适合于高等教育自学考试
适合于高等教育学历文凭考试

中国管理软件学院

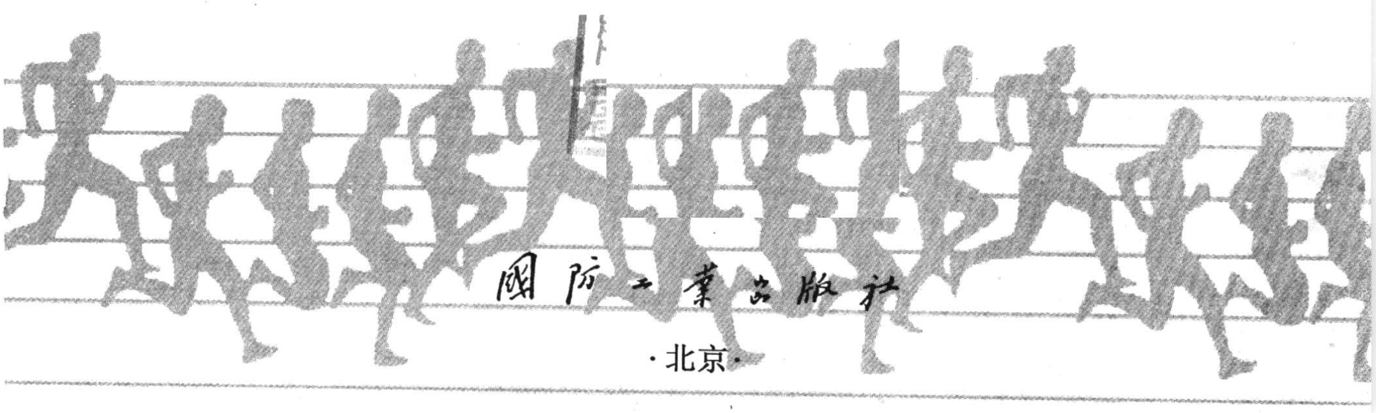
线性代数考前冲刺

主编 王玲 副主编 王广生

国防工业出版社

线性代数考前冲刺

主　编　王　玲
副主编　王广生
编　著　王玲　王广生　熊伟
　　　　洪艳　郝素敏　李俊



国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

“线性代数”是高等教育中各专业学科的公共基础课。本书是与《线性代数》教材紧密配套的考前复习、练习用书。全书分为四部分。第一部分为《线性代数》各章的主要内容提示与典型例题分析。第二部分为与各章内容对应的大量练习题及其答案。第三部分给出近几年高等教育自学考试线性代数试卷选编。第四部分给出中国管理软件学院的10套模拟仿真试题。

读者对象：普通高等学校的在校学生，以及社会上准备参加高等教育自学考试和国家学历文凭考试的广大读者。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数考前冲刺/王玲主编．—北京：国防工业出版社，2004.1

ISBN 7-118-03189-5

Ⅰ．线… Ⅱ．王… Ⅲ．线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第046157号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码 100044）

腾飞胶印厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14½ 385千字

2004年1月第1版 2004年1月北京第1次印刷

印数：1—5000册 定价：24.00元

序

中国管理软件学院成立于1984年，在北京市教委的正确领导下，在全国许多著名的计算机软件和电子信息专家的亲切关怀和指导下，面向现代化、面向世界、面向未来，培养高科技高级专业技术人才和信息管理人才，按照“强专业、高质量”的方针，在教学改革、严格管理、加强建设和探索高级人才培养模式等方面取得了出色的成绩。1993年，中国管理软件学院经国家教委审定，被批准为第一批国家学历文凭考试试点院校；1994年被批准为计算机等级培训点之一；1995年，北京市高等教育自学考试委员会为我院单独开设通信工程专业；1996年，学院获得海淀区民办高校“香港迎回归知识竞赛”一等奖；1997年，被中国成人教育协会民办高等教育委员会评为“民办高校先进单位”；1998年，被北京市教委评为民办高校“优良学校”；2000年，被教育部信息管理中心批准为远程教育培训点；2001年，被北京市教委批准为北京首批24所合格民办高校之一；2002年，被北京市教委批准为北京市英语口语等级培训点及考试点；2003年，被北京市教委批准为全国计算机等级培训点及考试点，并被评为北京十大品牌实力民办高校。这些成绩的取得是与市教委的领导和著名专家的指导分不开的，也是我们全体师生努力奋斗、顽强拼搏、极力创新、创建特色的结果。

我院以计算机控制及应用专业而闻名，以通信工程为名牌，以计算机网络专业为特色，以计算机软件及应用为优势。这四个专业代表了学院的特点，使全国的莘莘学子不远千里，慕名前来求学。随着高科技日新月异的发展，我院不断调整专业的深度和广度，并加强各专业的外语学习，使这些专业长盛不衰，符合社会发展的需要，为国家培养了许多急需的新型的有专业知识的技能型高科技人才，为国家的现代化建设作出了应有的贡献。

实践告诉我们，教育质量是民办高校的生命线，而好的教材是提高教学质量的一个重要方面。通过加强基本理论和基本技能的训练，使学生基础理论扎实，动手能力强，真正成为过硬的高科技应用型人才。

我院一向注重教材建设，编写了一套适合国家文凭考试和自学考试的系列教材及辅助教材，受到了许多读者的欢迎和赞扬，也得到了许多同仁的支持和帮助，在此表示深深的感谢。为了更好地为学生服务，我们把一些教材系列出版。希望使用这套书的读者提出更多的宝贵意见，以便我们今后能编写出更好更适用的教材，为我国的民办教育作出更大的贡献。

中国管理软件学院院长

朱忠才

2003年9月

前　　言

“线性代数”是高等教育自学考试中各专业的公共基础课，是自然科学的基础知识，是学习和掌握现代科学技术管理的必要条件。我院已出版的《线性代数》教材，完全根据高等教育自学考试大纲要求编写，经过8年试用及再版，社会反映非常好，经多届学生使用，均大大提高了学生的应试水平。广大考生呼吁作者再出一本与教材配套的练习用书，面对广大考生的热望，作者深感责无旁贷。这就是我们编写《线性代数考前冲刺》一书的初衷。

本书内容分为四部分。第一部分为《线性代数》各章主要内容提示与典型例题分析。通过内容提示，学生手头即使不备有《线性代数》教材，也可很快进入状态。第二部分是与各章对应的习题练习及答案。学生应独立完成每道习题，答案仅以简答形式给出。第三部分是近几年高等教育自学考试线性代数试卷选编，可使学生了解国家考试的出题格式、形式、题量、知识点及内容覆盖面。第四部分是多套中国管理软件学院模拟考试试卷，学生应按时间独立完成。通过模拟考试可真正提高学生的应试能力，以达到顺利通过国家考试之目的。本书主编王玲、副主编王广生。其中，第一部分由王玲、王广生编著，第二、三、四部分由郝素敏、熊伟、洪艳、李俊编著。

本书编写过程中，赵刚、顾冬平、钱明岗、朱磊、吴东、姜永圣等老师给予了很大帮助并参与了审校工作，在此一并表示感谢。

书中谬误之处，敬请同行指正。作者在此先表谢意！

作　者

2003年6月

目　　录

第一部分　《线性代数》各章的主要内容提示及典型例题分析

第二部分　习题练习及答案

第三部分　高等教育自学考试线性代数试卷选编

第四部分　中国管理软件学院线性代数模拟仿真试卷

第一部分 《线性代数》各章的主要内容提示及典型例题分析

一、第1章(行列式)知识要点、典型例题分析及答案

行列式是研究线性方程组的有力工具．

学习本章要求理解 n 阶行列式的定义，了解并能应用行列式的基本性质，掌握行列式的计算方法，掌握利用行列式解有关线性方程组的克莱姆法则．

1．n 阶行列式定义

1）排列的奇偶性

由不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，称为一个 n 级排列．

在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，如果有数码 i_t 排在比它小的数码 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序．一个 n 级排列的逆序总数称为该排列的逆序数．n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$．

求 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数，即求该排列的各个数码前面比它大的数码个数的总和，可按下列方法求得：观察排在1前面的数码个数，设为 k_1，划掉1．再观察排在2前面的数码个数，设为 k_2，划掉2…… 如此下去，最后观察排在 n 前面的数码个数，设为 k_n，于是可得 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)=k_1+k_2+\cdots+k_n$．例如求六级排列431625的逆序数：$k_1=2$，因1前面有两个数码4与3．划去1，余下43625．$k_2=3$，因2前面有三个数码4,3,6．划去2，余下4365．$k_3=1$，因3前面有一个数码4．划去3，余下465．$k_4=0$，因4前面没有数码．划去4，余下65．$k_5=1$，因5前面有一个数码6．划去5，余下6．$k_6=0$，因6前面已没有数码．因此 $N(4\ 3\ 1\ 6\ 2\ 5)=2+3+1+0+1+0=7$．

逆序数为偶数或零的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列（见上例）．

2）n 阶行列式的定义

定义 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项前的符号是：当这一项中元素的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取“正”号，是奇排列则取“负”号．

注意1

①$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为 n 阶排列．行列式表示 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 取遍由 $1,2,\cdots,n$ 构成的 n 级排列所形成的全部 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 的代数和．由于由 $1,2,\cdots,n$ 构成的全部 n 级排列有 $n!$

种，故行列式为 $n!$项的代数和．

② 在 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 前面冠以的符号，由 $N(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 决定，$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为偶排列，该项前面冠以正号；$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为奇排列，该项前面冠以负号．n 阶行列式前面冠以正号与冠以负号的项，各占$\frac{n!}{2}$项．

例如，三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，它表示 $3!=6$ 个形如 $a_{1j_1},a_{2j_2},a_{3j_3}$ 的项的代数和．$j_1,j_2,\cdots,j_3$ 为1,2,3的全部三级排列，其中123,231,312为偶排列，132,213,321为奇排列．因此，$a_{11}a_{22}a_{33},a_{12}a_{23}a_{31},a_{13}a_{21}a_{32}$ 三项前面冠以正号；$a_{11}a_{23}a_{32},a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 三项前面冠以负号．于是有 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$．请注意，这里所说的"冠以正号"或"冠以负号"，是指形式上连接各项之间的符号，它不包括元素本身的符号．

例如，二阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中的项，$a_{11}a_{22}$ 前面冠以正号，$a_{12}a_{21}$ 前面冠以负号，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$．但如果 $a_{11}=-1,a_{12}=4,a_{21}=-5,a_{22}=3$，那么 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=-1\times3-4\times(-5)=-3+20=17$．计算的结果，冠以正号的项 $a_{11}a_{22}$ 为 -3，冠以负号的项 $-a_{12}a_{21}$ 为20．

注意 2

①n 阶行列式共有 n^2 个元素，如果其非零元素的个数小于 n，则行列式的值必为零．

因行列式的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素乘积，如非零元素个数小于 n，那么每一项中至少有一个零元素，故行列式的值必为零．

② 若行列式有某一行(列)的元素全为零，那么行列式的值必为零．

设第 i 行(列)的元素全为零，行列式的每一项中必有一元素取自第 i 行(列)，因此各项皆为零，于是行列式的值为零．

3) 特殊行列式

① 一阶行列式 $|a|=a$．

② 上、下三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注:“$*$”区元素为不全为 0 的数,“0”区元素皆为 0.

③ 对角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

这些特殊行列式的结果可作为公式使用.

2. 行列式的性质

性质 1 行列式转置,行列式的值不变.

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式的值变号.

例 1 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式的值为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列)的各元素,等于以数 k 乘此行列式.

推论 1 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子,则公因子可以提到行列式外面.

推论 2 如果行列式有两行(列)对应元素成比例,则行列式的值为零.

注意 若 $|a_{ij}|$ 为 n 阶行列式,当 $k \neq 1$ 时,$|ka_{ij}| \neq k|a_{ij}|$,$|ka_{ij}| = k^n|a_{ij}|$.

例 2 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \boldsymbol{D}$,则有 $\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{D}$,

$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^4\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}$, $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 2a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{D}$,

$$\begin{vmatrix} 10a_{11} & -5a_{12} & -5a_{13} & -5a_{14} \\ -6a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} & 3a_{24} \\ -2a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -2a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-5) \times (-2) \times 3\boldsymbol{D} = 30\boldsymbol{D}.$$

性质 4 如果行列式中的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,则此行列式可以写成两个行列式的和.这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同.

注意 一般说来 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$. 因为 $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

性质5 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

注意 性质 5 只能将某一行(列) k 倍加于(而非再加上)另一行(列).

例 3 设 $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,根据性质 5,判断下列结论哪些是正确的?

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+2a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+2a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{D} \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}-a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}-a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{D} \qquad \boldsymbol{D}_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}+2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}+2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}+2a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{D}$$

解 $\boldsymbol{D}_1$ 是将 $\boldsymbol{D}$ 的第一列乘 2 加到第二列所构成,因此 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}$. $\boldsymbol{D}_2$ 是将 $\boldsymbol{D}$ 的第三列乘 (-1) 加到第二列所构成,因此 $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{D}$. $\boldsymbol{D}_3$ 是将 $\boldsymbol{D}$ 的第二列乘 (-1),再加上第一列,因此,$\boldsymbol{D}_3 = -\boldsymbol{D}$. $\boldsymbol{D}_4$ 是将 $\boldsymbol{D}$ 的第三列乘 2,再加上第一列,因此 $\boldsymbol{D}_4 = 2\boldsymbol{D}$. 因此,$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{D}$ 正确,$\boldsymbol{D}_3 = \boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{D}_4 = \boldsymbol{D}$ 不正确.

3. 行列式按行(列)展开

1) 行列式按某一行(列)展开

在 n 阶行列式 $\boldsymbol{D} = |a_{ij}|$ 中,去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后,余下的元素按原来顺序构成一个 $n-1$ 阶行列式,在其前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij}. 注意,a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 只与元素 a_{ij} 所在的位置有关,而与元素 a_{ij} 本身的大小无关.

定理 1 n 阶行列式 $\boldsymbol{D} = |a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和.即

(1) 按 $\boldsymbol{D}$ 的第 i 行展开,有公式 $\boldsymbol{D} = a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{in}$ $(i = 1,2,\cdots,n)$.

(2) 按 $\boldsymbol{D}$ 的第 j 列展开,有公式 $\boldsymbol{D} = a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}$ $(j = 1,2,\cdots,n)$.

定理 2 n 阶行列式 $\boldsymbol{D} = |a_{ij}|$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零.即

(1) $\boldsymbol{D}$ 中某一行所有元素与另一行对应元素的代数余子式乘积的和,有 $a_{i1}\boldsymbol{A}_{s1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{s2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{sn} = 0$ $(i \neq s)$.

(2)$\boldsymbol{D}$ 中某一列所有元素与另一列对应元素的代数余子式乘积的和，有 $a_{1j}\boldsymbol{A}_{1t}+a_{2j}\boldsymbol{A}_{2t}+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{A}_{nt}=0\ (j\neq t)$.

以上四式简写如下：

行列式按行展开有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{sj}=\begin{cases}\boldsymbol{D} & i=s\\ 0 & i\neq s\end{cases}$

行列式按列展开有 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{A}_{it}=\begin{cases}\boldsymbol{D} & j=t\\ 0 & j\neq t\end{cases}$

*2) 行列式按某 k 行(列) 展开

在 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$ 中，任意取定 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素按原来的顺序组成的 k 阶行列式称为行列式 $\boldsymbol{D}$ 的一个 k 阶子式．设这个 k 阶子式在行列式 $\boldsymbol{D}$ 中所在的行为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行，所在的列为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列．去掉这些行与这些列，余下的元素按原来的顺序，构成一个 $n-k$ 阶行列式，在其前面冠以符号 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}$，称为该 k 阶子式的代数余子式．

定理 3 在 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}=|a_{ij}|$ 中，任意选定 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n)$，由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积的和等于行列式 $\boldsymbol{D}$.

4．克莱姆法则

含有 n 个方程的 n 元线性方程的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases},\tag{1-1}$$

式(1-1) 的系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 构成系数行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

克莱姆法则 方程组(1-1) 在系数行列式 $\boldsymbol{D}\neq 0$ 时，有且仅有惟一解 $x_j=\dfrac{\boldsymbol{D}_j}{\boldsymbol{D}}\ (j=1,2,\cdots,n)$．$\boldsymbol{D}_j$ 为将 $\boldsymbol{D}$ 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 对应地换为式(1-1) 的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式．

克莱姆法则给出了在 $\boldsymbol{D}\neq 0$ 的条件下，方程组(1-1) 解的存在性与惟一性，并且给出了求方程组(1-1) 的一个用行列式表示的公式，这个公式既规范化又简单、明显，且易于记忆．但应用克莱姆法则求方程组的解，要注意克莱姆法则的前提条件，即克莱姆法则只适用于系数行列式不等于零的 n 个方程的 n 元线性方程组，它不适用于系数行列式等于零或方程个数与未知数个数不等的线性方程组．如果(1-1) 中 $b_j=0(j=1,2,\cdots,n)$，则有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1-2}$$

齐次线性方程组(1-2),不论系数行列式 D 如何,等于零或不等于零,方程组总有零解．当系数行列式 $D \neq 0$,由克莱姆法则可知式(1-2)仅有零解,其逆否命题说明:若式(1-2)除零解外,还有非零解,则系数行列式 $D = 0$.

二、第 2 章(矩阵)知识要点、典型例题分析及答案

矩阵不论是在数学的理论研究上,还是在实际应用中,都有重要作用．

学习本章,要求掌握矩阵的概念,熟练掌握矩阵的运算,理解逆矩阵的概念与性质,会求逆矩阵,会对矩阵进行初等变换,并会求矩阵的秩．

1. 矩阵的概念

定义　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$ 排列成一个 m 行 n 列的矩形表,称为一个 $m \times n$ 矩阵,记作 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 或简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$. 常用的几种特殊矩阵如下．

1) 零矩阵

所有元素均为零的矩阵,称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{0}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{0}$.

2) n 阶矩阵(方阵)

行数与列数相同的矩阵,称为方阵,行数与列数均为 n 的矩阵称为 n 阶矩阵(方阵).

注意　方阵与行列式是两个根本不同的概念,n 阶矩阵 (a_{ij}) 仅是由 n^2 个数排列成的一个方形表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,而 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 则表示一个值．

由方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素按原来的排列顺序构成的行列式,称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式,记作 $|\boldsymbol{A}|$.

3) 三角形矩阵

n 阶矩阵 (a_{ij}) 中的元素满足 $a_{ij} = 0 \quad (i > j;i,j = 1,2,\cdots,n)$,称为 n 阶上三角形矩阵．上三角形矩阵形如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,简记为 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & * \\ & & a_{33} & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$

"0" 区元素皆为零,"*" 区元素可不为零．如果 n 阶矩阵 (a_{ij}) 中的元素满足

$$a_{ij} = 0 \quad (i < j;i,j = 1,2,\cdots,n)$$

则称为 n 阶下三角形矩阵，形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & 0 & \\ & & a_{33} & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

4) 对角形矩阵

n 阶矩阵(a_{ij})中的元素满足 $a_{ij}=0\ (i \neq j; i,j=1,2,\cdots,n)$，称为 n 阶对角形矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & 0 & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$.

如果对角形矩阵中 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a$，又称为数量矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & 0 & & \\ & & a & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a \end{bmatrix}$.

5) 单位矩阵

n 阶矩阵(a_{ij})中的元素满足 $a_{ij}=1\ (i=j; i,j=1,2,\cdots,n)$，$a_{ij}=0\ (i \neq j; i,j=1,2,\cdots,n)$ 则称为单位矩阵，形如 $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$. 单位矩阵记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$，或者记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

2. 矩阵的运算

矩阵本身只是一个表，其所以具有强大的生命力就在于它定义了一些既有理论意义又符合客观实际的运算方法，对于定义矩阵运算的实际背景，各种教材中都有例子说明，本书不再赘述.

1) 矩阵加法

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

注意 参与相加的矩阵必须行数相同，列数相同，加法才可以进行，否则加法不可进行."和矩阵"的行数与列数与参与相加的矩阵相同.

矩阵加法的性质 下列运算均可以进行：①$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；③$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；④$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

2) 数与矩阵乘法

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为数，则 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$. 数与矩阵乘法的性质 设下列运算均可以进行：

(1)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，(2)$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$，(3)$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，(4)$0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$， (5)$k \cdot \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$.

注意

① 数乘矩阵,其“积矩阵”与原矩阵同行同列.

② 数乘方阵与数乘行列式不同,不要混淆.

数 k 乘一个行列式等于用 k 乘该行列式的某一行或某一列的各元素.而数 k 乘一个方阵等于用 k 乘该方阵的每一个元素.

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为 n 阶矩阵,则 $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix} = (ka_{ij}) = k(a_{ij}) = k\boldsymbol{A}$,而

$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = |ka_{ij}| = k^n |a_{ij}| = k^n |\boldsymbol{A}|$.

例如,设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,那么 $3\boldsymbol{A} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$,$3|\boldsymbol{A}| = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$,故

$$|3\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3^2 |\boldsymbol{A}| = 9\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

3) 矩阵乘法

若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times s}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times n}, \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$,则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$.其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$.

矩阵乘法的性质 下列运算均可以进行:①$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;②$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$;③$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{CB}$;④$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

注意 1

① 两矩阵相乘,左边矩阵的列数必须与右边矩阵的行数相同,乘法才是可以进行的,否则乘法不可以进行.

②“乘积矩阵”的行数等于左边矩阵的行数,“乘积矩阵”的列数等于右边矩阵的列数.

③“乘积矩阵”第 i 行第 j 列元素等于左边矩阵第 i 行各元素与右边矩阵第 j 列各对应元素乘积的总和.

注意 2

① 矩阵乘法不满足交换律.例如,设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,那么 $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.$\boldsymbol{BA}$ 不可进行,即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都可进行,$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 也不

一定相等．例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$；而 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$．再设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(1\quad 2\quad 3)$；那么 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{BA}=(14)$．$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$．

既然矩阵乘法不满足交换律，那么请读者注意，以后不要随便交换两矩阵相乘的左右顺序．$\boldsymbol{AB}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$，或称 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$．

② 有的矩阵相乘可以交换．

如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 称为可交换矩阵．

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$；那么 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$．$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以交换．

③ 矩阵乘法不满足消去律．

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}$；那么有 $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$．可以看到 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$．由 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 且 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$，一般地，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$．

④ 两个非零矩阵相乘，可能是零矩阵．

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\4&3\end{pmatrix}$；那么有 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$．因而不能从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$．

⑤ 对同阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$．

4）矩阵的转置

将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换，得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^T$ 或 $\boldsymbol{A}'$．

转置矩阵的性质　下列运算均可以运行：①$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，③$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，④$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

注意

① 要区分矩阵转置与行列式转置的不同．行列式转置虽然在表示形式上改变了，但行列式的值不变；矩阵转置，一般地变成了另一个矩阵（特殊情况除外）．

② 特别要注意性质④，一般地 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$．例如，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$；那么有 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=(6\quad 4)$，而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(3\quad 1)$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(3\quad 1)\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}=(6\quad 4)$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 不可进行，可见 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$．

5）矩阵的幂

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，那么 $\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{k\text{ 个}}=\boldsymbol{A}^k$.

矩阵幂的性质　下列运算均可以进行：(1) $\boldsymbol{A}^{k_1}\cdot\boldsymbol{A}^{k_2}=\boldsymbol{A}^{k_1+k_2}$，(2) $(\boldsymbol{A}^{k_1})^{k_2}=\boldsymbol{A}^{k_1k_2}$.

注意

① 矩阵幂的运算，只对方阵有意义．

② 一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{B}^k$. 例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$；那么有 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\2&0\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{AB})^2=\begin{pmatrix}-2&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\-4&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\0&2\end{pmatrix}$. 可以看到 $(\boldsymbol{AB})^2\neq\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

3. 用图形表示矩阵运算

用矩形表示矩形，矩阵的行数为矩形的宽（高），矩阵的列数为矩阵的长（底）．例如，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 3×5 矩阵，其图形表示宽为 3 个单位，长为 5 个单位的矩形如图 2-1 所示．

1）矩阵加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，用图 2-2 所示图形来表示 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

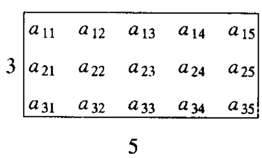


图 2-1

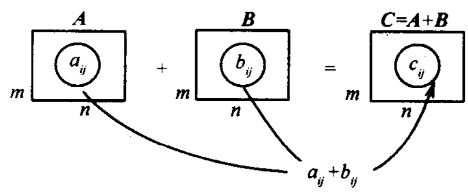


图 2-2

2）数与矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为数，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，用图 2-3 来表示 $C=k\boldsymbol{A}$.

3）矩阵乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，用图 2-4 来表示 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

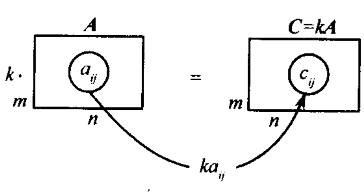


图 2-3

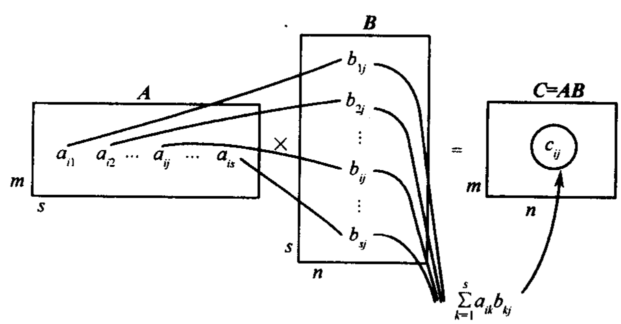


图 2-4