现代
位势理论
导引

吴炯圻　编著

XIANDAIWEISHILILUNDAOYIN

厦门大学出版社

现代位势理论导引

吴炯圻　编著

厦门大学出版社

现代位势理论导引

吴炯圻　编著

*

厦门大学出版社出版发行

（地址:厦门大学　邮编:361005）

三明地质印刷厂印刷

（地址:三明市富兴路15号　邮编:365001）

*

开本 850×1168　1/32　14.25印张　2插页　345千字

1998年10月第1版　　1998年10月第1次印刷

印数:1—1000册

ISBN 7-5615-1418-2/O·91

定价:22.00元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

内容简介

位势理论是数学分析领域中最早完成现代化变革的一个分支，与函数论、微分方程、概率论、物理学等分支或学科紧密关联。本书是现代位势理论的导引，全书分为三篇，共十三章。重点是第二篇，介绍该理论中最基本且最重要的组成部分 — 调和空间，它通过建立公理体系，概括并统一处理了关于椭圆型与抛物型微分方程的位势论，而且可建立相应的Markov 过程。第一篇是学习现代位势论的预备知识，简要介绍位势论常用的拓扑与测度的基本知识，其中有部分内容在通常的教科书（包括研究生教材）中并不容易找到。第三篇旨在帮助读者尽快接近科研前沿，介绍现代位势论中几个较有特色的研究新方向，并概述位势论的发展史、研究近况。为了便于学习，书中附有较多的注解、例题和部分习题。

本书内容丰富且具有先进性，穿插评述而富于启发性，适合作为数学、概率及物理专业研究生和高年级大学生的教材或参考书，也可作为位势论及有关专业的科研人员的参考资料。

序　言

张鸣镛教授在世时，曾多次和我讲起位势理论的重要性，讲起他对这一理论的赞赏。可惜我的研究方向不在这一领域，再加见面机会不多，不能多多倾听他详细的讲解。对于他坚强地、孜孜不倦地从事研究和教学的情景，我印象很深。不幸的是，天不假年，他于1986年便因病而逝世了，享年60岁。虽然他已很有成就，很有贡献，是我国很有声望的数学家。但是，以他的才华和抱负来衡量，仍属壮志未酬，好友们无不为之叹息。

我在追忆他时，常常担心他的学术成就未能得到继续发展。现在吴炯圻教授的著作《现代位势理论导引》可以说是部分地实现了张鸣镛教授的遗愿。吴教授曾在张鸣镛指导下学习和研究位势理论，后来又多次讲授这方面的课程，有丰富的经验。这本书从基础知识讲起，然后对调和空间的位势理论作了充分的叙述，又扼要地介绍了现代位势理论的进展。无论是作为研究生教材或专门著作，这本书都将是很有价值的。

我不是这方面的专家，出于对张鸣镛教授的怀念，在本书即将出版的时候，特写了以上简短的话作为纪念。

谷超豪

1998年9月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

位势论起源于物理学的万有引力学说和静电学。在不分布质量的地方，位势满足 Laplace 方程。这样，物理问题便化为求解偏微方程的数学问题。位势论在较长的一段时间里，一直被当成函数论的一个部分来加以研究，这不仅由于解析函数的实部与虚部都是调和函数，而且由于 1850 年，Rieman 把位势论与函数论做统一处理，揭示了 Green 函数和位势与保形映射之间的密切联系。本世纪以来，由于深入运用现代函数论、测度和积分理论、泛函分析、一般拓扑学、抽象代数以及现代概率论等分支的思想方法，位势论得到了蓬勃发展，开辟了新的研究方向，创造了新的方法，它从函数论中脱胎出来，成为分析领域中比较彻底地完成了现代化变革的一个分支，也促进了函数论及其它数学分支的发展。

50 年代后，位势论迅速发展，除了它越来越广泛地与复分析、拓扑学、几何测度论、调和分析、微分方程、微分几何、泛函分析等相邻数学分支相互结合、相互渗透且发挥着日益显著的作用外，还具有如下两个显著特点：

其一是，各种公理体系的位势论不断建立和完善。为了统一处理已有的理论并加以推广，使之适用于一般椭圆和抛物型方程或随机过程，不同的公理系统相继形成；

其二是，位势论与随机过程的内在联系逐步深入研究，同时

促进了分析与概率论这两个在 40 年代前仍被视为互不相干的数学领域的发展。

位势论历来深得数学大师的重视，从早期 Newton I, Lagrange J, Gauss C F, Dirichlet G L, Riemann B, Poicare H 等人的杰出工作，到本世纪初 Lebesgue H, Wiener N, Perron O, Riesz F 等人的重要贡献都是明显的例子；H.Cartan, M.Brelot, J.Doob, Choqet G, Deny J 等对现代位势论的创立与发展建立了丰功伟绩。70 年代起，更是群雄四起，本书的第十章将给出简要介绍。这里仅指出，Constantinescu C, Cornea A, Bliedtner J, Hansen W 等人都是佼佼者之一。国内杰出的函数论、位势论专家、厦门大学已故教授张鸣镛老师从 50 年代就注意到这个重要的研究方向，并为推动国内位势论研究的发展而努力奋斗，直到他生命的最后一刻。历史将永远记载他的功绩。

本书是作者在向张鸣镛老师学习位势论的心得体会的基础上，经过多年的教学实践（如在厦门大学、华侨大学、福州大学和漳州师院，给研究生及进修教师讲课、做专题报告）编写而成；在本人访德期间还得到德国比莱佛尔特大学教授 Hansen W 的具体指导。

本书的重点是第二篇，介绍现代位势论中最基本且最重要的组成部分——调和空间，即 Constantinescu C, Cornea A 等人创立的公理体系位势论，它概括并统一处理了关于椭圆型与抛物型微分方程的位势论，而且可建立相应的 Markov 过程。第一篇是学习现代位势论的预备知识，简要介绍位势论常用的拓扑与测度的基本知识，其中有部分内容在通常的教科书（包括研究生教材）中并不容易找到。第三篇首先简要略述位势论的发展史，综述其研究近况；而后介绍现代位势论中另外几个较有特色的研究

方向，尤其是Blidtner J,Hansen W创立的扫除空间论，它利用扫除把分析与概率很好地统一起来。总之，三篇的安排注意到了：一、突出中心，把重点尽量讲透；二、提供基础，使初学者方便学习或查阅预备知识；三、帮助有一定基础的读者加深加宽知识面，尽快接近位势论的研究前沿。

在编写中，作者致力于博采世界各国有关专著、优秀教材、近期发表的论文与综述之精华，努力体现我国学者的研究工作，包含了作者本人的科研成果；同时注意到国内初学者的实际情况和特点，多次征求同行专家的意见和建议，力求做到内容新颖，选材得当，推理严格，叙述规范，简明易学，使之适合于作为研究生教材，大学数学及物理专业高年级选修课教材或参考书，也希望能为其它研究方向的科研人员提供一条较快地了解现代位势论的途径。

杰出的数学家、中国科学院院士、中国科技大学原校长谷超豪教授对本书的出版极为关切，于百忙之中为本书题写了序言，表达了他对张鸣镛教授的深情怀念和对发展我国位势论研究的热心支持，作者谨此表示衷心的谢意。

张师母曾僖女士对作者的工作极为关心，厦门大学教授高琪仁老师对本书全面审阅并提出许多宝贵的修改意见，漳州师院院长林继中博士和许多同事、厦门大学出版社以及梁益兴、高鸿桢教授等对本书的出版给予大力支持和帮助，作者在此一并致谢。

尽管作者做了许多努力，但因本书覆盖的知识面甚宽，付印也较仓促，一定会有不完善之处。欢迎读者批评指正。

吴炯圻
1998. 9.

记号与约定

1. 设 X 为集，X 的子集全体记作 2^X，$\mathcal{A} \subset 2^X$ 称为 X 的子集族，有时用号码集 J 表示成为 $\mathcal{A} = \{ A_j \mid j \in J \}$. $\cup\mathcal{A} = \cup_j A_j$；$\cap\mathcal{A} = \cap_j A_j$.

当号码集 J 为可数集时，称 $\mathcal{A}$ 为集列；集列 $\{ A_1, A_2, A_3, \cdots \}$ 常简记作 $\{ A_j \}$.

$A \setminus B$ 表示集 A 与 B 的差集.

2. $\boldsymbol{R}$ 表示实数全体；$\boldsymbol{R}^N$ 表示 N 维欧几里德空间；有时也将 $\boldsymbol{R}^1$ 简记作 $\boldsymbol{R}$；$\boldsymbol{R}_+$ 表示 $[0, \infty)$. ∞ 与 $-\infty$ 叫做广义实数，实数与广义实数统称为数值. $\mathbf{N}$ 表示自然数集 $\{1, 2, 3, \cdots\}$.

3. 从集 X 到 $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$（或记作 $[-\infty, \infty]$）的映照 f 称作数值函数或简称函数，到 $\boldsymbol{R}$ 的映照 f 称作实函数；当 $f \geq 0$（即 f 是到 $[0, \infty] = \boldsymbol{R}_+ \cup \{\infty\}$ 的映照）时称作正函数. 一般地，“正”指“≥ 0”，严格正指“> 0”；单调的概念是广义的，如从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 的常值函数既是单调增又是单调减的. “常数”如未加声明，指的是“实常数”.

说一个函数在某个集或点上是有限的，指的是它只取实数值；而“下有限”指“不取 $-\infty$ 为函数值”.

4. 对集 X 上的一族函数 $\mathcal{F} := \mathcal{F}(X)$，$\mathcal{F}^+ := \mathcal{F}^+(X)$ 表示其中正函数全体. 但是，调和空间 X 上的正超调和函数全体记作 $\mathcal{U}_+$.

$$\inf \mathcal{F} := \inf \{ g \mid g \in \mathcal{F} \} = \inf \{ g(x) \mid g \in \mathcal{F} \}, x \in X;$$

$$\sup \mathcal{F} := \sup \{ g \mid g \in \mathcal{F} \} = \sup \{ g(x) \mid g \in \mathcal{F} \}, x \in X;$$

其中“:=”表示左边的符号或式子用右边的符号或式子来定义，偶然也有反过来的情形.

X 的子集 E 的特征函数记作 1_E. 对集 X 上的函数 f、g, 记号 $\{f>g\}$ 与 $\{x\in X\,|\,f(x)>g(x)\}$ 表示同一个集；把“>”换成“<”、“＝”或“≠”等时，情况类似.

5. 拓扑空间上的（数值）函数 f 的支柱记作 $S(f)$, 它是集 $\{f\neq 0\}$ 的闭包. 说拓扑空间上的一个函数连续通常指的是，它是实值连续函数，有时为明显起见，还附加括号（有限）. X 上的实函数全体记作 $C(X)$, 其中具紧支柱者全体记作 $\boldsymbol{K}(X)$; $C(X)$ 中那些在紧集外可以任意小（或说成在 ∞ 趋于 0）的函数全体记作 $C_0(X)$; X 上的 Borel 函数全体记作 $\boldsymbol{B}(X)$, 而 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}}(X)$ 表示其中有界函数全体. 据上条，$\boldsymbol{B}^+(X)$ 表示正的 Borel 函数全体.

X 上的 Borel 代数记作 $\mathbf{B}(X)$.

$\boldsymbol{R}^N$ 的开集 G 上的具有 k 阶连续偏导数的函数全体表为 $\boldsymbol{C}^k(G)$；具有任意阶连续偏导数的函数全体记作 $\boldsymbol{C}^\infty(X)$, 其中具紧支柱者全体记作 $\boldsymbol{C}_0^\infty(X)$.

6. 有广义实数参加的数值运算的法则按照惯例，这里仅强调，$\infty-\infty$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\infty\cdot(-\infty)$, $(-\infty)\cdot\infty$ 是没有意义的，而 $0\cdot\infty=\infty\cdot 0=(-\infty)\cdot 0=0\cdot(-\infty)=0$.

7. 从第三章起，谈及一个拓扑空间 X 上的测度，指 Radon 测度，它是在一个包含 $\mathbf{B}(X)$ 的 σ 代数上的完备的、正则的（正的）测度，使得每个紧集具有有限的测度值（详见第二章 § 2.3 及 § 2.6）. 用 $\mathscr{M}$ 或 $\mathscr{M}(X)$ 表示 X 上的广义（或称带号）测度全体，用 $\mathscr{M}^+$ 或 $\mathscr{M}^+(X)$ 表示 X 上的 Radon 测度全体. 测度或广义测度 μ 的支柱记作 $\mathrm{supp}(\mu)$.

8. 符号□表示一个命题叙述完毕或证明完毕.

目　　录

第一篇　现代分析基础选讲

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二篇 调和空间位势论

第三篇 现代位势论概述

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com