再生核空间数值分析

崔明根 吴勃英 著

科学出版社
www.sciencep.com

再生核空间数值分析

崔明根　吴勃英　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书将一个特殊的 Hilbert 空间——再生核空间作为解决数值分析问题的较理想的框架提出来. 本书第一章介绍了再生核理论;第二章和第三章讨论了插值问题,构造出对散乱的节点系不用导数条件,能保证一致收敛的一元和多元插值公式;第四章讨论了插值迭代法;第五章和第六章讨论了各类算子方程及其基于方程精确解的表达式,给出了数值解的求解方法;第七章讨论了泛函极值问题,给出了一类数值泛函问题的最佳解的表达式;第八章讨论了一类重要的非线性算子方程,给出了精确解的表达式.

本书可供综合性大学、高等理工大学数学专业研究生、教师及研究人员阅读,也可供从事科学与工程计算的工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

再生核空间数值分析/崔明根,吴勃英著. —北京:科学出版社,2004
ISBN 7-03-012197-X

Ⅰ. 再… Ⅱ. ①崔…②吴… Ⅲ. 核空间 - 数值计算 Ⅳ. O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 082128 号

策划编辑:林 鹏 胡 凯/文案编辑:邱 璐 孙克玮/责任校对:宋玲玲
责任印制:钱玉芬/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 1 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2004 年 1 月第一次印刷 印张:10 3/4
印数:1—2 000 字数:220 000

定价:32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序 言

1930 年 Bergman[1~7]在研究下述微分方程的求解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma(x,y)u=0$$

(其中：$\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $\gamma(x,y)\in C^2(\Omega)$，$\Omega$ 是有界区域，$\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $\gamma(x,y)$是 Ω 内的实解析函数)时，首次给出了再生核的概念及表达式

$$E(z,\bar{z},t)\equiv\widetilde{E}(z,\bar{z},t)\exp\left\{-\int_0^{\bar{z}}A(z,\bar{\eta})\mathrm{d}\bar{\eta}+n(z)\right\}$$

其中：$n(z)$是 z 的任意一个解析函数；$A(z,\bar{z})$是系数函数；$\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)$延拓函数的一个变换函数；$\widetilde{E}(z,\bar{z},t)$是方程

$$(1-t^2)\widetilde{E}_{zt}-t^{-1}\widetilde{E}_z+2tz(\widetilde{E}_{z\bar{z}}+D\widetilde{E}_z+F\widetilde{E})=0$$

的解.

Bergman 称函数 $\widetilde{E}(z,\bar{z},t)$为微分方程的生成函数(也称为 Bergman 核函数).

再生核理论总体上可分为两方面.一方面产生于积分理论，那时的核被认定是正定积分算子的连续核.这个理论是由 J. Mercer 以“正定核”的名词提出来的[8]，在 20 世纪 20 年代，被其他对积分方程感兴趣的学者们引用. Mercer 发现所有正定积分方程的连续核具有性质

$$\sum_{i,j=1}^{n}K(y_i,y_j)\xi_i\xi_j\geqslant 0 \tag{1}$$

在 20 世纪 30 年代，E. H. Moore 也发现了同样的性质. Moore 讨论的是定义在抽象集合 E 上具有性质(1)式的核函数 $K(x,y)$，在一般的分析中以“正定 Hermitian 矩阵”的名词应用在广义积分方程中，他证明了对每一个正定的 Hermitian 矩阵，对应一个函数族，形成具有内积为(f,g)的 Hilbert 空间，且在此空间中的核具有再生性

$$f(y)=(f(x),K(x,y)) \tag{2}$$

他的这种发现将再生核的两种说法连接起来了，这一理论也被 S. Bochner 在 20 世纪 30 年代以“正定函数”的名词提出[9]. Bochner 研究的是具有实变量 x 的连续函数 $\varphi(x)$，令核 $K(x,y)=\varphi(x-y)$，则此核函数 $K(x,y)$具有性质(1)式.并

将此核应用到 Fourier 变换理论中.

另一方面是 20 世纪初,由 S. Zaremba 在讨论关于调和双调和函数的边值问题时提出的[10]. Zaremba 是第一个在特殊情况下引入与一个函数族相对应的核,并证明此核的再生性(2)式.

在 20 世纪三四十年代,所讨论的核大都是 Bergman 核. Bergman 给出了与一元或多元调和函数,分析函数相对应的核是作为平方度量中的正交函数系中的核给出的. 即定义在区域 D 上具有平方度量

$$\int_D |f|^2 \mathrm{d}\tau$$

的一元或多元解析函数的核,并发现了这些核的再生性[11]. 这些核在一元或多元复函数理论中得到了许多重要应用. Bergman 将 Zeremba 应用再生核解决边值问题的思想进一步深入,证明了再生核是解决椭圆型偏微分方程边值问题的非常有用的工具. 联系到 Hada-mard 各种方法的运用,建立了再生核与不同区域上微分方程解之间的关系. 对于偏微分方程,在一定区域上的解系的核证明是与相应 Neu-man 和 Green 函数完全不同的函数. 再与再生核在偏微分方程中的应用相对应,又得出了再生核与分析函数的 Bergman 核之间的关系,同时多连通区域上的保角映射中的再生核的应用作为重要的映射函数也得到了很大的进展,且被 Bergman 核简单地表达出来[11,12].

1943 年,N. Aronszajn 概括前人的工作,形成了包括特例 Bergman 核函数在内的系统的再生核理论[13]. 再生核理论为每一个特殊例子研究奠定了基础,而且大大简化了一些证明过程. 在这个理论中,函数族的核函数的再生性起着重要的作用. 同时也证明了再生核同样具有正定的 Hermitian 矩阵的性质,这又将两种说法再次统一起来.

后来,国内外许多学者在再生核方面的研究做了大量工作,总结出许多再生核的构造方法,以及在再生核空间中利用核函数的再生性求解方程的近似解. 文献[14]在量子化的 Hilbert 空间中构造再生核,转化使哈密尔顿量子化的能量算子,并且使李代数成为具有半范数的显式拟微分算子. 文献[15] 研究 SUp, q 空间中一族全纯的离散序列的表示,以及对再生核参数 v 的解析连续性进行了讨论. 文献[16]运用次高斯过程的定义,把次稳定过程定义为均衡稳定的尺度混合过程,并研究它的无穷可分性. 这严格依赖于相应稳定过程产生的 $L\alpha$ 空间的子空间$H(R)$的几何性质. 这个空间在次高斯过程的意义下,可看做是一个再生核空间,并研究了该空间的惟一表达方式及一些几何性质. 文献[17]对两个变量的再生核给出了一般化的定义,并概括了相应的理论. 文献[18]对 Cn 上的一类没有特殊要求的 Bergman 空间,给出其上再生核的精确表达式. 文献[19]研究了 Carathéodory 函数构成的具有再生核的 Hilbert 空间,并在其上研究了时间问题. 文献[20]运用再生

核 Hilbert 空间的方法,为球上解析的压缩的函数子类构造了一种 Schur 型运算法则,又讨论了其上的 Nevanlinna-Pick 插值问题.文献[21]利用一般性的结构定理例证了再生核空间与正交多项式全体的关系.文献[22]中证明了 Favard 型定理,即对一列文献中提到的循环所产生的核函数 $kn\ (z,\ w)$,一定在单位球上存在度量 μ,使得 kn 是 Ln 的再生核,并且这个度量在一定条件下是惟一的.文献[23]运用定义在 Cn 中有界均衡区域上的解析函数构成的 Hilbert 空间的理论,构造了 Bergman 核.该核在算子理论中起着越来越重要的作用.文献中还列出了该核所构成的 Hilbert 空间中的几个积分公式.

1970 年,F. M. Larkin 给出了具有再生核的 Hilbert 函数空间中的最佳逼近原则[24].1974 年,M. M. Chawla 又给出了具有再生核的 Hilbert 函数空间具有多项式精度的最佳逼近规则[25].1986 年崔明根[26~28]开始从事再生核空间的逼近论及数值方法的研究,首先给出了一个再生核空间 $W_2^1[a,b]$.在文献[26]中证明了 $W_2^1[a,b]$是一个具有再生核的 Hilbert 空间,给出了再生核的有限表达式,并构造一个新的插值迭代公式来讨论大范围展开和离散函数的逼近问题.给出了最佳插值逼近算子的解析表达式,研究了一维的第一类、第二类 Fredholm 积分方程与适定和不适定算子方程的求解问题[29]以及最佳数值原函数等问题.张艳英[30]在二维矩形区域 $D=[a,b]\times[a,b]\subset R^2$ 上定义了再生核空间 $W_2^1(D)$,并在其中讨论了多元插值,给出了多元插值公式.在文献[31]中进一步给出了一种计算多元插值迭代公式.

吴勃英[32]给出了再生核空间 $W_2^2(D)$和该空间再生核的近似表达式,在文献[33]中给出了第一类算子方程的近似解.阎玉斌[34]给出了再生核空间 $W_2^1[a,+\infty)$,$W_2^1(-\infty,+\infty)$,并在其上讨论了广义积分方程的精确解.阎玉斌、崔明根又研究了一类算子方程 $Au=f$ 的解的表示[35].李云晖、崔明根[36]进一步在再生核空间 $W_2^1[0,+\infty)$中给出了一类积分微分方程的精确解.文松龙、崔明根[37,38]给出了再生核空间 $W\{[a,b]\times[a,b]\}$及其再生核,并在其上讨论了最佳插值,方程求解等问题.目前,李春利[39]又利用再生核空间的良好性质求解非线性算子方程,并给出其精确解的表示.

再生核技巧与其他方向相结合,产生了许多新的理论和算法.例如在信号处理[40],随机过程处理[41],估计理论[42,43],小波变换[44],reproducing kernel particle method (RKPM)[45~50], the moving least-square reproducing kernel method (MLSRK)[51,52], multiple scale reproducing kernel particle methods[53]有许多应用例子.

本书是作者从 1986 年第一次给出一个具体的再生核空间 $W_2^1[a,b]$的再生核表达式以来有关再生核空间数值分析方面的 17 年工作的总结.开始给这本书起个

"再生核空间数值分析"时觉得书名起得大了一点,但是,后来又觉得这个书名还是名副其实的.其理由之一是本书的题材涉及数值分析的最主要内容:插值问题、数值积分问题、数值泛函问题、积分方程、微分方程、微分-积分方程和一般的算子方程的数值求解问题;其理由之二是在本书中各个问题都是借助于再生核空间的特殊性质和技巧给出了完整的理论体系和算法,并通过大量的实验表明这些算法是有效的.

应当说,再生核空间是研究数值分析的比较理想的空间框架.再生核空间之所以有这样好的数值表现力是因为在这个空间中有一个函数 $R_x(y)$ 使得对固定的 x 和相应的空间中的函数 $u(y)$ 通过内积表现出再生性:$u(x)=(u(y),R_x(y))$,于是对数值分析中最基本的取值运算 $u(x_i)$,也就是说对取值泛涵 $I_i u=u(x_i)$ 有一个连续的表示 $u(x_i)=(u(y),R_{x_i}(y))$.这种离散的取值问题的连续表现形式正是使追求各类数值问题的最佳化成为可能.在此泛函分析工具并不是花架子,而是实实在在的分析工具.不论在建立理论框架,还是在建立数值算法时都离不开它.尤其是共轭算子 A^* 的作用发挥得淋漓尽致,讨论求解方程问题时都要具体的表现共轭算子算法,而再生核空间为实现这种表现提供一个最为理想的框架.

本书第一章列举了再生核空间的主要概念和性质以及基本原理.本书中再生核空间的有关知识只作为一个工具,因此删去了证明.要想进一步了解再生核空间的有关知识,读者可以参考文献[13].

在第二章给出了若干具体的再生核空间.在所有给出的再生核空间中都有具体的再生核表达式.有一些具体的再生核空间放在以后的各章节中,其原因是这些空间是以具体问题做背景的.这样处理的主要目的是使读者领略如何从实际问题构造一个与问题相适应的具体的再生核空间.

在第三章中讨论了数值分析的最基本问题,给出了最佳 Lagrange 插值法和最佳 Hermite 插值法以及最佳曲面插值法.这些插值法均对散乱节点系有一致收敛的特点.不论从经典的理论角度,还是从应用角度,"最佳"这一词是名副其实的.

在第四章中给出了插值迭代法.顾名思义插值迭代法是插值和迭代法相结合的产物,没有什么新意.但是人们知道在 $C[a,b]$ 空间中这两种方法是不能结合的,这是因为在 $C[a,b]$ 空间中没有很好地解决插值法的收敛性问题,因此得不到有应用价值的插值和迭代相结合的算法.然而在再生核空间中,这两种方法可以巧妙地结合成一个好的算法.用所建立的插值迭代法我们可以不用任何导数条件,将连续函数在大范围进行展开.

在第五章中讨论了各类线性积分方程求解问题.我们给出了各类方程精确解的表达式,这些表达式是由级数形式表达的,级数截断就给出近似解.值得一提的是这些近似解随着级数截断项的增加而单调下降,并且方程的右端项 $f(x)$ 以离

散形式$\{f(x_i)\}_{i=1}^{n}$给出时,所构造的这些近似解在节点 x_i 处精确地满足方程.

第六章讨论了微分方程以及积分-微分方程.其中6.2节和6.3节是由具体的应用问题提出来的.第一个应用问题是流体力学中的问题;而第二个应用问题是人口控制问题.这些应用问题在某种侧面上都得到了较好的答案.

在第七章中讨论了再生核空间的若干应用,涉及最佳数值泛函问题、最佳数值原函数问题以及最佳数值积分问题.最佳数值泛函问题是在数值分析中最引人注目的课题,读者读完第一章和2.2节后可以直接阅读这一部分内容.

本书的最后一章讨论了算子方程求解问题.在第五、六章已经讨论了各类具体的算子方程,但是一般的算子方程所要讨论的问题很多,因此算子方程单独列出了一章,以与第五、六章完全不同的方式进一步进行了深入的讨论.侧重讨论了算子方程在不适定条件下解的结构问题.同时我们讨论了在应用上很重要的一类非线性算子方程

$$AuBu + Cu = f$$

其中:A,B,C 是 $W_2^1[a,b]\to W_2^1[a,b]$的有界线性算子.

人们一向认为哪怕是对最简单的非线性方程,精确地将它的解表达出来也是很困难的.但是在再生核空间中,这件事情已经成为可能.本章最后一节给出了上述非线性算子方程的精确解的表达式.

阅读本书需要泛函分析的基础知识,当然,数学分析的基础是必备的.如果读者对数值分析的基本概念有所了解,那就更好了.

本书题材中前期的工作是本书第一作者20世纪80年代在哈工大读博士时形成的.该作者的博士导师章绵教授和吴从炘教授对作者的工作给予诸多的关怀和指导.在80年代本书第一作者博士答辩前对本书题材所做的前期工作,当年作为博士论文由北京大学数学研究所徐献瑜教授、北京应用物理与计算数学研究所周毓麟院士、北京大学沈燮昌教授、北京师范大学孙永生教授、大连理工大学徐利治教授、复旦大学蒋尔雄教授、浙江大学王兴华教授、谢庭藩教授以及西安交通大学游兆永教授等详细评阅过,并提出了很多宝贵意见.

哈尔滨工业大学文松龙教授、哈尔滨工程大学李春利博士、青岛海洋大学谢树森博士、山西师范大学阎玉斌博士、哈尔滨学院李云辉副教授、哈尔滨工业大学张池平副教授为本书提供了大量的素材,特别是哈尔滨理工大学邓中兴教授在20世纪80年代有关再生核空间数值分析的研究工作起步时期一直与作者合作,那个年代的研究工作是作者的后来工作的基础,也是本书的重要组成部分.

自从1986年再生核空间数值分析的工作起步到现在,这些年作者曾先后4次获得国家自然科学基金资助,这些资助对形成本书有重要作用.

这本书出版前后,科学出版社为作者做了大量的工作.

在此,向前面提到的各位学者和有关单位一并表示衷心的感谢.由于作者水平所限,书中不当之处在所难免,请读者批评指正.

崔明根
吴勃英
2003年6月15日
于哈尔滨

目　　录

第一章　再生核理论简介

在本章中,我们将对再生核理论做一些简要的介绍,以求使读者对于再生核理论有一个初步的然而又较系统的了解.由于我们在讨论本书中所涉及的数学问题时,再生核理论是作为工具性的知识出现的,所以我们在介绍再生核理论的主要结果时,基本上采取叙而不证的办法.对于再生核理论本身及其在其他数学分支中应用感兴趣的读者,可以参阅文献[1]~[5].

1.1　再生核的定义及基本性质

1.1.1　再生核的定义

定义 1.1　设 H 是 Hilbert 函数空间,其元素是某个抽象集合 B 上的实值或复值函数.把内积定义为

$$(f,g)=(f(t),g(t))_t \qquad (f、g\in H)$$

设 $K(t,s)$是二元函数,t、$s\in B$.如果对任何 $s\in B$, $K(t,s)$作为 t 的函数是 H 中的元素,而且对任何 $s\in B$ 及 $f\in H$,有

$$f(s)=(f(t),K(t,s))_t$$

则称 $K(t,s)$是 Hilbert 函数空间 H 的再生核.

例 1.1　设 H 是集合 B 上的有限维 Hilbert 函数空间,$\{e_i\}_1^n$ 是 H 的标准正交基,即

$$(e_j(t),e_k(t))=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases} \qquad (j,k=1,2,\cdots,n)$$

证明 $K(t,s)=\sum_{j=1}^{n}e_j(t)\overline{e_j(s)}$ 是 H 的再生核.

证明　事实上,H 的任一元素 f 均可表示成如下形式:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n}a_je_j(t) \qquad (a_j \text{ 是复数})$$

由

$$(f(t),K(t,s))_t=\Big(\sum_{j=1}^{n}a_je_j(t),\sum_{k=1}^{n}e_k(t)\overline{e_k(s)}\Big)_t$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(e_j(t), \sum_{k=1}^{n} e_k(t) \overline{e_k(s)} \right)_t = \sum_{j=1}^{m} a_j \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} e_k(t) \overline{e_k(s)}, e_j(t) \right)_t}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j e_j(s) = f(s)$$

本例得证.

1.1.2 再生核的基本性质

1.(惟一性)如果 Hilbert 函数空间 H 有再生核 $K(t,s)$,则此再生核是惟一的.

2.(存在准则)Hilbert 函数空间 H 有再生核的充分必要条件是:对任一 $s \in B$,$f \to f(s)$ 都是 H 上的有界泛函.

3.设 $K(t,s)$ 是 Hilbert 函数空间 H 的再生核,则

$$\max_{\|f\|=1} |f(t)| = \sqrt{K(t, t)} = \| K(s, t) \|_s$$

这里范数是由内积引入的:$\| \cdot \|_s = (\cdot,\cdot)_s^{\frac{1}{2}}$.

4. 设 Hilbert 函数空间存在再生核 $K(t, s)$,则当 $f_n \to f$(弱)时,必有 $f_n \to f$(逐点);又如果 $K(t, s)$在 $E \subset B$ 上有界,那么 $f_n(t) \to f(t)$(在 E 上一致).

5. 再生核是正定的,即对 $s_1, s_2, \cdots, s_N \in B$ 及复数,$\alpha_1, \cdots, \alpha_N$,总有

$$\sum_i \sum_j K(s_i, s_j) \overline{\alpha_i} \alpha_j \geqslant 0$$

6. 设 $K(t,s)$是 Hilbert 函数空间 H 的再生核,则有

$$K(t, t) \geqslant 0,\ K(t, s) = \overline{K(s, t)}$$

$$|K(t, s)|^2 \leqslant K(s, s) \cdot K(t, t)$$

7. 设函数 $K(t, s)$在抽象集合 B 上是正定的,那么可以构造一个 B 上的 Hilbert 函数空间 H,它以 $K(t, s)$为其再生核.

8. 设 H 是 Hilbert 函数空间,H_1 是其子空间,$K(t, s)$是子空间 H_1 的再生核,$h \in H$,则公式

$$f(s) = (h(t), K(t, s))_t$$

给出 H 中的元素 h 在子空间 H_1 上的投影.

9. 设 $K(t, s)$是 Hilbert 函数空间 H 的再生核,则其所有的闭线性子空间均以 $K(t, s)$为再生核.

10. 设 $K(t, s)$是 Hilbert 函数空间 H 的再生核,$\{g_i\}$是 H 中的正交系,$\{\alpha_i\}$是满足条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$$

的数列,则有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\cdot|g_i(t)|\leqslant K(t,\ t)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.3　再生核的表示

在例 1.1 中我们已经看到,有限维 Hilbert 函数空间 H 的再生核 $K(t,\ s)$ 可以用空间标准正交基 $\{e_j\}_1^n$ 来表示.对于可分的 Hilbert 函数空间来说,也有类似的结论成立.

定理 1.1　设 H 是可分的 Hilbert 函数空间,它有再生核 $K(t,\ s)$, $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$ 是 H 的标准正交基,则

$$K(t,\ s)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t)\overline{\varphi_j(s)}$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K(t,\ s)-\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\overline{\varphi_j(s)}\right\|_t=0$$

1.2　非完备内积空间的函数完备化

对于一个非完备的内积函数空间 H,按照通常的办法,当 H 中的 Cauchy 序列的极限不属于 H 时,我们可以把这个极限当成一个理想的元素加到 H 中去,这样得到一个抽象的 Hilbert 空间 $\widetilde{H}$,它是完备的且 H 在 $\widetilde{H}$ 中是稠密的.但是 $\widetilde{H}$ 已经不是一个函数空间了,而且由于完备化方式的任意性将使函数的值与在空间中收敛这两者之间的连续性遭到破坏.

鉴于上述原因,我们对于非完备的内积函数空间使用函数完备化的方法,即使用附加函数的方法使其完备化,使得完备化以后的空间中的函数 f 在给定点 $s\in B$ 处的值连续仍赖于 f.这样,根据 1.1.2 中再生核存在的准则,知道完备化以后的函数空间必存在再生核.于是函数完备化问题与完备化以后空间再生核的存在性问题变成了一个问题.

能否在实行函数完备化手续之前就判断完备化以后的空间存在再生核?或者如上述,一个非完备的内积函数空间能够实行函数完备化的条件是什么?下面的定理回答了这个问题.

定理 1.2　设 H 是一个非完备的内积函数空间,它能够实行函数完备化的充分必要条件是:

1° 对每个固定的 $s\in B$,定义在 H 中的线性泛函 $f(s)$ 是有界的;

2° 对 H 中的 Cauchy 序列 $\{f_n\}$,条件 $f_n(s)\to 0$(对每个 s)蕴含 $\|f_n\|\to 0$.

如果函数完备化是可能的,则必是惟一的.

1.3 再生核的限制

设 H 是集合 B 上的 Hilbert 函数空间,$K(t, s)$ 是其再生核.已经知道 $K(t, s)$ 在 B 上是正定的,那么当把 t、s 限制在子集 $B_1\subset B$ 上时,$K(t, s)$ 也是正定的,记作 $K_1(t, s)$.根据 1.1.2 中再生核的性质 7,可以构造一个 B_1 上的 Hilbert 函数空间 H_1,它以 $K_1(t, s)$ 为其再生核.下面的定理揭示了 H_1 与 H 的关系.

定理 1.3 设 H 是集合 B 上的 Hilbert 函数空间,$K(t, s)$ 是其再生核,$K(t, s)$ 在子集 $B_1\subset B$ 上的限制记为 $K_1(t, s)$.则由全体 H 中的函数 f 在子集 B_1 上的限制 f_1 所构成的 Hilbert 函数空间 H_1 以 $K_1(t, s)$ 为其再生核.

1.4 再生核的和、差、积及极限

1.4.1 再生核的和

设 H_1 和 H_2 是同一集合 B 上的两个 Hilbert 函数空间,它们的范数分别记作 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$.又设 $K_1(t, s)$ 与 $K_2(t, s)$ 分别是 H_1 与 H_2 的再生核,由于 $K_1(t, s)$ 与 $K_2(t, s)$ 都在 B 上是正定的,因此 $K(t, s)=K_1(t, s)+K_2(t, s)$ 也在 B 上是正定的.根据 1.1.2 中的性质 7,可以构造一个 B 上的 Hilbert 函数空间 H,它以 $K(t, s)$ 为其再生核.下面的定理揭示了 H 与 H_1、H_2 的关系.

定理 1.4 设 $K_1(t, s)$ 与 $K_2(t, s)$ 分别是上述 Hilbert 函数空间 H_1、H_2 的再生核,那么 $K_1(t, s)+K_2(t, s)$ 是所有形如 $f=f_1+f_2$ $(f_1\in H_1,\ f_2\in H_2)$ 的函数所形成的 Hilbert 函数空间 H 的再生核,其范数由下式定义:

$$\|f\|^2 = \min\{\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2\}$$

其中极小值是对于一切分解 $f=f_1+f_2 \quad (f_1\in H_1,\ f_2\in H_2)$ 而取的.

我们指出,这个定理可以推广到

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t, s)$$

的情形.

1.4.2 再生核的差

设 $K_1(t, s)$ 与 $K(t, s)$ 都是在 B 上正定的,如果差