第二基本形式系数矩阵的第 $(i, j)$ 个元素
$\omega_i^j$	Weingarten 变换在指定自然标架下的相应表示矩阵的第 $(i, j)$ 个元素
$\Gamma_{ik}^j$	各指标依次为下标“ $i$ ”、上标“ $j$ ”、下标“ $k$ ”的第二类 Christoffel 记号 (Christoffel's symbol)
$\Gamma_{ijk}$	第一类 Christoffel 记号 (Christoffel's symbol)
$R_{ikl}^j$	第二类 Riemann 曲率张量的分量, 各指标依次为下标“ $i$ ”、上标“ $j$ ”、下标“ $k$ ”、下标“ $l$ ”
$R_{ijkl}$	第一类 Riemann 曲率张量的分量
$d(\cdot, \cdot)$	所讨论对象“ $\cdot$ ”和“ $\cdot$ ”之间的距离

## 目 录

使用说明	( 1 )
本书常用符号表	( 6 )
第一章 预备知识	( 1 )
§ 1 向量代数复习	( 1 )
一、 $E^3$ 中 Descartes 直角坐标系 $O-xyz$ 中的点与 向量	( 1 )
二、向量空间 $R^3$ (起点自由)	( 2 )
三、 $E^3$ 中向量的乘积	( 2 )
四、在初等几何中的应用例示	( 4 )
§ 2 向量函数微积分	( 6 )
一、 $E^3$ 中实变向量函数	( 6 )
二、向量函数的极限、连续和微积分简介	( 6 )
三、常用几何条件的解析判定式	( 9 )
§ 3 标架和标架场	( 13 )
一、 $E^3$ 中的单位正交右手标架及其变换	( 13 )
二、 $E^3$ 中的刚体运动与等距变换	( 16 )
三、 $E^3$ 中的正交标架场的运动公式	( 18 )
四、 $E^3$ 中的仿射标架	( 19 )
第二章 曲线的局部微分几何	( 21 )
§ 1 参数化曲线与曲线的参数表示	( 21 )
一、 $E^3$ 中参数化曲线的定义	( 21 )
二、正则曲线	( 23 )

	三、曲线的等价	(25)
§ 2	曲线的弧长和弧长元素	(31)
	一、 $E^3$ 中正则曲线段的长度	(31)
	二、弧长和弧长参数	(33)
§ 3	曲线的曲率和 Frenet 标架	(36)
	一、曲率	(36)
	二、Frenet 标架	(39)
§ 4	曲线的挠率和 Frenet 公式	(47)
	一、挠率	(47)
	二、Frenet 公式	(51)
§ 5	曲线在一点附近的结构	(54)
	一、曲线的局部规范形式	(54)
	二、曲线的局部近似曲线	(55)
	三、曲线的切触	(57)
§ 6	曲线论基本定理	(59)
	一、一般结果	(59)
	二、平面曲线的相对曲率	(63)
§ 7	特殊曲线组	(67)
	一、Bertrand 曲线	(67)
	二、渐伸线与渐缩线	(70)
	三、单参数曲线族的包络	(72)
第三章	曲面的第一基本形式	(77)
§ 1	参数化曲面	(77)
	一、 $E^3$ 中参数化曲面的定义	(77)
	二、正则曲面	(80)
	三、正则曲面的切平面和法线	(81)
	四、参数变换	(84)
	五、参数曲面的等价	(86)

---

§ 2	直纹面与可展曲面 .....	( 88 )
	一、直纹面及其上的参数变换 .....	( 88 )
	二、可展曲面及其局部形状分类 .....	( 92 )
	三、单参数曲面族的包络 .....	( 96 )
§ 3	曲面的第一基本形式 .....	(102)
	一、曲面上的弧长元素 .....	(102)
	二、第一基本形式 .....	(104)
	三、交角与面积元素 .....	(107)
§ 4	局部等距对应 .....	(114)
	一、局部等距对应 .....	(114)
	二、曲面的内蕴几何学概念 .....	(117)
§ 5	局部正交参数网与等温参数 .....	(119)
	一、一般结论与正交网 .....	(119)
	二、等温参数 .....	(121)
第四章	曲面的第二基本形式与曲面上的曲率 .....	(123)
§ 1	曲面的第二基本形式 .....	(123)
	一、切点邻近点到切平面的有向距离 .....	(124)
	二、第二基本形式 .....	(124)
	三、在容许参数变换下的行为 .....	(127)
§ 2	法曲率 .....	(129)
	一、曲面上曲线的曲率 .....	(129)
	二、曲面的法曲率 .....	(132)
§ 3	自然标架的运动公式 .....	(135)
	一、Einstein 和式约定 .....	(135)
	二、曲面的基本公式 .....	(136)
	三、测地曲率的内蕴公式 .....	(139)
§ 4	Weingarten 变换 .....	(142)
	一、Weingarten 矩阵的性质 .....	(142)

	二、Weingarten 变换与 Euler 公式 .....	(144)
§ 5	曲面上的曲率概念 .....	(148)
	一、主曲率 .....	(148)
	二、Gauss 曲率和平均曲率 .....	(149)
	三、Gauss 映射和第三基本形式 .....	(151)
§ 6	曲面的特殊参数网 .....	(154)
	一、曲率线和曲率线网 .....	(154)
	二、渐近曲线和渐近曲线网 .....	(158)
§ 7	曲面一点附近的形状 .....	(160)
	一、曲面的局部规范形式 .....	(160)
	二、曲面的局部近似曲面 .....	(161)
§ 8	特殊曲面的曲率特征 .....	(164)
	一、可展曲面的曲率特征 .....	(164)
	二、曲面面积的第一变分公式 .....	(165)
	三、极小曲面 .....	(168)
第五章	曲面论基本定理 .....	(170)
§ 1	曲面论基本方程 .....	(170)
	一、Gauss-Codazzi 方程 .....	(171)
	二、Gauss-Codazzi 方程的独立性 .....	(172)
	三、Gauss 绝妙定理 .....	(175)
§ 2	曲面论基本定理 .....	(178)
	一、相关方程及其解的性质 .....	(178)
	二、曲面论基本定理的证明和说明 .....	(181)
第六章	曲面的内蕴几何初步 .....	(184)
§ 1	测地曲率与测地线 .....	(184)
	一、测地曲率的 Liouville 公式 .....	(184)
	二、测地线基本概念 .....	(186)
	三、弧长的第一变分公式与局部短程线 .....	(189)

---

§ 2	指数映射与测地坐标系 .....	(195)
	一、指数映射及其性质 .....	(195)
	二、法坐标系性质 .....	(198)
	三、测地极坐标系性质 .....	(198)
	四、测地凸域 .....	(201)
§ 3	常曲率曲面与非欧几何模型 .....	(205)
	一、常曲率曲面的局部等距 .....	(205)
	二、常曲率曲面在 $E^3$ 中的代表 .....	(207)
	三、抽象曲面与非欧几何模型 .....	(208)
§ 4	局部 Gauss-Bonnet 公式 .....	(214)
	一、Gauss-Bonnet 公式 .....	(214)
	二、非欧几何中的三角形内角和 .....	(217)
§ 5	曲面上切向量的局部平移 .....	(219)
	一、抽象曲面的切平面 .....	(219)
	二、切平面等距同构的微元表示 .....	(221)
	三、切向量场的绝对微分 .....	(224)
	四、切向量的 Levi-Civita 平移 .....	(226)
	五、内蕴角差 .....	(228)
第七章	曲线的整体性质初步 .....	(232)
§ 1	夹角的整体可微性 .....	(232)
§ 2	平面曲线切线的旋转指标定理 .....	(238)
§ 3	平面凸闭曲线特征 .....	(242)
§ 4	卵形线 .....	(247)
§ 5	平面曲线的等周不等式 .....	(251)
§ 6	球面闭曲线的整体性质 .....	(257)
§ 7	$E^3$ 中闭曲线的全曲率 .....	(264)
§ 8	曲线的整体弯曲量度 .....	(268)
	一、弧段的比较 .....	(268)



二、闭曲线的曲率平均值·····	(271)
第八章 曲面的整体性质初步·····	(273)
§ 1 曲面片与曲面·····	(273)
§ 2 完备曲面·····	(282)
§ 3 管状面 Willmore 不等式·····	(292)
§ 4 凸闭曲面特征·····	(299)
§ 5 整体 Gauss-Bonnet 定理·····	(302)
§ 6 曲面上的若干微分算子·····	(309)
一、 $S$ 上的函数的微分和梯度·····	(309)
二、 $S$ 上切向量场的平移和绝对微分·····	(311)
三、 $S$ 上的散度算子 $\operatorname{div}$ ·····	(315)
四、 $S$ 上的 Beltrami-Laplace 算子 $\Delta_S$ ·····	(316)
§ 7 球面的刚性·····	(318)
§ 8 Poincaré 指标定理·····	(322)
§ 9 抽象曲面的几何结构概述·····	(329)
参考文献·····	(332)
索引·····	(333)