教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

大学数学简明教程

王信峰　车　燕　戈西元　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高职高专规划教材

大学数学简明教程

王信峰　车燕　戈西元　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材.

在内容编排上,对传统教材进行了较大改革,吸取了西方教材的某些特点,将数学的应用贯穿始终.全书将涉及的基本内容分成三篇:应用微积分(第1~7章)、微积分计算与理论(第8~10章)、应用数学基础(第11~12章).应用微积分部分侧重介绍数学的概念及其相关实际背景,突出数学概念的图形与数值特性,同时介绍数学的应用与简单数学建模;作为第一篇的补充,微积分计算与理论部分则侧重数学概念的代数特性,借以充实第一篇数学理论与计算方面的不足;应用数学基础是数学应用必不可少的建模工具与理论基础,作为介绍,本书按高职高专教学基本要求涉及矩阵及概率论与数理统计的部分内容.全书共分12章:函数、方程与图形、极限与连续的概念、应用微分学、连续积累问题、简单数据处理与函数逼近、微分方程与数学建模入门、微积分的有关计算、微分方程的解法、微积分应用的理论基础、矩阵及其应用、概率论与数理统计.书后附有常用数理统计表和积分表.

本书适用于高职高专工科各专业,还可作为工程技术人员的参考书,也可供经管类各专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学简明教程/王信峰等编著.—北京:高等教育出版社,2001

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-04-009891-1

Ⅰ.大… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第032526号

大学数学简明教程

王信峰 车燕 戈西元 编著

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	国防工业出版社印刷厂		

开 本	787×1092 1/16	版 次	2001年7月第1版
印 张	27.5	印 次	2001年7月第1次印刷
字 数	670 000	定 价	23.10元

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分.改革开放以来,在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下,各地已出版了一批高职高专教育教材.但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要.为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了"教育部高职高专规划教材"编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批"教育部高职高专规划教材".

"教育部高职高专规划教材"计划出版500种,用5年左右时间完成.出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程.计划先用2～3年的时间,在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验,解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2～3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专教育教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

"教育部高职高专规划教材"是按照《基本要求》和《培养规格》的要求,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的,适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000年4月3日

前　言

本教材是由几年来一直从事高职高专教育数学课程教学与研究的一线教师编写的.在编写过程中,我们充分考虑了教育部三教统筹后最新制定的高职高专数学课程教学基本要求.

在内容编排上,本教材打破了以往的编排模式,将大学数学的基本内容分成三大部分:数学概念与应用,微积分计算与理论,应用数学基础.数学概念与应用部分主要侧重介绍数学的概念及其相关实际背景,突出数学概念的图形与数值特性,同时介绍数学的应用,借以培养学生的定量化思维方式,增强对数学的应用意识与简单的数学建模能力;微积分计算与理论部分主要介绍数学计算与数学推演,侧重数学的代数特性,在重点培养学生的基本运算能力的同时,适当引入数学理论的重要结论,尽管不加证明,但突出对结论的使用,借以培养学生的借用能力,同时,适当引入数学推演,作为数学概念与应用和微积分计算这两部分的补充,弥补数学理论方面的不足,培养学生的逻辑推理能力,并使学生进一步认识数学理论的重要作用,认清数学的应用离不开数学的理论支持;应用数学基础是数学应用必不可少的建模工具与理论基础,作为介绍,本书按照高职高专数学基本要求涉及矩阵及概率论与数理统计的部分内容,为强调应用,还特别增加了计算机模拟的基本内容.教材注意将数学的应用贯穿始终,并逐步使学习者建立起定量化的思维方式,在此基础上,引入了数学建模,以加强学生对数学的应用能力.

本教材在编写时,注意了三方面的衔接:三大部分内容的前后衔接、三大部分各自内容上的衔接、与后续课程的衔接;第一部分与第三部分都有相对独立性,对于部分数学要求不高的专业,可仅讲第一部分,也可以与第三部分配合,以达到加强应用的目的.相信使用电子教案或图形计算器将能更充分发挥第一部分的特色.

本教材由上海冶金高等专科学校彭延铭副教授主审,他对本教材的编写思想予以肯定,给我们编者以极大的鼓舞.编写过程中,北京联合大学林中忖教授以及各位同事对此书给予了无限关怀,并对教材的编写提出了很好的建议.在此,我们表示衷心感谢.同时,我们也感谢高等教育出版社在本书编写与出版过程中的积极支持与帮助.

限于编者的水平,同时由于时间比较仓促,不妥与错误之处在所难免,希望广大读者批评指正.

目　　录

第一篇　应用微积分

第二篇 微积分计算与理论

第三篇 应用数学基础

第一篇　应用微积分

本篇为数学概念与应用部分，侧重介绍数学的概念及其相关实际背景，突出数学概念的图形与数值特性，同时介绍数学的应用，借以培养学生的定量化思维方式，提高对数学的学习兴趣，增强对数学的应用意识和简单数学建模能力.

建议有条件的院校能选用有关数学软件(如 Mathematica, Maple, Matlab 等)配合本篇内容进行教学.

第1章　函　　数

1.1　概述

1.1.1　概述

在研究自然现象、工程技术和经济分析过程中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不发生变化，或者说保持一定的数值，这种量称为常量；还有一些量在过程中不断变化，即可以取不同的数值，这种量称为变量.

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析. 如就小范围地区而言，重力加速度可以看作常量，但就广大地区而言，重力加速度则是变量. 就某一时间而言，某个人的身高为常量，但就其整个的成长过程而言，它又是变量.

初等数学以基本上不变的量——常量为其主要研究对象，而高等数学则以变量为主要研究对象. 所谓函数，正是变量与变量之间的相互依赖关系的一种描述. 它是定量化思维方式的具体表现形式.

定量思维就是用数学的方法把一个实际问题归纳为数学模型，并写出数学表达式，再去求解这一数学模型. 常见的求解过程得借助于计算方法，而这种分析必须要求有效性检查，即通过从实验室与现场得到的数据来调整参数，以检验其正确性. 这经常会涉及到交叉学科的问题.

数学已渗透在高科技之中，并已成为高科技不能缺少的工具之一. 它不仅仅是自然科学的基础，如工程管理、金融风险、自动控制、生物技术等，也已渗透到医学的领域：CT 技术、药理、理疗

等，渗透到社会的交通、人口理论、战略投资乃至记忆学等领域.

作为这门课的引言，以下从一个大众关心的话题谈起.

1.1.2 银行利率与贷款买房

买房是近几年来众多人开始关心的一个问题，银行、甚至一些中介机构开始注意为售房提供更多的便利条件，如贷款、保险等业务.网易网站(www.163.com)的房产频道中公布了个人商业性贷款利率(贷款通常以复利计算，即本月利息累计入下月的本金中)，如表1－1所示.利用这一利率表，我们可以很容易根据自己的需要与所具有的还款能力来选择合适的贷款期限与贷款额.

例如，某对青年夫妇为买房需要向银行贷款60 000元，月利率为0.004 65，根据他们目前的收入与支出状况，结合还款情况，他们选定了贷款期限为25年＝300月，从而由表1－1可查得这对夫妇每月要还61.887×6＝371.322元，5年后，他们接受了一笔遗产，想将贷款一次还清，他们还应交还多少钱?

表1－1 个人住房商业性贷款利率表

年份	月数	月利率/‰	年利率/%	月还款额	本息总额	总利息
1	12	4.425	5.31	到期一次还本付息	10 531.000	531.000
2	24	4.425	5.31	440.104	10 562.485	562.485
3	36	4.425	5.31	301.103	10 839.700	839.700
4	48	4.425	5.31	231.700	11 121.593	1 121.593
5	60	4.425	5.31	190.136	11 408.153	1 408.153
6	72	4.65	5.58	163.753	11 790.252	1 790.252
7	84	4.65	5.58	144.080	12 102.758	2 102.758
8	96	4.65	5.58	129.379	12 420.363	2 420.363
9	108	4.65	5.58	117.991	12 743.043	2 743.043
10	120	4.65	5.58	108.923	13 070.773	3 070.773
11	132	4.65	5.58	101.542	13 403.523	3 403.523
12	144	4.65	5.58	95.425	13 741.259	3 741.259
13	156	4.65	5.58	90.282	14 083.948	4 083.948
14	168	4.65	5.58	85.902	14 431.551	4 431.551
15	180	4.65	5.58	82.133	14 784.027	4 784.027
16	192	4.65	5.58	78.861	15 141.335	5 141.335
17	204	4.65	5.58	75.997	15 503.427	5 503.427
18	216	4.65	5.58	73.473	15 870.257	5 870.257
19	228	4.65	5.58	71.236	16 241.773	6 241.773
20	240	4.65	5.58	69.241	16 617.924	6 617.924
21	252	4.65	5.58	67.455	16 998.656	6 998.656
22	264	4.65	5.58	65.848	17 383.911	7 383.911

续表

年份	月数	月利率/‰	年利率/%	月还款额	本息总额	总利息
23	276	4.65	5.58	64.397	17 773.631	7 773.631
24	288	4.65	5.58	63.082	18 167.757	8 167.757
25	300	4.65	5.58	61.887	18 566.226	8 566.226
26	312	4.65	5.58	60.798	18 968.976	8 968.976
27	324	4.65	5.58	59.802	19 375.941	9 375.941
28	336	4.65	5.58	58.890	19 787.056	9 787.056
29	348	4.65	5.58	58.052	20 202.253	10 202.253
30	360	4.65	5.58	57.282	20 621.464	10 621.464

我们通过一步步地计算还款后的剩余借款额，来给出 5 年后的剩余借款额.

第 1 月(贷款当月的下一月)还贷后还有贷款：

$$A_1=(1+0.004\ 65)\times 60\ 000-371.322$$

第 2 月还贷后：

$$\begin{aligned}A_2&=(1+0.004\ 65)A_1-371.322\\&=(1+0.004\ 65)^2\times 60\ 000-371.322\times[(1+0.004\ 65)+1]\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

第 5 年，即第 60 月还贷后：

$$\begin{aligned}A_{60}&=(1+0.004\ 65)A_{59}-371.322\\&=(1+0.004\ 65)^{60}\times 60\ 000-371.322\times[(1+0.004\ 65)^{59}+\\&\quad(1+0.004\ 65)^{58}+\cdots+(1+0.004\ 65)+1]\\&=(1+0.004\ 65)^{60}\times 60\ 000-371.322\times\frac{(1+0.004\ 65)^{60}-1}{1.004\ 65-1}\\&=53\ 627.7\end{aligned}$$

这就是说他们还需再交 53 627.7 元，才算完全结清.

再进一步，表 1－1 中既有年利率，又有月利率，且容易知道表 1－1 中的月利率＝年利率/12，那么，月还款数是由哪个算出来的？是如何算出来的？用两种利率计算是否会得到同样的结果？再者，我们简单地用 10 000 元的月还款 61.887 乘以贷款额 60 000 的万分之一来作为当前贷款所对应的月还款额 371.322，这样做是否合理？

仔细考察上例的计算过程，不难得到更一般的结果. 记贷款额为 A_0(单位：元)；银行贷款月利率为 R(单位：元/月)；每月还款数为 x(单位：元)；贷款期限为 N(单位：月)；第 k 月的剩余贷款额为 A_k(单位：元，$k=1,2,\cdots$)，则有

$$\begin{aligned}A_1&=(1+R)A_0-x\\A_2&=(1+R)A_1-x=(1+R)[(1+R)A_0-x]-x=(1+R)^2A_0-x[(1+R)+1]\\A_3&=(1+R)A_2-x=(1+R)[(1+R)^2A_0-(1+R)x-x]-x\\&=(1+R)^3A_0-x[(1+R)^2+(1+R)+1]\end{aligned}$$

…………

用数学归纳法易知：

$$A_k = (1+R)^k A_0 - x[(1+R)^{k-1} + (1+R)^{k-2} + \cdots + (1+R) + 1]$$
$$= (1+R)^k A_0 - \frac{x}{R}[(1+R)^k - 1]$$

即

$$A_k = \left(A_0 - \frac{x}{R}\right)(1+R)^k + \frac{x}{R} \tag{1.1}$$

这就是第 k 月的剩余贷款数.用这一公式可以验算表中各数据值的正确性.例如:贷款期限为 10 年,贷款额为 10 000 元时,相应月利率为 0.004 65,从而根据上述公式,并注意到贷款期限为 10 年,即表示 $A_{120}=0$,从而

$$0 = \left(10\ 000 - \frac{x}{0.004\ 65}\right)(1+0.004\ 65)^{120} + \frac{x}{0.004\ 65}$$

解方程可得 $x=108.923$(单位:元),这正是表 1－1 中相应的月还款数！可见,表 1－1 中月还款额是用月利率计算出来的.

从公式(1.1)还可以看出,贷款期限为 N 表明 $A_N=0$,当月利率 R 不变时,月还款额 x 与贷款额 A_0 应满足：

$$0 = \left(A_0 - \frac{x}{R}\right)(1+R)^N + \frac{x}{R}$$

即

$$A_0 = \frac{(1+R)^N - 1}{R(1+R)^N}x$$

也就是说,月还款额 x 与贷款额 A_0 是正比例关系.例如,当 $R=0.004\ 65$, $N=120$ 时, $A_0 = \frac{1.004\ 65^{120}-1}{0.004\ 65\times 1.004\ 65^{120}}x \approx 91.808x$.从而,当贷款期限与月利率都不变时,月还款额随贷款金额同比例增长.例如,贷款期限为 20 年,贷款额为 100 000 元时,若相应月利率不变,则月还款额应为

$$x = 69.241 \times 10 = 692.41(元)$$

利用上述公式(1.1),我们还可以解决许多相关问题.

例 1 如果将计算中的月利率改换为年利率来计算,并仍实行每月还款方式(即每月还款额为年还款额的 1/12),银行与贷款个人哪个更愿意接受?

解 若按年利率计算,以 10 年期为例,则由前述公式(1.1)的导出过程可知,将公式中的月利率改为年利率,相应月数改为年数,公式仍然成立,从而由第 10 年时的剩余还款额为零可得

$$0 = \left(10\ 000 - \frac{x}{0.055\ 8}\right)(1+0.055\ 8)^{10} + \frac{x}{0.055\ 8}$$

可解得 $x=1\ 331.77$,从而贷款 10 000 元时,平均月还款额为 1 331.77/12＝110.981,与按月利率计算出的月还款额 108.923 相比,此时若仍以每月还款来进行,显然对银行有利.

例 2 恰在决定买房前,前文所述的那对年轻夫妇又看到某借贷公司的一则广告:“若借款 60 000 元,21 年还清,只要:(i)每半个月还 185.661 元;(ii)由于文书工作多了的关系,要预付贷

款额的 10%，即 10%×60 000=6 000 元”. 这对夫妇想：提前四年还清当然是好事，每半个月还 185.661 元，一个月正好是 371.322 元，只不过多跑一趟去交款罢了；要付 6 000 元，当然使人不高兴，但提前四年还清，省下的钱为 371.322×4×12=17 823.5 元，相对而言，6 000 元仅为省下的 1/3. 这家公司为什么这么做？

解 先分别对(i)，(ii)进行分析，看能否缩短归还期限.

分析(i). 此时 $A_0=60\ 000$ 不变，$x=185.661$，月利率变为半月利率可粗略地认为正好是原 R 的一半，即 $R=0.004\ 65/2=0.002\ 325$，注意到公式(1.1)对于半月利率仍适用，于是求 $A_k=0$ 时的 k 有

$$0=\left(A_0-\frac{x}{R}\right)(1+R)^k+\frac{x}{R}$$

可得 $k=\dfrac{\ln\dfrac{x}{x-A_0R}}{\ln(1+R)}\approx 599.314$(半月)$=299.657$(月)，这说明只相当于提前不到半个月才能还清贷款.

再分析(ii). 贷款 60 000 元，但要预交 6 000 元，从而 $A_0=60\ 000-6\ 000=54\ 000$ 元，即你的借款是 54 000 元，而不是 60 000 元，仍按月还款方式的条件计算，即令 $R=0.004\ 65$，$x=371.322$，求 $A_k=0$ 时的 k，则得

$$k=\frac{\ln\dfrac{x}{x-A_0R}}{\ln(1+R)}=\frac{\ln\dfrac{371.322}{371.322-54\ 000\times 0.004\ 65}}{\ln(1+0.004\ 65)}\approx 243.086(\text{月})=20.257\ 2(\text{年})$$

即实际上相当于提前不止 4 年就可以还清.

这说明该借贷公司只要去同样的银行借款，即使半个月收来的钱不动再过半个月合在一起去交还给银行，他还可以坐收第 21 年开始的近 3 304.77 元，更何况他还可以作短期投资(不超过半个月)去赚取额外的钱.

这很像数字游戏，而且从这些数字游戏中，你也许领悟了一些什么. 但作为解决实际问题工具的数学，其许多分支正是在这些数字游戏的研究中得以发展的，而且它也成为解决相应问题的有用工具. 这种游戏也许将会在激烈竞争的年代中愈演愈烈，甚至会伴随你一生.

1.2 描述量间的简单关系(一元函数)

1.2.1 销量、贷款买房与心电图(函数的概念及表示)

例 3 一个冷饮店老板，记录了 7 月 15 日这天出售冰棍的情况如下：

时刻 t	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
单位时间售出冰棍数 N	1	3	6	10	15	20	18	15	12	8

其中，单位时间指以某一时间长度为一个单位，比如可以是以 10 min(或 20 min)作为一个单位，且此时 t 时刻对应时间指的是时间段$[t-5, t+5]$(或$[t-10, t+10]$). 这一表给出了“时刻 t”与“单位时间售出冰棍数 N”间的联系，即一个时刻 t 对应着唯一的一个单位时间销量 N——变量 t 与变量 N 间的对应关系.

例 4 (贷款买房)在第 1 节贷款买房的例子中，我们得到了关系式

$$A_k = \left(A_0 - \frac{x}{R}\right)(1+R)^k + \frac{x}{R} \quad (\text{其中 } A_0, R, x \text{ 都是常量})$$

与

$$A_0 = \frac{(1+R)^N - 1}{R(1+R)^N}x \quad (\text{其中 } R, N \text{ 都是常量})$$

等，它们都有一个共同的特点：等式右端变量的每一个取值，都有左端变量的唯一一个值与之对应.

这里的表达式也代表了变量与变量间的对应关系.

例 5 心电图(ECG)可以显示病人的心率模式. 它是由心电图仪直接根据病人的心率情况绘制的. 如图 1－1 所示，它是某被测者的心电图，由图形可以看出，它的图形上每一点都代表着相应时刻对应的电流活动值. 从而，这里的图形又表示了变量与变量间的对应关系.

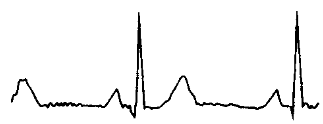

图 1－1 心电图

上述例 3、例 4、例 5 都给出了变量与变量间的对应关系，它们有一个共同特征：其中一个变量(在一定范围内)的任何取值(按照某种对应方式)，都有另一变量的一个相应值与它对应. 这就是函数.

定义 给定变量 x 的取值范围 I，若在这一取值范围内的每一个取值，按照某种对应法则 f，都有另一变量 y 的唯一一个取值与之对应，则称这一对应法则确定了一个函数，并简记为 $y = f(x)$. 其中，x 称为自变量，而随它变化的变量 y 称为因变量，x 的取值范围 I 称为函数的定义域，由 I 中每一个 x 值所对应得到的所有 y 值组成的集合称为函数的值域.

例如，上述例 3 中的函数关系可表示为 $N = f(t)$，其中 t 是自变量，N 为因变量，这一函数的定义域为$\{8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$；例 4 中第一个函数的定义域为$\{1,2,3,4,\cdots,30\}$，第二个函数的定义域为$[0,+\infty)$；例 5 中函数定义域为心电图的测定时间段.

函数的值域与函数的定义域以及函数的对应法则相联系，要确定它往往很难，我们只能对较简单的函数给出其值域. 例如，例 3 中函数的值域为$\{1,3,6,8,10,12,15,18,20\}$；容易给出例 4 中第二个函数的值域为$[0,+\infty)$.

另外，由函数表达式容易求得某些自变量取值所对应的函数值，我们称之为相应点处的函数值.

例 6 设 $R = 0.004\,425$, $A_0 = 10\,000$，试求贷款期限分别为2年、3年、4年、5年时的月还款额.

解 先给出月还款额 x 与贷款期限 N(单位：月)间的函数关系. 由公式 $A_0 = \dfrac{(1+R)^N - 1}{R(1+R)^N}x$，代入 $R = 0.004\,425$, $A_0 = 10\,000$，解出 x 可知

$$x(N) = \frac{R(1+R)^N}{(1+R)^N - 1}A_0 = \frac{44.25 \times 1.004\,425^N}{1.004\,425^N - 1} \tag{1.2}$$

这就是月还款额 x 与贷款期限 N 间的函数关系.将贷款期限换算成月,并分别代入公式计算,得

$$x(24)=440.104,x(36)=301.103,x(48)=231.700,x(60)=190.136$$

正是表 1-1 中的 2～5 行的第 2,5 列对应值,也是(1.2)式对应函数在各相应点的函数值.

1.2.2 函数关系的确定与函数的定义域、值域

确定变量间的函数关系,是我们研究变量的基础.用定量化思维方式去解决相关实际问题常常从这里开始.

例 7 设黄河清淤工作刚刚结束,之后几年,无淤泥的河道将还会逐渐被淤泥所填充.设每年从上游冲下的流沙初始量为常量 P_0,且每 m 河床将留下流过泥沙总量的 20%,则通过 n m 后,水中泥沙的遗留量为多少?

解 1 m 后,泥沙的遗留量为:$f(1)=P_0(1-20\%)=P_0\cdot 0.8$;

2 m 后,泥沙的遗留量为:$f(2)=f(1)\cdot(1-20\%)=P_0\cdot 0.8^2$;

3 m 后,泥沙的遗留量为:$f(3)=f(2)\cdot(1-20\%)=P_0\cdot 0.8^3$;

…………

通过 n m 后,则应有

$$P=f(n)=P_0\cdot 0.8^n$$

容易想像,这一公式对任意非负实数都有意义.即

$$P=f(x)=P_0\cdot 0.8^x$$

由实际意义可知,这里 x 的取值范围应为 $x\geqslant 0$.即函数的定义域为 $[0,+\infty)$,根据函数表达式与函数定义域可知函数的值域为 $(0,P_0]$.事实上,由于函数的定义域为 $x\geqslant 0$,注意到函数表达式中 P_0 为正,可知

$$P_0\geqslant P_0\cdot 0.8^x=P>0$$

也就是说,函数的值域为 $(0,P_0]$.

例 8 (药物的聚积)设想要模拟人体内某种药物的含量,可以想像人体内药物的最初含量为零,但由于连续(恒速率的注入)的静脉注射,药量开始慢慢增加,随着体内药量的增加,身体排泄这种药物的速率也在增加,随着注入时间的不断增长,最终药量将稳定在一个饱和值,如图 1-2 所示.设测得注射 1 h 后的体内药物含量为 0.1 个单位;2 h 后的药物含量为 0.15 个单位,试建立这里的函数关系.

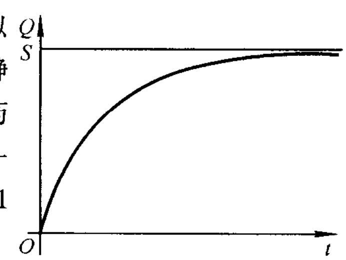

图 1-2 药物含量图示

解 要求出药物含量 Q 与注射时间 t 的关系.观察图形可以发现,这一图形看起来有点像指数衰减函数,只是上下颠倒了.实际衰减量是饱和水平 S 与人体内药物含量 Q 之间的差.设饱和水平与体内含药量的差为

$$差=差的初始值\cdot a^t$$

其中 t 以 h 为单位.由于差等于 $S-Q$,所以差的初始值为 $S-0=S$,从而

$$S-Q=S\cdot a^t$$

解出 Q 得到

$$Q = S - S \cdot a^t = S(1 - a^t)$$

由题中条件，即两个时间的实测值可得

$$\begin{cases} 0.1 = S(1 - a) \\ 0.15 = S(1 - a^2) \end{cases}$$

容易解得 $a = 0.5$，$S = 0.2$. 因此所得函数关系为

$$Q = 0.2(1 - 0.5^t)$$

容易得出这一函数的定义域为$[0, +\infty)$，值域为$[0, 0.2)$.

求变量间的函数关系往往并不这么容易，这里的两个例子，一个给出了变化的量值，一个则给出了函数的变化趋势，在许多问题中，这些往往都是很难得到的. 事实上，由于我们对变量间关系的了解往往都是从一个数值对应到多个数值对应开始的，这就是说我们能够得到的往往是变量间对应关系的数据，由数值(一批数据)到函数的公式表达将是我们建立函数关系的关键.

为此，我们来考察一下，到底如何表达函数关系更好些.

1.2.3 图、表与代数式(函数的三种表示方式间的关系)

由上述的例 3、例 4、例 5 可以知道，表格、图形(常称为函数的图象)、表达式都可以表示一个函数. 表格、图形、表达式正是函数关系的三种不同表示方式. 那么，它们各自有何优劣？又如何在它们之间进行相互转换？这是我们这一部分要介绍的内容.

1. 列表表示

列表表示给出了自变量取值与函数值间的对应，将自变量取值与相应函数值作为平面直角坐标系内一点的坐标画在直角坐标系内，也就给出了列表所对应函数的散点图，这就是相应列表函数的图象. 例如，画出例 3 中单位时间内销量 N 与时刻 t 间的函数图象，如图 1－3 所示.

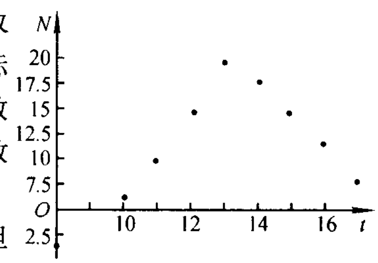

图 1－3　销量 N 与时刻 t 间的函数图

列表表示直接给出了两个变量间值的对应，用起来很方便，但也正是由于这一点，使得当自变量取值较多时，列表将很庞大，甚至于根本不能全部列出. 这是它的一大缺点.

2. 公式表示

由公式容易给出函数在自变量各个取值处的函数值. 例 6 正说明了这一点. 将自变量取值与相应函数值排列成一表即可得到函数的列表表示.

我们知道描点作图法是给定自变量的一系列取值，利用函数的公式表示计算出相应函数值，将自变量取值与相应函数值作为平面直角坐标系内一点的坐标画在直角坐标系内，最后再用平滑曲线将散点连接起来而得到函数的图象. 所得图象正是函数的图形表示.

例 9　(描点作图法：公式⇒表格⇒图形)某会员制商店对会员购物提供优惠，会员可按商品价格的 85% 购买商品，但每年需交纳会员费 300 元. 问若某人只在此商店购物，至少需购多少钱的商品(按商品价格计算)才能真正受惠？

解　假设按商品价格计算此人一年内购买了 x 元的商品，获得商品优惠(即在商品上少付的钱)$0.15x$，但因交纳了 300 元会员费，因此实际获得的优惠 y 是 $0.15x - 300$，即 $y = 0.15x -$