曲線繩正法原理

黃翩飛編著

龍門聯合書局出版

曲線繩正法原理

黃翮飛編著

龍門聯合書局出版

自　序

本書撰述的動機，已詳初版前言．事實告訴我們，要掌握技術而又要嫻熟和準確，必須精通原理，糾正單憑公式記憶和狹隘實用主義的偏向． 本書就希望能適應這個要求，供人民鐵道養路員工同志們和普通職校乃至專科以上學校鐵路或土木系師生的學習參考． 目前鐵路職工鑽研學習的熱情日益增高，對於工作有關的技術業務，不以知其當然爲足，而想深入徹底研究，以求知其所以然． 由理論的正確認識糾正實踐中的偏差，指導實踐的進展；復從現場實踐中，引證理論，發現問題，批判得失，增進學驗，發展眞理；這是一個顚撲不破的道理． 本書初版問世，僅印了二百本，當時卽銷售一空，而各方面需索仍紛至沓來，也正反映工作同志們對於學理研求的熱情． 這種學習的熱情，給我很大的鼓勵，決計修訂補充並商請龍門聯合書局再版刊行，以應許多養路員工的需要．

我國有些鐵路的單曲線或複曲線，原來半徑不夠大，兩端又尙未敷設緩和曲線，對於行車鋪道兩不相宜，現需插設緩和曲線，如照過去常用的偏角法，在行車路段施測，很成問題． 而切線支距法及引弦偏距法，又不及彎道量弦之準確便利． 所以用全面繩正法撥道插入緩和曲線，較能切合實用． 一般員工祇要對繩正法原理精通，自能運用自如，無往而不可． 根據東北某鐵路局一九五〇年養路工作的報導，全面繩正法撥道插入緩和曲線已在實行． 因爲由現場體驗到：撥正彎道在曲線始終點上是有問題的，用儀器校正也困難，必須經過大修，用繩正法

校正。在兩個多月當中，一面學習，一面工作，已修好了千餘處彎道，除幾個半徑較大的曲線外，差不多已全加上緩和曲線。這些無異說明學習理論和實際結合的重要。倘理論欠瞭解，就不易掌握撥正法來撥正彎道、插設緩和曲線，和解決實踐中的困難問題。

最後須附述的是：本書在石家莊初版尚未校印完成，我即調京工作。加以承印單位對於科技圖書的摹繪排版校刊工作，尚欠嫻熟，致印出後，發現不少錯誤。雖後經改正銷行，仍不免疏忽遺漏，至今引爲歉憾。現經審愼修正補充，內容較前充實，並改請龍門聯合書局出版，但仍希望閱者隨時指正，以便將來重印時，更求完善。

作 者 誌 1951 年 2 月於北京

目　　錄

曲線繩正法原理

(一)曲線半徑及弦長和縱距的關係公式

甲、圓曲線弦正矢(中央縱距)的公式

設 R＝圓半徑，C＝弦長，卽圖 1 之 ab；

M＝正矢，卽圖 1 之 de，則

$$R^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2+(R-M)^2,$$

$$M=\frac{C^2}{4(2R-M)}=\frac{C^2}{8R}\cdots\cdots\cdots(1)$$

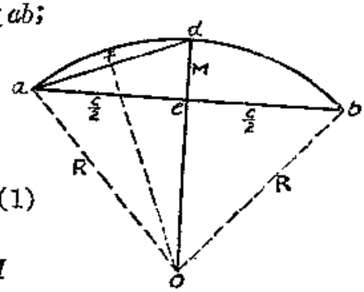

圖 1

因 M 較 $2R$ 爲數甚小，故將 $2R-M$ 中之 M 省略，以解出(1)式，當無明顯差誤。

(1)式又一證法： 作 $of\perp ad$

則 Δade 與 Δdfo 相似

$$\therefore\ de:df=ad:do\qquad 卽\ M:\frac{ad}{2}=ad:R$$

$$M=\frac{\overline{ad}^2}{2R}=\frac{\overline{ae}^2}{2R}=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R}=\frac{C^2}{8R}$$

因 ad 與 ae 長度相差甚微，故上式取近似代入法。

乙、圓曲線弦上任一點的縱距公式

設 de 爲 ab 弦上任一點 e 之縱距，見圖 2． 通過 e,o 兩點作 fg，聯 bg，af 線。

命 $de=V$，　$hk=M$，　$fe=y$，則

$\angle eaf=\angle bge$ 因兩角同以 $\frac{1}{2}\widehat{bf}$ 度之.

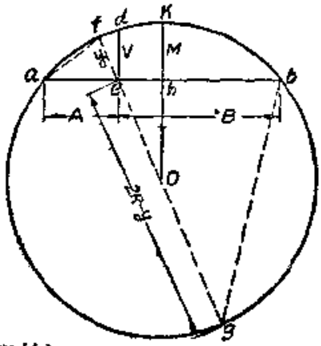

圖 2

同理，$\angle afe=\angle abg$，又 $\angle aef=\angle beg$，

故 $\triangle aef$ 與 $\triangle beg$ 相似，

$\therefore\quad ae:eg=ef:eb$

即　　$A:2R-y=y:B$

$$y=\frac{AB}{2R-y}=\frac{AB}{2R}\text{(近似值)}.$$

因 y 與 V 值相差甚微，故取 V 代 y 而得 $V=\dfrac{AB}{2R}$ ……………………(2)

(2)式另一證法，見圖 3，求 ab 弦上任一點 e 的縱距 V.

由 g 作 $gd'\parallel ab$，交 de 之引長線於 d'，

則　$M=hg=\dfrac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R}$，$dd'=\dfrac{p^2}{2R}$(近似值)

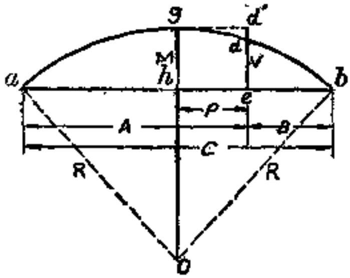

圖 3

$$V=de=M-dd'=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R}-\frac{p^2}{2R},$$

$$=\frac{\left(\frac{C}{2}+p\right)\left(\frac{C}{2}-p\right)}{2R}=\frac{AB}{2R}\text{(近似值)}.$$

如求弦上四分之一處的縱距 V，則

$$V=\frac{\frac{3}{4}C\times\frac{1}{4}C}{2R}=\frac{3C^2}{32R}$$

丙、複曲線弦正矢的公式

求複曲線 ab 弦上的正矢 M_c，見圖 4，以 o_1 爲圓心，R_1 爲半徑，自 d

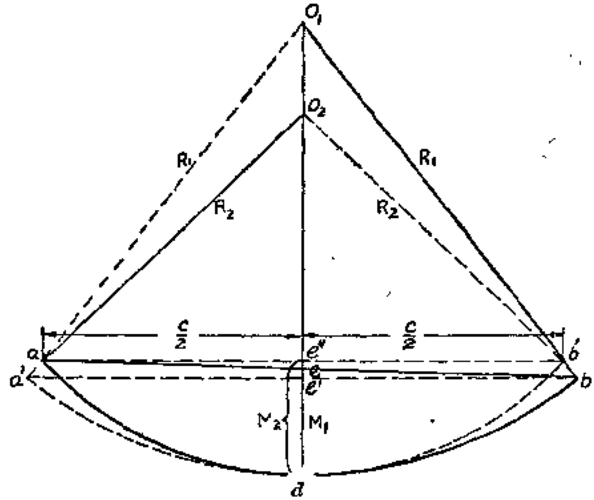

圖 4

作圓弧 da'; 以 o_2 爲圓心, R_2 爲半徑, 自 d 作圓弧 db'. 聯 $a'b$ 及 ab', 交 o_1d 於 e' 及 e''. 命 de' 爲 M_1, de'' 爲 M_2, de 爲 M_c, 則

$$M_1=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R_1}=\frac{C^2}{8R_1},\quad M_2=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R_2}=\frac{C^2}{8R_2},$$

$$M_c=\frac{1}{2}(M_1+M_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{8R_1}+\frac{C^2}{8R_2}\right)$$

$$=\frac{C^2}{16}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdots\cdots(3)$$

(二)圓曲線始終點的正矢及相鄰點的縱距率

甲、測點正在圓曲線始終點時, 求其正矢

如圖 5, 測點 b 正在圓曲線的始點或終點, 則測點 b 的正矢

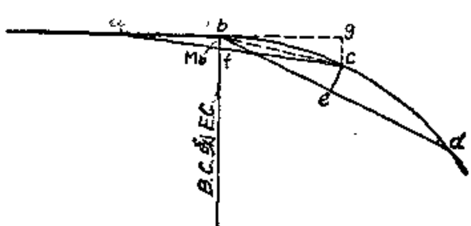

圖 5

$$M_b=\frac{M_c}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

證明:　引長 ab 至 g, 作 $cg\perp bg$, 聯 bc, 則

$\angle cbg$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{bc}$ 度之,

$\angle cbe$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{cd}$ 度之,　　但 $\widehat{bc}=\widehat{cd}$,

故　　$\angle cbg=\angle cbe$.　又 bc 公共,

所以　　$\triangle bcg=\triangle bce$,　　$cg=ce$,

在 $\triangle acg$ 內　　$af=fc$, 於是, $bf=\frac{cg}{2}=\frac{ce}{2}$,

即　　$M_b=\frac{M_c}{2}$

乙、測點不在圓曲線始終點時,求始終點前後相鄰測點的縱距率

如圖 6,設 C 點為 B.C. 或 E.C. ,自 C 引長切線至 d, 作 $d3\perp cd$. 命 $d3$ 為 t_2. 自 c 向後引圓弧 ce 交 M_1 於 e. 命 $e2$ 為 t_1, 聯 $e4$ 線,命 M 為圓曲線的正常正矢.

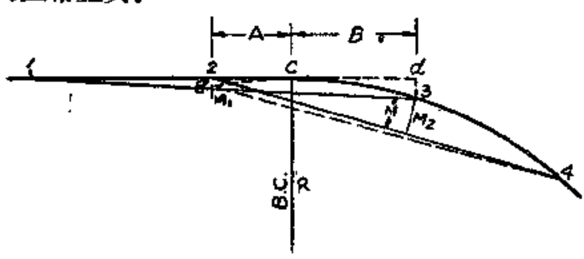

圖 6

則　　$t_1=\frac{A^2}{2R}$,　$t_2=\frac{B^2}{2R}$.　(由相似△證之)

測點 2 的正矢　$M_1=\frac{t_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{2R}$

$$=\frac{B^2}{4\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}=\frac{M\cdot B^2}{2(A+B)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

由 ~~中中記明~~ ~~$\frac{t}{2}=M$~~

由前式記明 及 $M=\frac{(A+B)^2}{2R}$ ∴ $R=\frac{(A+B)^2}{2M}$

測點 3 的正矢 $M_2=M-\frac{t_1}{2}=M-\frac{1}{2}\cdot\frac{A^2}{2R}$

$$=M-\frac{A^2}{4\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}=M-\frac{M\cdot A^2}{2(A+B)^2}$$

$$=M\left[1-\frac{A^2}{2(A+B)^2}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

第(6)式可另證如圖 7,在 $\triangle 2e4$ 內

$$y_1+M_2=\frac{y_2}{2},\text{ 故 }\quad M_2=\frac{y_2}{2}-y_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{(A+2B)^2}{2R}-\frac{B^2}{2R}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(A+2B)^2}{2\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}-\frac{B^2}{2\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}$$

$$M\cdot\frac{A^2+4AB+2B^2}{2(A+B)^2}=M\left[1-\frac{A^2}{2(A+B)^2}\right]$$

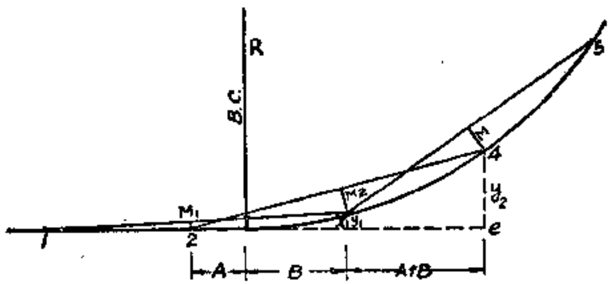

圖 7

設 $B.C.$ 距測點 2 為 3.5 公尺,距測點 3 為 6.5 公尺,則

A 之距離比率 $=\frac{3.5}{10}=0.35$, B 之距離比率 $=\frac{6.5}{10}=0.65$

A 端測點 2 之縱距率 $=\frac{B^2}{2(A+B)^2}=\frac{\overline{0.65}^2}{2(0.35+0.65)^2}=0.2113$

B 端測點 3 之縱距率 $=1-\frac{A^2}{2(A+B)^2}=1-\frac{\overline{0.35}^2}{2(0.35+0.65)^2}=0.9388$

上兩數和查表所得相符(參閱本書末所附撥道法第一表)。

倘圓曲線正矢 $M=100\text{mm}$，則

測點 2 的正矢 $=100\times0.2113=21.13\text{mm}\fallingdotseq21\text{mm}$

測點 3 的正矢 $=100\times0.9388=93.88\text{mm}\fallingdotseq94\text{mm}$

(三)螺旋形緩和曲線有關原理的說明

螺旋形緩和曲線的超高 e 自緩和曲線始點 $T.S.$ 始，隨曲線長 l 之漸增而遞增，故 e 和 l 成正比，即 $e\propto l$，或

$\frac{e}{l}=K$(常數)。 但 $e=\frac{gV^2}{GR}$，其中 g 爲軌距，G 爲重力所生之加速度，

故 $\frac{e}{l}=\frac{gV^2}{GRl}=K$，或 $Rl=\frac{gV^2}{GK}$。 因 g,V,G,K 均係常數，

$$\therefore\ Rl=C(\text{常數})\quad\text{於是，}\quad Rl=R_cl_c\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (7)$$

其中 l_c 爲緩和曲線全長，R_c 爲圓曲線半徑。

參看圖 8，$Rds=dl$，

$$ds=\frac{dl}{R}=\frac{ldl}{R_cl_c}$$

$$\therefore\ s=\int_o^l\frac{ldl}{R_cl_c}=\frac{l^2}{2R_cl_c}\ \cdots(8)$$

因 S 角值通常很小，故可命

$\sin s=s$。

於是 $dy=sdl=\frac{l^2dl}{2R_cl_c}$，

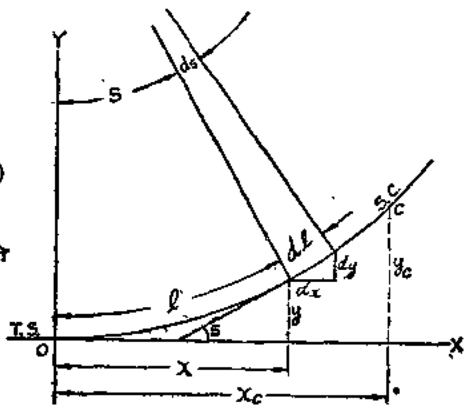

圖 8

$$\therefore\ y=\int_o^l\frac{l^2dl}{2R_cl_c}=\frac{l^3}{6R_cl_c}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (9)$$

(9)式叫做三次螺旋線公式，連同(7)式，對於解釋緩和曲線繩正法的原理，很有關係，故須先予引證。

設 m=超高度遞減率， 則 $l_c=me$

(7)式變爲　　$C=R_cl_c=R_cme$ ……………………………(7a)

(9)式變爲　　$y=\frac{l^3}{6C}=\frac{l^3}{6meR_c}$ ……………………………(9a)

(四)求緩和曲線的正矢原理

甲、測點正在緩和曲線的始終點時，求始終點的正矢

見圖 9，設 M_0 爲 $T.S.$ 的正矢，M_1 爲緩和曲線上測點 1 的正矢，y_1 爲該點至切線 AX 的支距，等於 $E1$；l_1 爲緩和曲線等分長度。 則

$$l_c=nl_1, \qquad R_1=nR_c,$$

$$R_cl_c=\frac{R_1}{n}\cdot nl_1=R_1l_1$$，用公式(7)亦可直接寫出。

用公式(9)　　$_1y=\frac{l_1^3}{6R_1l_1}=\frac{l_1^2}{6R_1}$

因緩和曲線內任何點之左右矩距，比同度之圓曲線變動甚微，故正

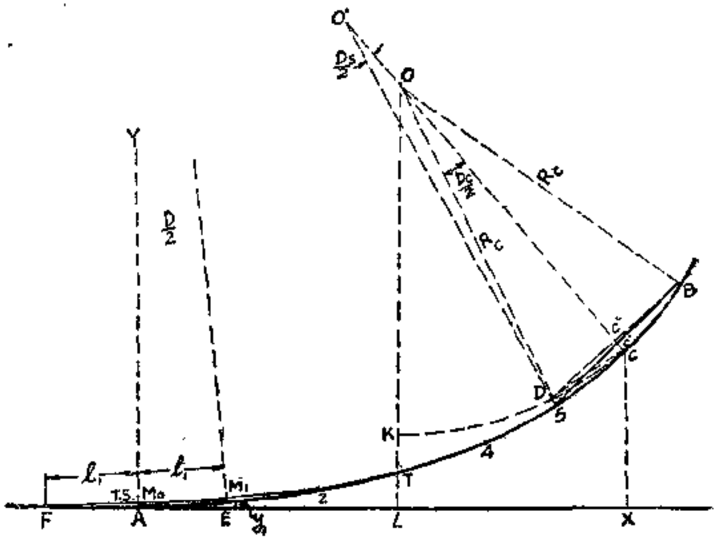

圖 9

矢之計算,仍利用圓曲線公式,當無甚明顯差誤.

於是 $M_1=\frac{l_1^2}{2R_1}$. 在 $\triangle FE1$ 內, $M_0=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{l_1^3}{6R_1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{l_1^2}{2R_1}$

$$=\frac{1}{6}M_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

任何三次螺旋線的曲度 D,從 $T.S.$ 起隨長度 l 均勻增大,即 $\frac{D}{D_c}=\frac{l}{l_c}$,如圖 9,當 $A1=C5$ 時,測點 1 之曲度必等於測點 5 之圓曲線和螺旋線的曲度之差. 具體說來,設 ATC 螺旋線為 6 等分,每等分弦長 l 等於 10 公尺,則 $A1$ 所夾中心角為 $\frac{D}{2}$,$C5$ 所夾中心角為 $\frac{D_5}{2}$.

$$\frac{D/2}{D_c/2}=\frac{l}{l_c},\text{即 } \frac{D}{D_c}=\frac{l}{6l}=\frac{1}{6} \qquad D_c=6D \cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\frac{D_5/2}{D_c/2}=\frac{l_5}{l_c},\text{即 } \frac{D_5}{D_c}=\frac{5l}{6l}=\frac{5}{6} \qquad D_5=\frac{5}{6}D_c \cdots\cdots (b)$$

從$(a)(b)$兩式得 $D_5=5D$, $\therefore D_c-D_5=6D-5D=D$,

或寫為

$$\frac{D_c-D_5}{2}=\frac{D}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

再看圖 9 三角形的幾何關係:

在 $\triangle DOC$ 內, $DO=CO=R_c$, 故 $\angle DCO=\angle CDO$,

$$\angle DCO=\frac{180°-\angle COD}{2}=90°-\frac{D_c}{4}$$

在 $\triangle CO'5$ 內, $O'5=O'C$, 故 $\angle C5O'=\angle 5CO'$,

$$\angle 5CO'=\frac{180°-\angle O'}{2}=90°-\frac{D_5}{4}$$

於是 $\angle DC5=\angle 5CO'-\angle DCO$

$$=90°-\frac{D_5}{4}-\left(90°-\frac{D_c}{4}\right)=\frac{D_c-D_5}{4}$$

又 $\angle EA1=\frac{1}{2}\times\frac{D}{2}=\frac{D}{4}=\frac{D_c-D_5}{4}$, $\therefore \angle EA1=\angle DC5$

在 $\triangle AE1$ 及 $DC5$ 內，$E1=A1\sin EA1$，$D5=C5\sin DC5$

今 $A1=C5$，$\angle EA1=\angle DC5$，故 $E1=D5$。

換言之，無論自切線 AL 或曲線 CK，在定距內螺旋線度數的偏差相同，故離 O 一定距之螺旋線支距，必與離 A 一定距之支距相等。因無論自切線或曲線距離相當各點度數之變化永同。

又圖 9，DCB 爲圓曲線，CC'' 爲圓曲線的正矢 $=M_c$，則 CC' 爲緩和曲線與圓曲線交點的正矢，即等於

$$CC''-C'C''=M_c-\frac{D5}{2}=M_c-\frac{E1}{2}$$

$E1$ 即圖 9 中之 y_1，　$y_1=\frac{l_1^2}{6R_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{l_1^2}{2R_1}=\frac{1}{3}M_1$，

所以　$$CC'=M_c-\frac{E1}{2}=M_c-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M_1=M_c-\frac{1}{6}M_1 \cdots\cdots (12)$$

由(10)，(12)兩公式得一定理：測點正在緩和曲線的始終點時，緩和曲線與直線交點處的正矢，爲遞加尺寸的 $\frac{1}{6}$；緩和曲線與圓曲線交點處的正矢，爲由圓曲線的正矢減去 $\frac{1}{6}$ 之遞加尺寸。

茲引實例說明如下：

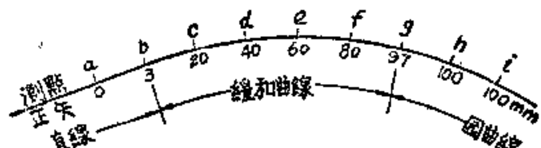

圖 10

設圓曲線的正矢 $=100$mm（見圖 10），緩和曲線長（b至g）爲 5（指 5 個單位距離），於是

正矢的遞加尺寸 $=100\text{mm}\div5=20\text{mm}$，

測點 c 的正矢 $=20\times1=20$mm，

測點 d 的正矢 $=20\times2=40$mm，

測點 e 的正矢$=20\times 3=60$mm,

測點 f 的正矢$=20\times 4=80$mm,

測點 b 的正矢$=20\times\frac{1}{6}=3$mm(用第 10 公式),

測點 g 的正矢$=100-20\times\frac{1}{6}=97$mm(用第 12 公式).

由上述知 b,g 亦即 $T.S.$ 和 $S.C.$ 的正矢求法,採用$\frac{1}{6}$之數值,乃係有理論的根據的.

乙、測點不在緩和曲線的始終點時,求始終點前後相鄰測點正矢的縱距率

先舉例說明,見圖 11.

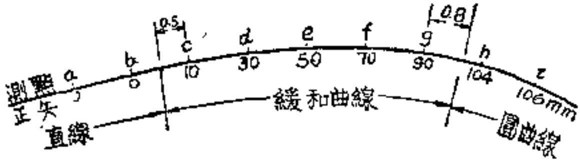

圖 11

設圓曲線的正矢爲 106 mm,緩和曲線的遞加尺寸爲$\frac{106}{5.3}=20$mm.

測點 d 的正矢$=20\times 1.5=30$mm,

測點 e 的正矢$=20\times 2.5=50$mm,

測點 f 的正矢$=20\times 3.5=70$mm.

次求緩和曲線始點前後測點 b, c 的正矢,距離比率已知爲 0.5,查表(本書末所附撥道法第二表)得

A 端 b 的縱距率$=0.0208$,

測點 b 的正矢 $=20\times 0.0208=0.416\text{mm}\fallingdotseq 0$.

B 端 c 的縱距率$=0.5208$,

測點 c 的正矢 $=20\times 0.5208=10.416\text{mm}\fallingdotseq 10$mm.

再求緩和曲線終點前後的測點 g, h 的正矢,距離比率 0.8, 0.2.

查表得

C 端 g 的縱距率$=0.8013$,

測點 g 的正矢$=106-(20\times0.8013)=90$mm。

D 端 h 的縱距率$=0.0853$,

測點 h 的正矢$=106-(20\times0.853)=104$mm。

究竟上述 A,B,C,D 各端點的縱距率如何算出，待演下列公式證明。

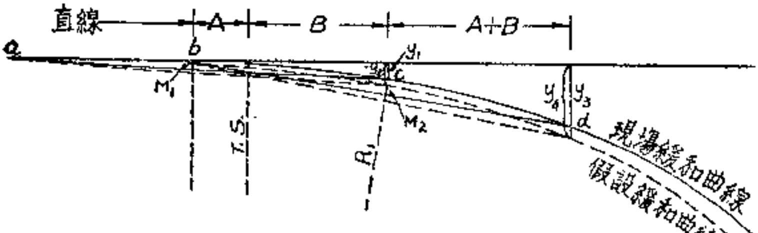

圖 12

見圖 12，設 M_1 爲測點 b 的現場正矢，M_2 爲測點 c 的現場正矢，y_1 爲現場緩和曲線上測點 c 的支距，y_2 爲假設自測點 b 始的緩和曲線上測點 c 的支距，

則 $$M_1=\frac{y_1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{B^3}{6R_cl_c}=\frac{B^3}{12R_cl_c}\text{(用公式 9)}.$$

假設緩和曲線自測點 b 始，則測點 b 的正矢變爲 M_1'，測點 C' 的正矢變爲 M_2'.

$$M_1'=\frac{y_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(A+B)^3}{6R_cl_c}=\frac{(A+B)^3}{12R_cl_c}$$

於是 $$M_1:M_1'=\frac{B^3}{12R_cl_c}:\frac{(A+B)^3}{12R_cl_c}=B^3:(A+B)^3$$

$$\therefore\quad M_1=\frac{M_1'\cdot B^3}{(A+B)^3}=\frac{M_2'\cdot B^3}{6(A+B)^3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

設 y_3 爲現場緩和曲線上測點 d 的支距，y_4 爲假設自測點 b 始的緩和曲線上測點 d 的支距；則測點 c 的現場正矢增加量爲