北京市高等教育精品教材立项项目

北京大学数学教学系列丛书

本科生

数学基础课教材

测度论与概率论基础

程士宏　编著

北京大学出版社

北京市高等教育精品教

北京大学数学教学系列丛书

测度论与概率论基础

程士宏　编著

北京大学出版社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

测度论与概率论基础/程士宏编著.—北京:北京大学出版社,2004.2

(北京大学数学教学系列丛书)

(北京市高等教育精品教材立项项目)

ISBN 7-301-06345-8

Ⅰ.测… Ⅱ.程… Ⅲ.①测度论-高等学校-教材 ②概率论-高等学校-教材 Ⅳ.①O174.12 ②O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 044278 号

书　　名: 测度论与概率论基础

著作责任者: 程士宏　编著

责 任 编 辑: 刘　勇

标 准 书 号: ISBN 7-301-06345-8/O·0568

出　版　者: 北京大学出版社

地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址: http://cbs.pku.edu.cn

电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021

电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排　版　者: 北京高新特打字服务社　51736661

印　刷　者: 北京大学印刷厂

发　行　者: 北京大学出版社

经　销　者: 新华书店

890 毫米×1240 毫米　A5　8 印张　230 千字

2004 年 2 月第 1 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

印　　数: 0001—4000 册

定　　价: 15.00 元

内容简介

本书为高等院校概率统计系本科生“测度论与概率论基础”课程的教材。测度论内容旨在“短平快”地为初等概率论与公理化的概率论之间搭起一座桥梁。本书通过精选在抽象分析中为建立概率论公理化系统所必需的测度论内容，在此基础上，着重讲述那些在初等概率论中没有解释清楚或不可能解释清楚的概念和公式。全书共分六章，内容包括：可测空间和可测函数、测度空间、积分、符号测度、乘积空间、独立随机变量序列等。本书选材少而精，叙述由浅入深，通俗易懂，难点分散，论证严谨。为了满足非数学专业出身而又必须学习公理化概率论的读者的需要，本书对于概念的解释和定理的证明都尽量做得精细，使之便于自学。每章配有适量习题，书末给出大部分习题的解答或提示。

本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校数学系、概率统计系本科生和研究生的教材，也可作为从事经济学和金融学的研究生和科技工作者的参考书。本书是大学生学习“高等概率论”、“高等统计学”和“随机过程”等课程之前的必修内容。

作者简介

程士宏　北京大学数学科学学院教授、博士生导师，1963 年毕业于北京大学数学力学系，长期从事概率论和数理统计的教学科研工作，主要研究方向是概率论的极限定理和极值理论。

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合，我们进行了有组织的教材建设。计划自1999年起用8年的时间修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　言

若干年来，我多次担任北京大学概率统计系本科生测度论及相关课程的教学工作。几经改革，最后确定下来这门本科生课程的安排是每周 3 学时，一个学期讲完，总计约 54 个学时。1996 年，在积累起来的讲稿的基础上，我应命编写了一份《测度论讲义》，后来上这门课的同志都把它当作教材使用；来北京大学攻读概率统计硕士学位的同学们往往在本科生阶段没有学过测度论，这样，在学习高等概率论、高等统计学和随机过程等课程之前，就需要用尽可能短的时间把测度论的知识补上，因而这些同学也使用这份讲义；听测度论课的同志除了数学学院的同学外，还有北大其他院系，甚至外校的学生，他们自然也接触过这份讲义；另外，我还为北京大学光华管理学院开过高等概率论课，以该讲义作为参考资料。目前本书就是在《测度论讲义》的基础上，吸取了使用过该讲义同志们的意见经过补充编写而成的。

有过一定数学基本训练的同志在学习初等概率论的时候，常有一种"不过瘾"的感觉，其原因是在那里许多基本概念都没有严格定义，许多定理也没有严格的证明。从事经济学和金融学的同学在谈到他们阅读专业文献的时候，也常常发现他们学过的概率论和文献中的概率论有点"不一样"。这说明在初等概率论和公理化的概率论之间搭起一座桥梁是十分必要的。这座桥梁就是测度论。我们希望通过本书"短平快"地建立起这座桥梁。作为一门专业基础课，学生必须学习到基本的知识，接受到基本的训练。因此，为了"短平快"而损害数学的严格性是不可取的，只能在选材少而精的原则上下功夫。本书内容的测度论方面将只牵涉到抽象分析中那些建立概率论公理化系统所必需的内容。在此基础上，着重解释那些在初等概率论中没有解释清楚或不可能解释清楚的概念和公式。所以，本书最后定名为《测度论与概率论基础》。

测度论是实变函数论的提高和抽象。因此，我们常常提到测度论和实变函数概念和方法之间的一些联系。但是这并不意味着实变函数的知识是学习本课程的前提。本书内容的安排完全是自成体系的。只不过对于学过实变函数的同志，这样做有助于加深他们对课程内容的理解。

一本数学书什么地方应该写得简略些，什么地方应该详细些，从来都是很难掌握的。为了便于自学，也为了满足那些非数学专业出身而又必须学习公理化概率论的同志们的需要，本书对于概念的解释和定理的证明，都尽量做得细致一些。每一章的后面都留有一些习题。这些习题的目的也是为了加深对概念的理解和对基本方法的掌握。虽然附录中提供了题目的答案，但我们还是希望同学们能撇开它们而独立地去解答。

从使用《测度论讲义》的实际情况看，按照前面所说的教学安排，一个学期讲完没有 * 号的章节是不成问题的。如果时间不够的话，带 * 号的章节可以作为自学或介绍性质的材料。众所周知，独立随机变量序列的经典理论在初等概率论中是提不清楚，更不可能进行讨论的。读一读带 * 号的第六章，至少可以使同学们了解：公理化的概率论的建立为概率论研究的广度和深度提供了新的前景。

陈家鼎同志和我交替地开过测度论的有关课程。我们曾多次讨论过课程的基本内容。本书吸取了他的许多宝贵建议。在审阅书稿以后，他又提出了不少具体修改意见。在此表示衷心的感谢。在制作习题解答的过程中，还得到了周晨同学的帮助。

在本书的编写过程中，参考了下列著作：

P. R. Halmos, Measure Theory, van Nostrand, 1950。

严士健、王隽骧、刘秀芳，概率论基础，科学出版社，1982。

P. Billingsley, Probability and Measure, John Wiley & Sons, 1986。

汪嘉冈，现代概率论基础，复旦大学出版社，1988。

R. M. Dudley, Real Analysis and Probability, Wadsworth & Brooks, 1989。

严加安，测度论讲义，科学出版社，2000。

虽然编写本书的想法也许是好的，而且本书的原形《测度论讲义》也经过几度的实践，但是由于作者的水平限制，缺点、错误定然不少，敬请读者批评指正。

程士宏

2004年元月于北大燕北园

目　　录

第一章　可测空间和可测映射

简而言之，测度论可以理解为在抽象空间建立类似于实变函数中测度、积分和导数那样的分析系统。因此，首先要简单回忆一下集合的基本运算，并讨论抽象空间中的可测集和可测函数等最基本的概念。

§1　集合及其运算

考虑一个任意非空集合 X，称之为**空间**. X 的子集以大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 等记之，称之为这个空间的**集合**. 空集记为 $\varnothing$. X 的成员称为**元素**. 元素 x 属于集合 A，记作 $x\in A$；反之，元素 x 不属于集合 A，则用记号 $x\notin A$ 来表示. 空间 X 上定义的实函数

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

称为 A 的**指示函数**. 集合

$$A^c\xlongequal{\text{def}}\{x:\ x\notin A\}$$

称为集合 A 的**余**. 如果

$$x\in A\Longrightarrow x\in B,$$

则说集合 A **被集合** B **包含**，或集合 B **包含**集合 A，或 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A **等于**集合 B，记为 $A=B$.

给定集合 A 和 B，集合

$$A\cup B\xlongequal{\text{def}}\{x:\ x\in A\text{ 或 }x\in B\},$$

$$A\cap B\xlongequal{\text{def}}\{x:\ x\in A\text{ 且 }x\in B\},$$

$$A\backslash B\xlongequal{\text{def}}\{x:\ x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

和

$$A\Delta B \xlongequal{\text{def}} (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

分别称为集合 A 和 B 的**并**,**交**,**差**和**对称差**. 如 $B\subset A$,则 $A\backslash B$ 也称为 A 和 B 的**真差**. 集合的并和交的运算满足**交换律**和**结合律**,还满足下面两个**分配律**:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

两个集合 A 和 B 如满足 $A\cap B=\varnothing$,称它们为**不交的**.

并和交的概念和运算规则可以推广到任意多个集合的情形. 对于一族集合 $\{A_t, t\in T\}$ (T 表示一个集合,它的元素用 t 表示. $\{A_t,t\in T\}$ 意味着每一个 T 中的元素 t,都对应着 X 中的一个集合 A_t),集合

$$\bigcup_{t\in T} A_t \xlongequal{\text{def}} \{x: \exists\, t \in T \text{ 使 } x \in A_t\}$$

称为它们的**并**;集合

$$\bigcap_{t\in T} A_t \xlongequal{\text{def}} \{x: x \in A_t, \forall\, t \in T\}$$

称为它们的**交**. 如果对任何 $s,t\in T$,均有 $A_s\cap A_t=\varnothing$,那么称这族集合 $\{A_t,t\in T\}$ 是**两两不交的**. 注意,反映并和交运算之间关系的有下列的 De-Morgan 法则:

$$\left\{\bigcup_{t\in T} A_t\right\}^c = \bigcap_{t\in T} A_t^c; \quad \left\{\bigcap_{t\in T} A_t\right\}^c = \bigcup_{t\in T} A_t^c.$$

设 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一个集合序列. 如果对每个 $n=1,2,\cdots$,有

$$A_n \subset A_{n+1},$$

则称 A_n 为**非降**的,记为 $A_n\uparrow$,并把集合 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \xlongequal{\text{def}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 叫做它的**极限**;如果对每个 $n=1,2,\cdots$,有

$$A_n \supset A_{n+1},$$

则称 A_n 为**非增**的,记为 $A_n\downarrow$,并称 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \xlongequal{\text{def}} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为它的**极限**. 非降或非增的集合序列统称为**单调序列**. 因此,**单调集合序列总有极限**. 对于任意给定的一个集合序列 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$,集合序列

$\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, n=1,2,\cdots\right\}$ 和 $\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, n=1,2,\cdots\right\}$ 分别是非降和非增的，因而分别有极限

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ 和 } \limsup_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=\!=} \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

我们将把 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 分别叫做 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 的**下极限**和**上极限**. 显然，记号 $x\in\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 意味着元素 x 属于序列 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 中的无穷多个集合，而记号 $x\in\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 则表明除去 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 中的有限个集合外，元素 x 属于该序列的其余集合. 于是我们有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

如果 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$，我们将认为 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 的**极限存在**，并把

$$\lim_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=\!=} \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

称为它的**极限**.

§2 集 合 系

以空间 X 中的一些集合为元素组成的集合称为 X 上的**集合系**. 换句话说，集合组成的集合就是集合系. 集合系一般用花体字母 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\cdots$ 来表示. 为什么不仅要讨论集合，还要讨论集合系呢？道理和实变函数中的情形一样：为了建立测度，必须确定出一些**可测集**，而这些可测集的全体就组成了一个集合系. 下面，我们就给出在抽象空间确定可测集时所必须引进的一些特殊集合系.

π 系：如果 X 上的非空集合系 $\mathscr{P}$ 对交的运算是**封闭的**，即

$$A,B\in\mathscr{P} \Longrightarrow A\cap B\in\mathscr{P},$$

则称 $\mathscr{P}$ 为 π **系**.

例 1 以 $\boldsymbol{R}$ 记全体实数组成的集合，对任何 $a\in\boldsymbol{R}$，令

$$(-\infty,a]=\{x\in\boldsymbol{R}: -\infty<x\leqslant a\},$$

则

$$\mathscr{P}_{\boldsymbol{R}} \xlongequal{\text{def}} \{(-\infty, a]: a \in \boldsymbol{R}\}$$

对有限交的运算是封闭的，因而组成一个实数空间 $\boldsymbol{R}$ 上的 π 系.

半环：满足下列条件的 π 系 $\mathscr{Q}$ 称为**半环**：对任意的 $A, B \in \mathscr{Q}$ 且 $A \supset B$，存在有限个两两不交的 $\{C_k \in \mathscr{Q}, k=1, \cdots, n\}$，使得

$$A \backslash B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

例 2 对任何 $a, b \in \boldsymbol{R}$，令

$$(a,b) = \{x \in \boldsymbol{R}: a < x < b\};$$
$$(a,b] = \{x \in \boldsymbol{R}: a < x \leqslant b\};$$
$$[a,b) = \{x \in \boldsymbol{R}: a \leqslant x < b\};$$
$$[a,b] = \{x \in \boldsymbol{R}: a \leqslant x \leqslant b\},$$

它们分别称为 $\boldsymbol{R}$ 中的**开区间**、**左开右闭区间**、**左闭右开区间**和**闭区间**. 容易看出，由开区间全体组成的集合系、由左开右闭区间全体组成的集合系、由左闭右开区间全体组成的集合系和由闭区间全体组成的集合系都是 π 系. 记由左开右闭区间全体组成的集合系为

$$\mathscr{Q}_{\boldsymbol{R}} \xlongequal{\text{def}} \{(a,b]: a, b \in \boldsymbol{R}\},$$

则对任何 $(a,b], (c,d] \in \mathscr{Q}_{\boldsymbol{R}}$，容易验证 $(a,b] \backslash (c,d]$ 可表成 $\mathscr{Q}_{\boldsymbol{R}}$ 中至多两个不交集合之并. 因此，它是 $\boldsymbol{R}$ 上的半环.

例 3 如果 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 是由有限个元素组成的集合，则由 X 上的所有单点集组成的集合系 $\mathscr{P} = \{\{x_1\}, \cdots, \{x_n\}\}$ 是一个 π 系，也是一个半环.

环：如果非空集合系 $\mathscr{R}$ 对并和差的运算是**封闭的**，即

$$A, B \in \mathscr{R} \Longrightarrow A \cup B,\ A \backslash B \in \mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为**环**.

例 4 不难验证

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{R}} \xlongequal{\text{def}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k]: a_k, b_k \in \boldsymbol{R} \right\}$$

是 $\boldsymbol{R}$ 上的环.

例 5 由有限个元素组成的集合 X 的一切子集组成的集合系 $\mathscr{T}$ 形成一个环.

域：满足下列条件的 π 系 $\mathscr{A}$ 称为**域**：

$$X \in \mathscr{A};\ A \in \mathscr{A} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{A}.$$

有的文献中，也把域叫做**代数**.

从上述诸定义可以看出：半环必是 π 系. 如果 $\mathscr{R}$ 是一个环，则

$$\begin{aligned} A,B \in \mathscr{R} &\Longrightarrow A \cup B,\ A\backslash B,\ B\backslash A \in \mathscr{R} \\ &\Longrightarrow A \cap B = (A \cup B)\backslash[(A\backslash B) \cup (B\backslash A)] \in \mathscr{R}, \end{aligned}$$

可见它也满足半环的要求. 因此，环必是半环. 如果 $\mathscr{A}$ 是一个域，则

$$A,B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathscr{A}$$

和

$$A,B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A\backslash B = A \cap B^c \in \mathscr{A},$$

因而域必是环. 我们把以上的结论总结成

命题 1.2.1 半环必是 π 系；环必是半环；域必是环.

以上的 π 系、环和域都是针对有限运算定义的. 对于建立测度来说，只有有限运算是不够的. 因此，还必须引进一些在可列运算下封闭的集合系.

单调系：如果对集合系 $\mathscr{M}$ 中的任何单调序列 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{M}$，则把 $\mathscr{M}$ 叫做**单调系**.

λ 系：集合系 $\mathscr{L}$ 称为 **λ 系**，如果它满足下列条件：

$$X \in \mathscr{L};$$

$$A,B \in \mathscr{L} \text{ 且 } A \supset B \Longrightarrow A\backslash B \in \mathscr{L};$$

$$A_n \in \mathscr{L} \text{ 且 } A_n \uparrow \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}.$$

σ 域：满足下列三个条件的集合系 $\mathscr{F}$ 称为 **σ 域**：

$$X \in \mathscr{F};$$

$$A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{F};$$

$$A_n \in \mathscr{F},\ n = 1,2,\cdots \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

有的文献中，也把 σ 域叫做 **σ 代数**. 有两个很特殊的 σ 域，它们分别是 X 上含集合最少的 σ 域 $\{\varnothing, X\}$ 和 X 上含集合最多的 σ 域 $\mathscr{T} \xlongequal{\text{def}} \{A: A \subset X\}$. 因此，例 5 中那个环也是 σ 域. 但是，沿着例 1、例 2 和例 4 那条线出来的 σ 域讨论起来比较复杂，要在下一节才能

说清楚.

设 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域. 那么由 σ 域定义的第二条和第三条推知

$$A_n \in \mathscr{F},\ n = 1,2,\cdots \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right\}^c \in \mathscr{F},$$

故它对可列交也是封闭的. 这一事实加上定义的第一条又进一步推出

$$A,B \in \mathscr{F} \Longrightarrow A \cap B = A \cap B \cap X \cap \cdots \in \mathscr{F}.$$

因此, σ **域是域**. 下面,我们来讨论单调系, λ 系和 σ 域三者之间的关系.

命题 1.2.2 λ 系是单调系; σ 域是 λ 系.

证明 设 $\mathscr{L}$ 是 λ 系. 如果对每个 $n=1,2,\cdots$ 有 $A_n \in \mathscr{L}$ 而且 $A_n \downarrow$,则由 λ 系的定义知

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right\}^c \in \mathscr{L}.$$

这一事实加上定义的第三条便说明了 $\mathscr{L}$ 是单调系.

设 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域. 则 $\mathscr{F}$ 显然满足 λ 系定义的第一条和第三条. 由于 σ 域是域,所以它也满足 λ 系定义的第二条. 因此, σ 域必是 λ 系. □

总结以上的讨论,我们得到了所定义的七个集合系之间由宽松到严紧的下列顺序:

π 系 $\longrightarrow$ 半环 $\longrightarrow$ 环 $\longrightarrow$ 域 $\longrightarrow$ σ 域;

单调系 $\longrightarrow$ λ 系 $\longrightarrow$ σ 域.

这些集合系的核心是 σ 域;它的成员就是我们常说的可测集. 换句话说,我们最终是要在 σ 域上建立测度. 今后,非空集合 X 和它上面的一个 σ 域 $\mathscr{F}$ 放在一起写成的 $(X,\mathscr{F})$ 将称为**可测空间**.

至于什么时候其他的集合系能成为 σ 域,有如下两个命题.

命题 1.2.3 一个既是单调系又是域的集合系必是 σ 域.

证明 把这个集合系记为 $\mathscr{F}$. 由于 $\mathscr{F}$ 是域,故它对有限并是封闭的. 又由于 $\mathscr{F}$ 是单调系,故它对非降序列的极限也是封闭的. 因此,

$$A_n \in \mathscr{F},\quad n = 1,2,\cdots$$