高等結構學

楊振輝 編著

正言出版社印行

高等結構學

楊 振 輝 著

正言出版社印行

目　　錄

第一章　柱比分析法

第二章　傾度變位法

第三章　力矩分配法

第四章　多層高屋架之分析

第五章　三力矩定理

第六章　聯梁之定點圖解法

等截面聯梁

不等截面聯梁

第七章 聯架（附彈性硬接支柱之聯梁）之定點圖解法

等截面聯架

不等截面聯架

第八章 實用係數表

第一章

柱比分析法

(1·1) 引言

美國 Hardy Cross 教授介紹分析剛構之柱比法 ❶，甚爲新奇別緻. Cross 氏對柱比法原理之解釋如下:

柱比法乃梁架或拱因連續性所引起之力矩與短柱受偏心壓力所引起之應力，在算式上的一種巧合.其原文爲:The column analogy is a mathematical identity between the moments produced by continuity in beam, bent or arch and the fiber stresses in a short column eccentrically loaded. 因計算柱應力公式,久爲設計者所稔習,故柱比法之概念及應用,較諸他法易於聆解醒目;彼對不等截面之結構及較複雜之荷重，尤顯其方便之處. 但此法祗適用於單孔的靜不定結構,其贅餘值以三個爲最多限.故此法的單獨用途並不太廣,惟在"力矩分配法" 中是一個很重要的輔助工具 ❷.

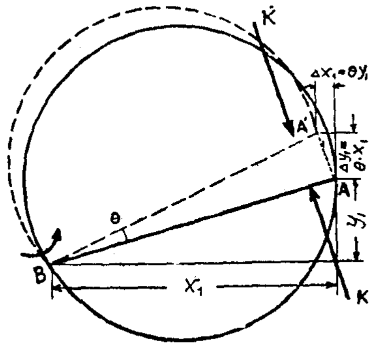
(1·2) 柱比公式之導立

(1·1) 圖示一任意截面及任意彎度之閉合環,承負平面作用力. 此乃一種特殊之不定式結構,但本質上仍與雙嵌端環拱同義.蓋雙嵌端環拱在嵌支點以下之部分(基層),可視爲閉合環之一部分,惟其 EI 屬無限大. 由此關係,故本法之應用可以推廣矣.

茲設割破環之 A 點,於 B 點作用一力矩,引起上半環之相對轉動,如圖示虛線之位置,並假設下半環持定不動,上部 A 點移至 A'.因 θ 角通常極小,故 $A-A'$ 可視

❶ 公開發表於美國 Illinois 大學工程研究報告中."The Column Analogy," by Hardy Cross, Bul.215, Eng. Exp. Sta. Univ. ILL., 1930.

❷ 見本書"力矩分配法",利用柱比法以計算桿件之"定端力矩、硬度、傳遞係數".



1·1 圖

爲垂直於 BA，由相似三角形得：

$$\Delta y_1 : A\text{-}A' = x_1 : B\text{-}A$$

或 $$\Delta y_1 = \frac{A\text{-}A'}{B\text{-}A} \cdot x_1 = \theta \cdot x_1$$

同理 $\Delta x_1 = \theta \cdot y_1$

但實際上因環的連續性，任一假定裂口之兩截面間不容有角變度存在，亦不容有相對的橫平及豎直移動產生.故添置K力，使A'重貼於A，意卽K力須具此大度，彼能引起自A至A'間之總扭轉適等於反向之θ且使A'推回反向橫平移動$\theta \cdot y_1$及豎直移動$\theta \cdot x_1$. 此項移動量，可用由K力所起之環應力——力矩剪力及縱力——表示之.惟以由剪力及縱力所生之變形，較爲微小，故略之，而祇計由彎曲力矩所引起者. 且以環弧之半徑常較斷面之尺寸爲殊大，故仍可按直桿計算應力. 由靜不定力K產生於某一斷面之力矩爲M_1，則斷面左右兩切線之相對旋角卽等於$\frac{M_1\,ds}{EI}$，或亦卽割破之環，相對的轉回 $\frac{M_1\,ds}{EI}$，A'端橫平移回$\frac{M_1\,ds}{EI}\,y$，豎直移回$\frac{M_1\,ds}{EI}\,x$. $x\,y$爲該斷面對A點之座標. 故靜不定力K所起之總變形，當由前列各值沿整個環弧積分而得，且適等於割破A點，B點作用外力矩時所致變形之反號値：

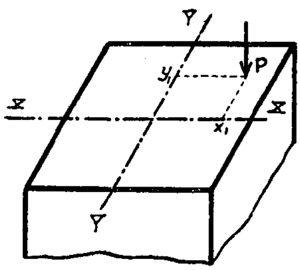
(1) 旋角 $$\int \frac{M_1\,ds}{EI} = -\theta$$

(2) 橫平移動 $$\int \frac{M_1\,ds}{EI} y = -\theta \cdot y_1$$

(3) 豎直移動 $$\int \frac{M_1\,ds}{EI} x = -\theta \cdot x_1$$

檢討受偏心壓力P的短柱如(1·2)圖，設應力之分佈按座標距離 $x\,y$ 呈直線性.此自由體頂面所受P力必與頂面下之應力相持平衡：應 $\Sigma V = 0$，$\Sigma M_x = 0$，$\Sigma M_x = 0$. 假取一微分面dF，其座標爲$x\,y$，該處之應力爲σ，則得平衡式：

$$\int \sigma \cdot dF = -P \qquad \int \sigma \cdot dF \cdot y = -P \cdot y_1 \qquad \int \sigma \cdot dF \cdot x = -P \cdot x_1$$



1·2 圖

此三式與前列計算變形之(1)(2)(3)三式完全相似．M_1相當於σ，$\frac{ds}{EI}$相當於dF，及θ相當於P．故可循相同的算式計算．根據力學計算柱應力之主要公式爲：

$$\sigma=\frac{P}{F}+\frac{M_x\ c_x}{I_x}+\frac{M_y\cdot c_y}{I_y}$$

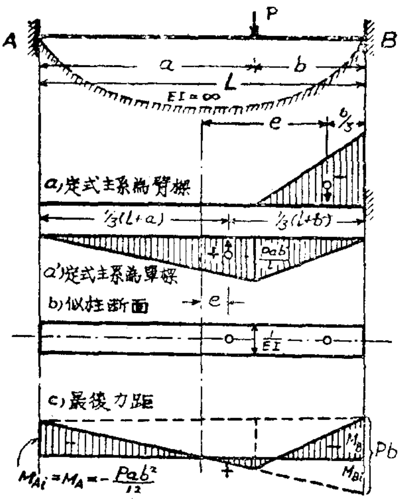
σ爲柱之邊緣應力，c_x c_y爲外緣某點之座標．X Y爲柱截面之二主軸，指數x y示明距離或力矩對何軸而言．故環於某點之靜不定力矩，可依照柱之邊緣應力計算，一如由壓力θ所起．柱之截面卽爲環拱，惟任一處之厚度爲$\frac{1}{EI}$（E爲環料之彈性係數，I爲該處原斷面之惰性力矩），此乃柱比法中之虛構柱，定名爲似柱，以資區別．任意一點之眞正力矩，卽爲算得之靜不定力矩M_1及該處由外力所起之靜定力矩M_0之和．

若以普通之力荷重代替前敍之力矩荷重，環上作用相持平衡的外力，割破後，由此外力引起於環內之靜定力矩爲M_0．某斷面因M_0發生之扭轉爲$\frac{M_0\cdot ds}{EI}$，沿環之扭轉總值及A'對A之移動分量可由積分而得．其方向與靜不定力矩所起者相反，前列之(1)(2)(3)三式可以$\int\frac{M_0ds}{EI}=\theta$，$\int\frac{M_0y}{EI}ds=\theta\cdot y_1$，$\int\frac{M_0x}{EI}\ ds=\theta\cdot x_1$分別代之！故似柱之荷重顯然卽爲$\frac{M_0}{EI}$面．$M_0$爲割破環拱成爲定式系統後由載重算得之力矩．

(1·3) 柱比法於嵌端梁之應用

(1·3)圖等截面嵌端梁，負有一集力P，用柱比法分析其力矩，藉以說明工作步驟．

切破環於A端，則得一定式臂梁，其力矩線示如(a)．似柱之斷面示如(b)，長爲L，寬爲$\frac{1}{EI}$．致AB兩點以下部份之似柱斷面則爲零，不能出現，蓋以$EI=\infty$故也．靜定力矩面$=\frac{1}{2}P\cdot b^2$，似柱之荷重$=\frac{Pb^2}{2EI}$，偏心距離$e=\frac{L}{2}-\frac{b}{3}$，似柱之面積$F=\frac{L}{EI}$，似柱惰矩$I=\frac{L^3}{12EI}$，似柱$AB$兩端與中線之距離爲$c=\frac{L}{2}$，



1·3 圖

A 點之靜不定力矩即等於眞正力矩，亦即為似柱受偏心荷重[illegible]邊緣之應力:

$$M_A=M_{Ai}=\frac{P}{F}-\frac{P\cdot e\cdot c}{I}$$

$$M_A=\frac{Pb^2/2EI}{L/EI}$$

$$-\frac{(Pb^2/2EI)(L/2-b/3)(L/2)}{L^3/12EI}$$

$$=\frac{Pb^2}{2L}-\frac{3Pb^2}{2L}+\frac{Pb^3}{L^2}$$

$$=\frac{Pb^2}{L}\left(\frac{b}{L}-1\right)$$

$$=-\frac{Pab^2}{L^2}$$

B 點之靜不定力矩:

$$M_{Bi}=\frac{P}{F}+\frac{P\cdot e\cdot c}{I}$$

$$=\frac{Pb^2}{2L}+\frac{3Pb^2}{2L}-\frac{Pb^3}{L^2}=\frac{2Pb^2}{L}-\frac{Pb^3}{L^2}$$

B 點之眞正力矩則由靜不定力矩 M_{Bi} 及定式主系之力矩 M_{B0} 相併而得

$$M_B=-Pb+M_{Bi}=-\frac{Pa^2b}{L^2}$$

最後力矩線示如(c)圖.

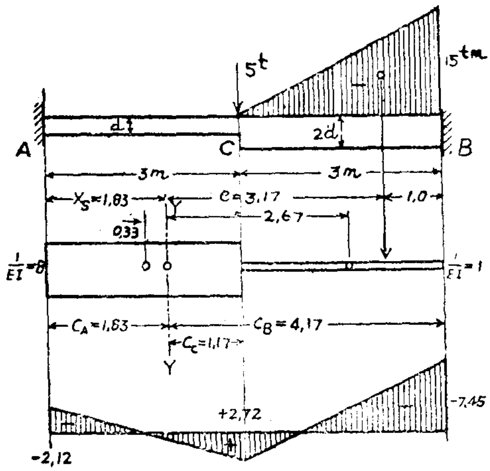
向號規律: 割破 A 端後,臂梁之 $\frac{1}{EI}$ 倍負號力矩面，可視為似柱之向下作用力，即壓力是也.由其偏心距之方位,即知 A 緣之應力為拉力，B 緣為壓力.按照圬工材料之應力向號,壓應力為正，拉應力為負. 由是得 A 端之靜不定力矩 M_{Ai} 為負，B 端之 M_{Bi} 為正.

柱比法之計算推演,祗須將環變為定式主系. 選取定式主系之法不一，或除去擱支條件,或添置鉸鏈點. 如(a') 圖則用簡支梁為定式主系,以解除 AB 兩端之嵌固情況. 似柱之截面仍與前同. 因定式主系之力矩面為正，故似柱之荷重為拉力(－).此時 AB 兩端之眞正力矩均等於其靜不定力矩.茲分析之如下:

$$M_A=M_{Ai}=-\frac{P}{F}+\frac{Pec}{I}\qquad M_B=M_{Bi}=-\frac{P}{F}-\frac{Pec}{I}$$

代入荷重 $=Pab/2EI$; $F=L/EI$, $e=\frac{L}{2}-\frac{L+b}{3}$, $c=L/2$ 及 $I=L^3/12EI$

解得與前相同之結果 $M_A=M_{Ai}=-\frac{Pab^2}{L^2}$, $\qquad M_B=M_{Bi}=-\frac{Pab^2}{L^2}$.



1.4 圖

同理計算 (1·4) 圖之不等截面雙嵌支梁,因祇需 $\frac{ds}{EI}$ 之相對值,故毋須知道梁截面之實在高度。設梁高等於 $2d$ 部分之似柱寬度爲 $\frac{1}{EI}=1$,則梁高等於 d 部分之似柱寬度應爲 $\frac{1}{EI}=8$,蓋以 I 與 d^3 成正比例故也。

似柱之斷面:

$$F=8\times3+1\times3=27$$

重心距 $\qquad x_s=\frac{24\times1.5+3\times4.5}{27}=\frac{49.5}{27}=1.83\,m$ (離 A 端)

惰性力矩 $\qquad I_y=\frac{1\times3^3}{12}+1\times3\times2.67^2+\frac{8\times3^3}{12}+8\times3\times0.33^2$

$$=2.25+21.39+18.0+2.61=44.25$$

似柱荷重 $\qquad P=\frac{15\times3}{2EI}=22.5\qquad\left(2d \text{ 部分之 } \frac{1}{EI}=1\right)$

偏心力矩 $\qquad M_y=22.5\times3.17=71.3$

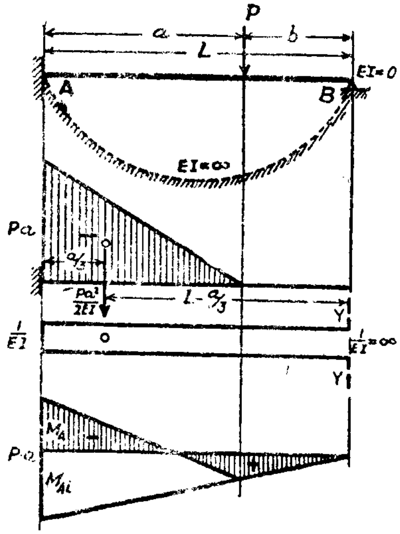
$$M_A=\frac{22.5}{27}-\frac{71.3}{44.25}\times1.83\qquad=0.833-2.95\qquad=-2.12\,tm$$

$$M_C=\frac{22.5}{27}+\frac{71.3}{44.25}\times1.17\qquad=0.833+1.887\qquad=+2.72\,tm$$

$$\left(=\frac{M_{Ai}+M_{Bi}}{2}\right)$$

$$M_B=\frac{22.5}{27}+\frac{71.3}{44.25}\times4.17-15.0=0.833+6.717-15=-7.45\,tm$$

應用此法亦可計算(1·5)圖之平梁，A 端嵌支，B端鏈支(即簡支)．AB 平梁可視爲環之一部分，其剛度以 EI 表之．AB 以下部分之剛度爲無限大，此無限大剛度之半環，與平梁硬接於 A 點，鏈接於 B 點，因鉸鏈毫無剛度，故 B 點之 $EI=0$．或亦得似柱於 B 點之寬度 $\frac{1}{EI}=\infty$。因得似柱之總斷面亦爲 ∞ 大．其縱向重心線即在截面 ∞ 寬之 B 點．對此縱軸之 $I_y=L^3/3EI$ A 點離重心軸之 $c=L$．故得 A 點之靜不定力矩：



1·5 圖

$$M_{Ai}=\frac{Pa^2/2EI\left(L-\frac{a}{3}\right)}{L^3/3EI}L$$

$$=\frac{3}{2}\frac{Pa^2}{L}-\frac{Pa^3}{2L^2}$$

最後力矩：

$$M_A=-Pa+M_{Ai}=-Pa+\frac{3}{2}\frac{Pa^2}{L}-\frac{Pa^3}{2L^2}$$

$$=-\frac{Pa}{L^2}\left(L^2-\frac{3}{2}aL+\frac{a^2}{2}\right)=-\frac{Pa}{L^2}\left[L^2-aL-\frac{1}{2}(aL-a^2)\right]$$

$$=-\frac{Pa}{L^2}\left[L(L-a)-\frac{1}{2}a(L-a)\right]=-\frac{Pa}{L^2}\cdot b\left(L-\frac{a}{2}\right)$$

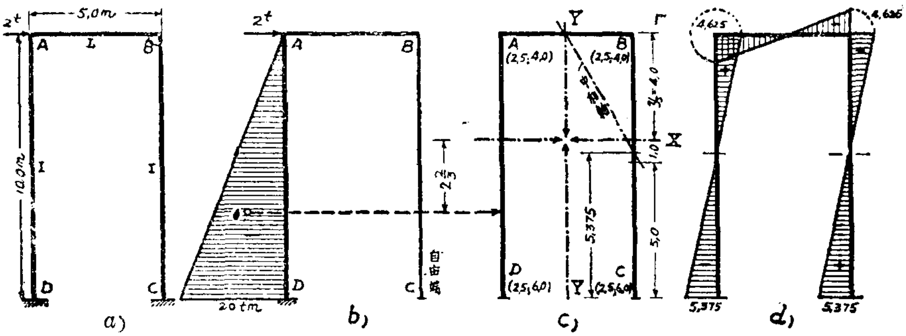
$$=-\frac{Pab}{L^2}\left(b+\frac{a}{2}\right)$$

(1·4) 柱比法於剛架之應用

茲應用柱比法以分析剛架，以(1·6)圖爲例示其手續如後：

割破 C 端，得定式主系如(b)圖．因各桿之EI 相同，在最後結果中互相可以對消，故可假定 $EI=1$，得(c)圖之似柱寬度 $\frac{1}{EI}=1$．

似柱之荷重　　$P=\frac{1}{2}\times20\times10=100$



1.6 圖

似柱之斷面 $F=1(10+10+5)=25$

重心距 $y_s=\dfrac{2\times10\times5}{25}=4.0\,m$

惰性力矩：

$$
I_X\quad
\begin{array}{r}
2\times\frac{1}{12}\times1\times10^3=166.7\\
2\times1\times10\times\ 1^2=\ \ 20.0\\
1\times\ 5\times\ 4^2=\ \ 80.0\\
\hline
266.7
\end{array}
\qquad
I_y\quad
\begin{array}{r}
\frac{1}{12}\times1\times5^3=\ \ 10.4\\
2\times1\times10\times2.5^2=125.0\\
\hline
135.4
\end{array}
$$

設 $DABC$ 四點之座標爲 $x\ y$，得其靜不定力矩之公式：

$$M_i=\frac{100}{25}\pm\frac{100\times2\frac{2}{3}}{266.7}y\pm\frac{100\times2.5}{135.4}x$$

$$M_i=4.0\pm1.0\,y\pm1.85\,x$$

$$M_{Di}=4.0+1\times6.0+1.85\times2.5=4.0+6.0+4.625=+14.625$$

$$M_D=-20+14.625=-5.375\,tm$$

$$M_{Ai}=4.0-1\times4.0+1.85\times2.5=4.0-4.0+4.625=+\ 4.625$$

$$M_A=M_{Ai}\qquad=+4.625\,tm$$

$$M_{Bi}=4.0-1\times4.0-1.85\times2.5=4.0-4.0-4.625=-\ 4.625$$

$$M_B=M_{Bi}\qquad=-4.625\,tm$$

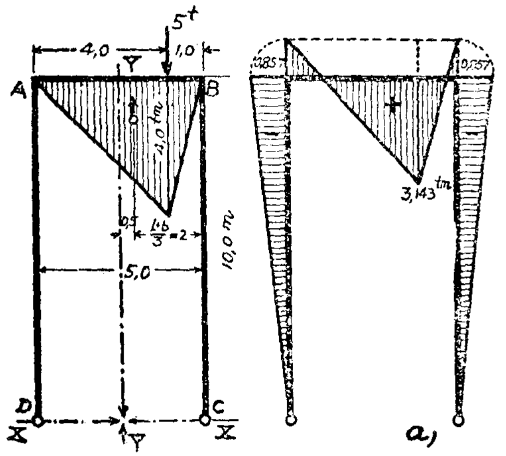
$$M_{Ci}=4.0+1\times6.0-1.85\times2.5=4.0+6.0-4.625=+\ 5.375$$

$$M_C=M_{Ci}\qquad=+5.375\,tm$$

四角之靜不定力矩，視如柱之邊線應力，則得中和軸或應力零綫示如(c)圖，每

點由靜不定力所起之力矩，即等於靜不定力乘以對該點之垂直距離，故中和軸即示靜不定力之作用線．因 BC 桿上之靜不定力矩即符合真正力矩，故似柱中和軸與 BC 桿之交點，亦即該桿真正彎曲轉向點．

以(1·7)圖之等截面雙鉸鏈剛架，示此法之應用如後．除去一端之横平支承，易以動支，則得一定式簡支架爲主系，其靜力矩如圖示爲一三角形．DC 以上部份，似柱之寬度爲 $\frac{1}{EI}$．但 DC 兩點因屬鉸鏈點，故該處似柱寬度 $=\infty$．因此得似柱之總面積 $F=\infty$，似柱截面之 Y 軸仍符合剛架之對稱豎軸．X 軸則落於似柱寬度爲 ∞ 大之 DC 基線上．



1·7 圖

似柱截面積 $F=\infty$

似柱荷重 $\quad P=\frac{-4\times5}{2EI}=-\frac{10}{EI}$

偏心距離 $\qquad e_x=10 \qquad e_y=0.5$

似柱之 I: $\quad I_x \quad 2\times\frac{1}{EI}\times\frac{10^3}{3}=666.7/EI$

$$\frac{1}{EI}\times5\times10^2=500\ /EI$$

$$1166.7/EI$$

$I_y=\infty$

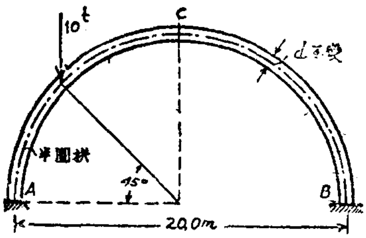
$$M_{Ai}=M_{Bi}=M_A=M_B=\frac{P\ e_x}{I_x}\ c=\frac{-\frac{10}{EI}\times10}{1166.7/EI}\,10=-0.857\ tm$$

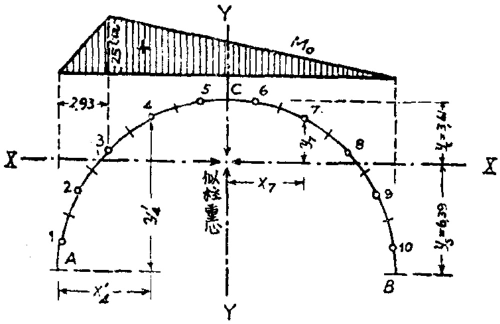
最後力矩線示如(a)圖．

(1·5) 柱比法於環拱之應用

(1·8)圖示一半圓形環拱，其截面不變，於 $\frac{1}{4}$ 拱圈點作用 $10t$ 之豎直集力，試按

柱比法解其應力.分析時將拱變爲簡支式,其 M_0 面如圖示.玆分拱爲等長十段,每段長 3.14 m. 似柱每段面積 $\frac{\Delta s}{EI}$ 設爲 1,因以下計算應力式中各項之分子分母均含有此值.故 $\frac{\Delta s}{EI}$ 爲常數時,可用其臆定之相對值以代替絕對值.





1·8 圖

似柱之斷面值及荷重,列表計算如下:

點號	似柱斷面 $\Delta s/EI$	對 A 點之座標 x'	y'	對似柱重心之座標 x	y	I_y x^2	I_x y^2	似柱荷重 M_0	對 Y 軸之偏心力矩 $M_0 \cdot x$	對 X 軸之偏心力矩 $M_0 \cdot y$	附註
1	1	0.12	1.56	−9.88	−4.83	97.6	23.3	1.2	− 11.9	− 5.8	十等分,
2	1	1.09	4.54	−8.91	−1.85	79.4	3.4	9.3	− 82.8	− 17.2	$\Delta S = 3.14$
3	1	2.93	7.07	−7.07	+0.68	50.0	0.5	25.0	−176.7	+ 17.0	設似柱寬
4	1	5.46	8.91	−4.54	+2.52	20.6	6.4	21.3	− 96.6	+ 51.9	$\frac{1}{EI} = \frac{1}{3.14}$
5	1	8.44	9.88	−1.56	+3.49	2.4	12.2	16.9	− 25.4	+ 57.0	
6	1	11.56	9.88	+1.56	+3.49	2.4	12.2	12.4	+ 19.3	+ 43.3	
7	1	14.54	8.91	+4.54	+2.52	20.6	6.4	8.0	+ 36.3	+ 20.2	
8	1	17.07	7.07	+7.07	+0.68	50.0	0.5	4.3	+ 30.4	+ 3.9	
9	1	18.91	4.54	+8.91	−1.85	79.4	3.4	1.6	+ 14.2	− 3.5	
10	1	19.88	1.56	+9.88	−4.83	97.6	23.3	0.2	+ 2.0	− 1.0	
Σ	10	100.00	63.92	0	~0	500.0	91.6	100.2	−291.2	+165.8	

似柱重心軸離 AB 基線之高度 $y_s = \frac{63.92}{10} = 6.39\ m$

最後力矩之計算如下：

$$M_A = M_{Ai} = -\frac{100.2}{10} - \frac{291.2}{500}\times 10 + \frac{165.8}{91.6}\times 6.39$$

$$= -10.02 - 5.82 + 11.53 = -4.31\, tm$$

$$M_B = M_{Bi} = -\frac{100.2}{10} + \frac{291.2}{500}\times 10 + \frac{165.8}{91.6}\times 6.39$$

$$= -10.02 + 5.82 + 11.53 = +7.33\, tm$$

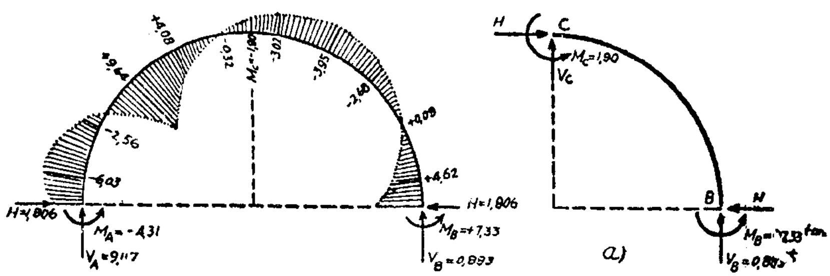
$$M_C = M_{C0} + M_{Ci} = 14.65 - \frac{100.2}{10} - \frac{291.2}{500}\times 0 - \frac{165.8}{91.6}\times 3.61$$

$$= 14.65 - 10.02 - 6.53 = -1.90\, tm \quad \left(M_{C0} = \frac{M_{80}}{17.07} 10 = 14.65 \right)$$

$$M_8 = M_{80} + M_{8i} = 25.0 - \frac{100.2}{10} - \frac{291.2}{500}\times 7.07 - \frac{165.8}{91.6}\times 0.68$$

$$= 25 - 10.02 - 4.11 - 1.23 = +9.64\, tm$$

其餘各點均可如法求其力矩，最後力矩線示如(1·9)圖。



1·9 圖

計算 A 端豎直力時，可按 B 端立力矩平衡式 $\Sigma_B M = 0$：

$$V_A \times 20 - 10\times 17.07 - 4.31 - 7.33 = 0$$

$$V_A = \frac{1}{20}(170.7 + 4.31 + 7.33) = \frac{1}{20}182.34 = +9.117\, t$$

由 $\Sigma V = 0$ $\qquad V_B = 10 - V_A = 10 - 9.117 = +0.883\, t$

計算橫平推力時，可切取右半拱如(1·9)圖(a)，立 C 點力矩公式：

$$M_C = -1.90 = V_B \times 10 + M_B - H_B \times 10$$

$$H_B = \frac{1}{10}(1.9 + 8.83 + 7.33) = \frac{1}{10}18.06 = +1.806\, t$$