向量分析入门

白苏华 向诗砚

近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四川教育出版社

近代数学知识丛书

向量分析入门

白苏华　向诗砚

四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：韩承训
特约编辑：胡师度
装帧设计：邱云松

近代数学知识丛书　　向量分析入门

四川教育出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　自贡新华印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32　印张5.75　插页2　字数79千
1988年1月第一版　　1988年1月第一次印刷
印数：1—1,690册

ISBN7-5408-0344-4/G·278　　定价：1.25元

写在前面

从小学跨入中学，特别是步入高中以后，你将碰到许多完全陌生的东西，你将会发现数学天地是那样广阔，那样令人神往而又眼花缭乱，你可能会感到新奇，也可能会因无从下手而产生惶惑……其实，万事入门难，入门前或许不知所云，入了门便“不过如此”了。

这套知识小丛书将帮助你度过“入门难”这一关。它用生动而浅显（有时还很有趣）的语言，准确而明晰的阐述，将近代数学中一些基本的概念、理论和运算一步一步展开，象一级级台阶，将你引入门去，使你并不感到突然和十分吃力。许多地方还从生活现象入手，你读起来象是在聊家常，毫无枯燥之感。所选的例题和练习也将帮助你加深理解。当然，所谓入门，不过是给你一把小小的钥匙而已，一旦“入”得“门”去，那广阔的天地便由你自由驰骋，因而也就不再是这套书的任务了。

这套丛书所收书目见后勒口所列，大多为中学数学所涉及；少数关系不甚密，可辅你开拓视野，有兴趣者也不妨一读。对于中学教师来说，这套丛

书也不失为良友，对提高教学质量或能助以一臂之力。

这本《向量分析入门》由白苏华、向诗砚二同志编写，并经四川大学数学系胡师度副教授认真审读修订，谨此表示谢意。对于书中的错误、疏漏之处，热诚欢迎广大读者批评指正。

编者　一九八四年十一月

目 录

一 引 言

向量分析所讨论的问题即向量的微积分.

从解析几何可以知道，向量本身是一个几何学的概念，它的运算与研究离不开几何的背景. 诸如空间、坐标、方向、曲线与曲面、区域等概念，都是向量分析的几何背景.

向量分析所用的“分析”一词，就是指的数学分析，所以，向量分析又是一个微积分的概念，它的运算与研究离不开分析的背景. 诸如极限、连续、微分与积分等概念，都是向量分析的分析背景.

由此可见，向量分析既有几何的特色，又有分析的特色. 事实上，它正是建筑在解析几何与数学分析之上的：用分析的方法去处理向量函数，又用向量代数的方法把运算简化. 这样一来，进展就比较迅速，并且得以完善. 从数学的角度甚至可以说：向量分析，尤其是它的主要内容场论，是分析与向量代数相结合的产物.

向量分析的另一特色是它具有很强的物理背景. 物理学中的各种场，诸如引力场、重力场、温

度场、电磁场等等，都是向量分析的物理背景，连“场”这个术语也来源于此.

物理学对场论的发展有巨大的推动作用，场论的知识在物理学中的应用也相当广泛.因此，有的书甚至干脆围绕物理问题来介绍场论.

本书共分五章，前四章介绍直角坐标系下的向量分析，最后一章介绍曲线坐标系下的场论的基本内容.内容的编排尽量依循向量分析的体系，以便于读者明了向量分析的全貌及各部分内容的内在联系.

二　向量函数的微积分

本章介绍向量微积分的基本内容，包括向量函数的定义与微分，用向量形式给出的曲线方程与曲面方程，以及两种类型的曲线积分与曲面积分．这些内容与数学分析中的结论相似，证明也无本质区别，因此，证明大多从简．

2·1　向量代数复习

本节罗列向量代数的基本内容，供读者复习或查阅．

1．向量与纯量

有长度和方向的量称为**向量**，例如有向线段便是向量．本书用粗体字母表示向量，例如**a**，**A**，**F**等等．

在三维空间的直角坐标系下，向量**A**的x、y、z分量分别记为A_x，A_y，A_z．向量**A**的常用分量记法是：

$$\mathbf{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z) \qquad (1\cdot1)$$

或　　$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$.

其中，i，j，k分别是x，y，z坐标轴的单位坐标向量．

如果把向量A的起点放在坐标原点O，则A的终点坐标为（A_x，A_y，A_z），向量A的长度记为A或|A|，即

$$A=|\mathbf{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}. \qquad (1.2)$$

特别地，起点为O终点为(x，y，z)的向量r称为**位置向量**，即

$$\mathbf{r}=(x, y, z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \qquad (1.3)$$

r的长度$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

与向量相对应，我们把实数称为**纯量**或**数量**，纯量用普通字母表示．

2．向量的代数运算规则

设a，b，c是向量，m，n是纯量，则

（1）$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$,

（2）$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$,

（3）$m(n\mathbf{a})=(mn)\mathbf{a}=n(m\mathbf{a})$,

（4）$(m+n)\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a}$,

（5）$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}$.

3．数量积

数量积又称**内积**或**点积**．两向量a和b的**数量积**是一个数量，它等于向量a和b的长度之积再乘以a与b夹角θ的余弦．

向量a和b的数量积记为$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.即

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos\theta,\ 0\leqslant\theta<\pi.$$

由此式可知，若a，b$\neq$0且$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，则a和b垂直；

反之亦真.

数量积的分量表达式为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_x, a_y, a_z)\cdot(b_x, b_y, b_z)$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (1.4)$$

关于数量积有下列运算规则：

(1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;

(2) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$;

(3) $m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})$
$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})m$;

(4) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$,
$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$.

4. 向量积

向量积又称**外积**或**叉积**. 两向量a和b的向量积是一个向量，记为$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$的长度等于a和b的长度之积再乘以a与b夹角$\theta$的正弦. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的方向垂直于a和b，且使 a，b，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 三向量形成右手系. 因为$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$的长度

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=ab\sin\theta \quad (0\leqslant\theta<\pi),$$

故若 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$，则 $\sin\theta=0$，从而$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}$. 反之亦真.

关于向量积，有下列运算规则：

(1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$;

(2) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$;

(3) $m(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(m\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(m\mathbf{b})$
$=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})m$;

(4) $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{o}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$,
$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$;

（5）$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_x, a_y, a_z)\times(b_x, b_y, b_z)$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

（6）$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$等于以a和b为边的平行四边形的面积。

5．三重积

通过数乘、数量积和向量积可以构成三个向量的多种乘积，统称为**三重积**．例如，$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$，$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$，$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$等都是三重积．关于三重积有下列运算规则：

（1）$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

上式的绝对值等于以a，b，c 为棱的平行六面体的体积．

（2）$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$，

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$。

关于三重积，应注意以下事项：

（1）$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\neq\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$，

（2）$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$，

（3）乘积$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$又称为**纯量三重积**或**混积**，可以略写为$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$，或记为$(\mathbf{abc})$。

（4）乘积$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$又称为**向量三重积**或**三矢积**，其括号不能省略。

6. 多重积

此地只列出三个四重积的公式.

(1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}$

$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

(2) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{abd})\mathbf{c}-(\mathbf{abc})\mathbf{d}$

$$=(\mathbf{cda})\mathbf{b}-(\mathbf{cdb})\mathbf{a}.$$

(3) $\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$

$$-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d}).$$

2·2 向量函数

1. 向量函数

在向量代数中，向量是常向量；但在向量分析的讨论中遇到的是变向量.

定义1 在某个区间$I=[a, b]$上，如果数性变量u的每一个值都对应着一个确定的向量$\mathbf{F}$，则称**向量$\mathbf{F}$是数量u的向量函数**. 记为

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(u).$$

如果在空间选定了某直角坐标系，可将$\mathbf{F}(u)$对各坐标轴进行分解，即

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(u)=F_x(u)\mathbf{i}+F_y(u)\mathbf{j}+F_z(u)\mathbf{k} \tag{2.1}$$

其中$F_x(u)$，$F_y(u)$，$F_z(u)$是u的纯量函数（即一般分析中所见到的实函数）.

2．向量函数的极限和连续

向量函数的这些定义及性质同分析中的非常类似，因而严格的证明从略．

定义2 设在u_0的某个邻域内（u_0 可能除外）$\mathbf{F}=\mathbf{F}(u)$有定义，当u趋于u_0时，向量函数$\mathbf{F}(u)$以常向量$\mathbf{L}$作为**极限**是指：对于任何$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得如果u满足$0<|u-u_0|<\delta$，则$|\mathbf{F}(u)-\mathbf{L}|<\varepsilon$成立．

其中$\mathbf{F}(u)-\mathbf{L}$表示两个向量的差向量，而$|\mathbf{F}(u)-\mathbf{L}|$表示差向量的长．$\mathbf{F}(u)$以$\mathbf{L}$为极限，记为

$$\lim_{u\to u_0}\mathbf{F}(u)=\mathbf{L}.$$

如果将$\mathbf{F}(u)$和$\mathbf{L}$写成分量的形式：

$$\mathbf{F}(u)=F_x(u)\mathbf{i}+F_y(u)\mathbf{j}+F_z(u)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{L}=L_x\mathbf{i}+L_y\mathbf{j}+L_z\mathbf{k},$$

其中L_x，L_y，L_z是常数，则

$$|\mathbf{F}-\mathbf{L}|=\sqrt{(F_x(u)-L_x)^2+(F_y(u)-L_y)^2+(F_z(u)-L_z)^2}. \tag{2.2}$$

于是很容易得出下面的性质：

定理1 $\lim\limits_{u\to u_0}\mathbf{F}(u)=\mathbf{L}$成立的充要条件是

$$\lim_{u\to u_0}F_x(u)=L_x,\quad \lim_{u\to u_0}F_y(u)=L_y,$$

$$\lim_{u\to u_0}F_z(u)=L_z \tag{2.3}$$

成立。

证明：（1）充分性．如果（2.3）成立，则任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 u 满足条件 $0<|u-u_0|<\delta$时，

$$|F_x(u)-L_x|<\varepsilon/\sqrt{3},\ |F_y(u)-L_y|<\varepsilon/\sqrt{3},\ |F_z(u)-L_z|<\varepsilon/\sqrt{3}.$$

于是

$$|\mathbf{F}-\mathbf{L}|<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{\varepsilon^2}{3}}=\varepsilon.$$

（2）必要性．如果 $\lim\limits_{u\to u_0}\mathbf{F}(u)=\mathbf{L}$，则任给 $\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当u满足条件$0<|u-u_0|<\delta$ 时，有

$$|\mathbf{F}-\mathbf{L}|=\sqrt{(F_x(u)-L_x)^2+(F_y(u)-L_y)^2+(F_z(u)-L_z)^2}<\varepsilon.$$

于是

$$|F_x(u)-L_x|<\sqrt{(F_x(u)-L_x)^2+(F_y(u)-L_y)^2+(F_z(u)-L_z)^2}<\varepsilon.$$

同理

$$|F_y(u)-L_y|<\varepsilon,\quad |F_z(u)-L_z|<\varepsilon.$$

所以定理成立．

定义3 设在u_0及u_0的邻域内$\mathbf{F}(u)$有定义，所谓向量函数$\mathbf{F}(u)$**在u_0连续**是指

$$\lim_{u\to u_0}\mathbf{F}(u)=\mathbf{F}(u_0).$$

如果$\mathbf{F}(u)$在定义域I内每一点都连续，则称$\mathbf{F}(u)$在I中是连续的．在不引起混淆时，也简称$\mathbf{F}(u)$是连续的．以后总假定在$a\leqslant u\leqslant b$中$\mathbf{F}(u)$是连续的．

定理2 $\lim\limits_{u \to u_0} \mathbf{F}(u) = \mathbf{F}(u_0)$成立的充要条件是

$$\lim_{u \to u_0} F_x(u) = F_x(u_0), \quad \lim_{u \to u_0} F_y(u) = F_y(u_0),$$

$$\lim_{u \to u_0} F_z(u) = F_z(u_0). \qquad (2.4)$$

证明和上一定理相似，故从略．由这两个定理可知，向量函数的极限和连续性可由纯量函数的极限和连续性推出，于是有：

定理3 如果向量函数$\mathbf{F}(u)$和$\mathbf{G}(u)$以及纯量函数$\varphi(u)$在u_0点是连续的，则有

（1）$\lim\limits_{u \to u_0} |\mathbf{F}(u)| = |\mathbf{F}(u_0)|$；

（2）$\lim\limits_{u \to u_0} (\varphi(u)\mathbf{F}(u)) = \varphi(u_0)\mathbf{F}(u_0)$；

（3）$\lim\limits_{u \to u_0} (\mathbf{F}(u) + \mathbf{G}(u)) = \mathbf{F}(u_0) + \mathbf{G}(u_0)$；

（4）$\lim\limits_{u \to u_0} (\mathbf{F}(u) \cdot \mathbf{G}(u)) = \mathbf{F}(u_0) \cdot \mathbf{G}(u_0)$；

（5）$\lim\limits_{u \to u_0} (\mathbf{F}(u) \times \mathbf{G}(u))$

$= \mathbf{F}(u_0) \times \mathbf{G}(u_0)$．

证明：本定理很容易证明，兹选证其（4）．

设 $\mathbf{F}(u) = (F_x(u), F_y(u), F_z(u))$；

$\mathbf{G}(u) = (G_x(u), G_y(u), G_z(u))$．

因为$\mathbf{F}(u)$，$\mathbf{G}(u)$在u_0连续，由定理2知各分量在u_0