

# 现代数字信号处理

Modern Digital Signal Processing

皇甫堪 陈建文 楼生强 编著



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

# 现代数字信号处理

## Modern Digital Signal Processing

皇甫堪 陈建文 楼生强 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书全面、系统地阐述了现代数字信号处理的理论、方法及其应用。全书共分13章,主要内容包括:基础知识,平稳过程的线性模型,确定性最小二乘滤波器,统计性最小二乘滤波器,自适应滤波器,现代功率谱估计,离散希尔伯特变换,同态信号处理,高阶谱估计,短时傅里叶变换,小波变换,维格纳分布和多速率信号处理。每章末给出了大量的习题,并在书后附有参考文献。

本书既可作为高等学校信息与通信工程专业及相关专业高年级本科生、硕士生、博士生的教材和参考书,也可作为企、事业单位从事通信与电子系统、信号与信息处理等相关工作的广大科技工作人员的参考书和培训教材。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

现代数字信号处理/皇甫堪,陈建文,楼生强编著. —北京:电子工业出版社,2003.9  
ISBN 7-5053-9181-X

I. 现… II. ①皇…②陈…③楼… III. 数字信号—信号处理—高等学校—教材 IV. TN911.92  
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 084600 号

责任编辑:刘宪兰      特约编辑:联霞  
印 刷:北京大中印刷厂  
出版发行:电子工业出版社 <http://www.phei.com.cn>  
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编100036  
经 销:各地新华书店  
开 本:787×980 1/16 印张:31 字数:658千字  
版 次:2003年9月第1版 2003年9月第1次印刷  
印 数:6000册 定价:38.00元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn),盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

# 前言

现代数字信号处理是一门发展十分迅速的前沿交叉性学科,在通信、导航、雷达、声呐、地震勘探及生物医学等领域都有着广泛的应用。近几十年来,在现代数字信号处理的理论、方法及其应用方面均取得了长足的发展,有关论文及专著也不断涌现,但是,能够紧跟其发展的研究生(硕士生、博士生)教材却数量甚少,难以满足该学科领域研究生教学和培养专业技术人才的需要。本书的编写旨在跟随现代数字信号处理理论和技术的发展,补充该学科领域研究生教材的不足。

全书共分 13 章,其主要内容可概括如下:

第 1 章回顾了离散随机信号的基础知识,由相关抵消的讨论引出最佳线性估计的概念,并阐明了最佳线性估计理论中的两个重要概念——新息和偏相关系数。

第 2 章介绍了平稳随机过程的三种标准线性模型:AR(自回归)模型、MA(动平均)模型和 ARMA(自回归动平均)模型,讨论了平稳过程的一般线性表示。

第 3 章和第 4 章讨论最小二乘滤波器,这种滤波器的特性完全取决于输入信号的特性。最小二乘滤波器的输入信号可以是确定性信号,也可以是统计性信号,相应的最小二乘准则也可分为确定性的最小二乘准则和统计性的最小二乘准则。第 3 章根据确定性的最小二乘准则进行确定性的最小二乘滤波器的讨论,而第 4 章讨论统计性最小二乘滤波器。

第 5 章介绍自适应滤波器的基本理论及应用,分析了两类最常用的自适应滤波器——最小均方误差(LMS)自适应滤波器和递推最小二乘(RLS)自适应滤波器,其中主要包括 LMS 自适应横向滤波器、LMS 自适应 IIR 滤波器、LMS 自适应格型滤波器、RLS 自适应横向滤波器、RLS 自适应格型滤波器和快速横向滤波(FTF)自适应滤波器。

第 6 章讨论功率谱估计,包括经典谱估计和现代谱估计两部分内容。经典谱估计主要讨论周期图法和 BT 法,而现代谱估计主要讨论参数模型(AR, MA, ARMA)法,尤以 AR 参数模型法为主要内容。

第 7 章讨论离散希尔伯特变换,介绍傅里叶变换的实部和虚部之间,以及复序列的实部和虚部之间的各种关系。

第 8 章介绍同态滤波器原理和两类常用同态滤波器(乘法同态系统和卷积同态系统)的构成及其应用,并讨论复倒谱的概念、性质、计算方法及其实际应用。

第 9 章介绍高阶矩、高阶累积量及其谱的定义,讨论高阶累积量及其谱(高阶谱)在信号处理中的应用。

第 10 章、第 11 章和第 12 章介绍三种常见的信号时频分析方法的理论及其应用,即

短时傅里叶变换(STFT)、小波变换(WT)和维格纳分布(WD)。其中,第10章讨论了连续短时傅里叶变换和序列短时傅里叶变换的定义和性质,介绍了短时傅里叶分析和综合的原理和方法;第11章介绍了连续小波变换、二进小波变换和多分辨率分析的概念、性质及其物理意义,讨论了小波的构造,并给出了小波的例子;第12章介绍了连续维格纳分布和离散信号的维格纳分布的定义、性质及其例子,分析了连续信号的维格纳分布和相应离散信号维格纳分布的关系,讨论了广义时频分布的物理含义及其和WD,伪WD,STFT,小波变换之间的联系,并讨论了交叉项的消除方法和自适应核设计的方法。

第13章主要介绍多速率信号处理的基本概念、多速率信号处理的实现及其应用,讨论了二通道滤波器组、均匀 $M$ 通道滤波器组、调制滤波器组、线性相位滤波器组的基本概念、设计方法及其实现。

书中凝结了作者多年从事该课程研究生教学的心得,为了保证系统性及可读性,还对引用资料进行了重新整理、推导和补充。本书的特点是:内容丰富,条理清晰,对基本概念、基本理论和方法的叙述,力求深入浅出、准确,理论与应用紧密结合。书中第2,3,4,6章由皇甫堪撰写,第1,5,7,8章由陈建文撰写,第9,10,11,12,13章由楼生强撰写。全书由皇甫堪统稿、修改、审定后定稿,由陈建文完成整理和校对工作。

由于作者水平有限,书中缺点和错误在所难免,敬请广大读者批评、指正。

本书得到国防科技大学研究生教材出版基金的资助,在此表示感谢。

编著者

2003年6月

于国防科学技术大学



# 目录

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| <b>第 1 章 基础知识</b> .....              | 1  |
| 1.1 离散随机信号 .....                     | 2  |
| 1.1.1 离散随机过程 .....                   | 2  |
| 1.1.2 集合平均与时间平均 .....                | 3  |
| 1.1.3 相关序列和协方差序列的性质 .....            | 8  |
| 1.1.4 功率谱与周期图 .....                  | 9  |
| 1.1.5 线性系统对随机信号的响应 .....             | 11 |
| 1.2 相关抵消 .....                       | 14 |
| 1.3 Gram-Schmidt 正交化 .....           | 16 |
| 1.3.1 基本定义 .....                     | 16 |
| 1.3.2 正交投影定理和 Gram-Schmidt 正交化 ..... | 18 |
| 1.3.3 新息 .....                       | 20 |
| 1.4 偏相关系数 .....                      | 21 |
| 习题 1 .....                           | 22 |
| <b>第 2 章 平稳过程的线性模型</b> .....         | 25 |
| 2.1 AR 过程 .....                      | 26 |
| 2.1.1 AR(1)模型 .....                  | 26 |
| 2.1.2 AR(2)模型 .....                  | 29 |
| 2.1.3 AR( $p$ )模型 .....              | 32 |
| 2.2 MA 过程 .....                      | 34 |
| 2.3 ARMA 过程 .....                    | 35 |
| 2.4 平稳随机过程的一般线性表示 .....              | 37 |
| 2.5 各种线性模型之间的关系 .....                | 40 |
| 习题 2 .....                           | 42 |
| <b>第 3 章 确定性最小二乘滤波器</b> .....        | 45 |
| 3.1 确定性最小二乘滤波器的正则方程 .....            | 46 |
| 3.2 最小二乘滤波器的渐近性 .....                | 50 |
| 3.3 最小二乘逆滤波器 .....                   | 52 |
| 3.4 白化滤波器 .....                      | 56 |
| 3.5 白化滤波器的分解 .....                   | 59 |
| 习题 3 .....                           | 61 |

|   |     |
|---|-----|
| 第4章 统计性最小二乘滤波器 .....  | 63  |
| 4.1 统计性最小二乘滤波器的引出 .....   | 64  |
| 4.2 统计性最小二乘滤波器的正则方程 .....   | 65  |
| 4.3 求解统计性最小二乘滤波器的信号模型 .....   | 69  |
| 4.3.1 白噪声通过线性滤波器 .....  | 69  |
| 4.3.2 信号模型的建立 .....   | 70  |
| 4.3.3 统计性最小二乘与确定性最小二乘的对应性 .....   | 71  |
| 4.4 最佳线性平滑维纳滤波器 .....   | 72  |
| 4.5 最佳线性滤波维纳滤波器 .....   | 75  |
| 4.5.1 因果 IIR 滤波器 .....  | 75  |
| 4.5.2 因果 FIR 滤波器 .....  | 77  |
| 4.6 最佳线性预测维纳滤波器 .....   | 79  |
| 4.6.1 因果 IIR 预测器 .....  | 79  |
| 4.6.2 FIR 单步预测器 .....   | 81  |
| 4.6.3 线性预测误差滤波器 .....   | 84  |
| 4.7 Levinson-Durbin 算法和格型滤波器 .....  | 86  |
| 4.7.1 Levinson-Durbin 算法 .....  | 86  |
| 4.7.2 反射系数(Reflection Coefficient) .....  | 90  |
| 4.7.3 格型滤波器(Lattice Filter) .....   | 90  |
| 4.7.4 $\{a_{M1}, a_{M2}, \dots, a_{MM}\}$ 和 $\{K_1, K_2, \dots, K_M\}$ 的等效性 ..... | 92  |
| 习题 4 .....  | 93  |
| 第5章 自适应滤波器 .....  | 97  |
| 5.1 LMS 自适应横向滤波器 .....  | 98  |
| 5.1.1 基本原理 .....  | 98  |
| 5.1.2 均方误差性能曲面 .....  | 101 |
| 5.1.3 梯度法 .....   | 105 |
| 5.1.4 梯度法的收敛特性 .....  | 105 |
| 5.1.5 LMS 算法 .....  | 107 |
| 5.1.6 LMS 算法的收敛特性 .....   | 107 |
| 5.1.7 超量均方误差 .....  | 111 |
| 5.2 LMS 自适应 IIR 滤波器 .....   | 112 |
| 5.3 LMS 自适应格型滤波器 .....  | 115 |
| 5.4 RLS 自适应横向滤波器 .....  | 119 |
| 5.4.1 最小二乘基本原理 .....  | 119 |
| 5.4.2 RLS 自适应横向滤波器 .....  | 123 |
| 5.4.3 RLS 自适应横向滤波器的收敛特性 .....   | 126 |
| 5.5 RLS 自适应滤波器的矢量空间分析 .....   | 130 |

|              |                          |            |
|--------------|--------------------------|------------|
| 5.5.1        | 希尔伯特空间 .....             | 130        |
| 5.5.2        | 投影矩阵与正交投影矩阵 .....        | 132        |
| 5.5.3        | 时间更新 .....               | 134        |
| 5.5.4        | 最小二乘估计归结于矢量空间问题 .....    | 138        |
| 5.6          | RLS 自适应格型滤波器 .....       | 140        |
| 5.6.1        | 前向预测与后向预测 .....          | 140        |
| 5.6.2        | 预测误差滤波器的格型结构 .....       | 144        |
| 5.6.3        | 最小二乘格型(LSL)算法 .....      | 146        |
| 5.6.4        | LSL 自适应算法的性能 .....       | 149        |
| 5.7          | 快速横向滤波(FTF)自适应滤波器 .....  | 151        |
| 5.7.1        | FTF 算法的四个横向滤波器 .....     | 151        |
| 5.7.2        | 横向滤波算子的时间更新 .....        | 157        |
| 5.7.3        | FTF 自适应算法 .....          | 159        |
| 5.8          | 自适应滤波器的应用 .....          | 168        |
| 5.8.1        | 自适应干扰抵消 .....            | 168        |
| 5.8.2        | 自适应预测 .....              | 169        |
| 5.8.3        | 自适应建模 .....              | 169        |
|              | 习题 5 .....               | 170        |
| <b>第 6 章</b> | <b>功率谱估计</b> .....       | <b>175</b> |
| 6.1          | 经典功率谱估计 .....            | 176        |
| 6.1.1        | 间接法 .....                | 176        |
| 6.1.2        | 直接法 .....                | 179        |
| 6.1.3        | 直接法与间接法的关系 .....         | 179        |
| 6.1.4        | 直接法和间接法估计的质量 .....       | 180        |
| 6.1.5        | 周期图的改进 .....             | 187        |
| 6.1.6        | 需要讨论的几个问题 .....          | 191        |
| 6.2          | AR 模型功率谱估计 .....         | 195        |
| 6.2.1        | AR 模型功率谱估计的引出 .....      | 195        |
| 6.2.2        | AR 模型谱估计的性质 .....        | 198        |
| 6.2.3        | AR 模型参数提取方法 .....        | 208        |
| 6.2.4        | 噪声对 AR 谱估计的影响 .....      | 218        |
| 6.2.5        | AR 模型阶次的选择 .....         | 220        |
| 6.3          | MA 模型功率谱估计 .....         | 222        |
| 6.4          | ARMA 模型功率谱估计 .....       | 225        |
|              | 习题 6 .....               | 228        |
| <b>第 7 章</b> | <b>离散希尔伯特变换</b> .....    | <b>231</b> |
| 7.1          | 因果序列傅里叶变换实部和虚部的充分性 ..... | 233        |



|              |                            |            |
|--------------|----------------------------|------------|
| 7.2          | 最小相位条件 .....               | 238        |
| 7.3          | 离散傅里叶变换的希尔伯特变换关系 .....     | 239        |
| 7.4          | 复序列的希尔伯特变换关系 .....         | 244        |
| 7.4.1        | 希尔伯特变换器的设计 .....           | 247        |
| 7.4.2        | 带通信号的表示 .....              | 250        |
| 7.4.3        | 带通采样 .....                 | 253        |
|              | 习题 7 .....                 | 255        |
| <b>第 8 章</b> | <b>同态信号处理</b> .....        | <b>257</b> |
| 8.1          | 广义叠加原理 .....               | 258        |
| 8.2          | 乘法同态系统 .....               | 259        |
| 8.3          | 卷积同态系统 .....               | 261        |
| 8.4          | 复倒谱的定义 .....               | 262        |
| 8.4.1        | 复对数的多值性问题 .....            | 262        |
| 8.4.2        | $\hat{X}(z)$ 的解析性问题 .....  | 263        |
| 8.5          | 复倒谱的性质 .....               | 263        |
| 8.6          | 复倒谱的计算方法 .....             | 265        |
| 8.6.1        | 按复倒谱定义计算 .....             | 265        |
| 8.6.2        | 最小相位序列的复倒谱的计算 .....        | 268        |
| 8.6.3        | 复对数求导数算法 .....             | 270        |
| 8.6.4        | 递推计算方法 .....               | 272        |
| 8.7          | 同态系统的应用 .....              | 274        |
| 8.7.1        | 乘法同态系统的应用 .....            | 274        |
| 8.7.2        | 卷积同态系统的应用 .....            | 276        |
|              | 习题 8 .....                 | 278        |
| <b>第 9 章</b> | <b>高阶谱估计</b> .....         | <b>281</b> |
| 9.1          | 累积量、矩及其谱 .....             | 282        |
| 9.1.1        | 随机变量的特征函数 .....            | 282        |
| 9.1.2        | 随机变量的矩、累积量 .....           | 283        |
| 9.1.3        | 随机变量的矩和累积量之间的转换关系 .....    | 285        |
| 9.1.4        | 高阶累积量的性质 .....             | 287        |
| 9.1.5        | 高阶谱的定义 .....               | 289        |
| 9.1.6        | 累积量和偏态 .....               | 290        |
| 9.2          | 双谱及其估计 .....               | 291        |
| 9.2.1        | 双谱的性质 .....                | 292        |
| 9.2.2        | 双谱估计方法 .....               | 292        |
| 9.3          | 线性系统输出的二阶和高阶累积量之间的关系 ..... | 295        |
| 9.3.1        | 线性系统输出的累积量、多谱表达式 .....     | 295        |

|               |                                |            |
|---------------|--------------------------------|------------|
| 9.3.2         | $1\frac{1}{2}$ 维谱 .....        | 297        |
| 9.3.3         | 累积量的投影性质 .....                 | 298        |
| 9.4           | 高阶统计量在系统辨识中的应用 .....           | 299        |
| 9.4.1         | 功率谱等价系统 .....                  | 299        |
| 9.4.2         | MA 系统辨识 .....                  | 300        |
| 9.4.3         | AR 系统的辨识 .....                 | 303        |
| 9.4.4         | ARMR 系统的辨识 .....               | 304        |
| 9.5           | 倒多谱 .....                      | 306        |
| 9.6           | 其他应用 .....                     | 309        |
| 9.6.1         | 谐波过程 .....                     | 309        |
| 9.6.2         | 阵列信号处理 .....                   | 312        |
| 9.6.3         | 盲反卷积和盲均衡 .....                 | 314        |
| 习题 9          | .....                          | 317        |
| <b>第 10 章</b> | <b>短时傅里叶变换</b> .....           | <b>319</b> |
| 10.1          | 连续短时傅里叶变换 .....                | 320        |
| 10.2          | 序列的短时傅里叶变换 .....               | 321        |
| 10.2.1        | STFT 的性质 .....                 | 324        |
| 10.2.2        | 可逆性 .....                      | 325        |
| 10.3          | 短时傅里叶分析 .....                  | 325        |
| 10.3.1        | 分析窗的选择 .....                   | 325        |
| 10.3.2        | 离散短时傅里叶变换的计算 .....             | 326        |
| 10.4          | 短时傅里叶综合 .....                  | 327        |
| 10.4.1        | 滤波器组求和法(FBS) .....             | 327        |
| 10.4.2        | 重叠相加法(OLA) .....               | 329        |
| 10.4.3        | 广义滤波器组求和(GFBS) .....           | 332        |
| 10.5          | 序列短时傅里叶变换的幅度 .....             | 335        |
| 习题 10         | .....                          | 337        |
| <b>第 11 章</b> | <b>小波变换</b> .....              | <b>339</b> |
| 11.1          | 连续小波变换 .....                   | 340        |
| 11.1.1        | 连续小波变换的定义及其性质 .....            | 340        |
| 11.1.2        | 小波变换的物理意义及分析小波的时频特性 .....      | 342        |
| 11.2          | 小波变换的离散化和二进小波变换 .....          | 346        |
| 11.3          | 多分辨率分析 .....                   | 350        |
| 11.3.1        | 多分辨率分析 .....                   | 350        |
| 11.3.2        | Mallat 算法——快速二进小波分解和重构算法 ..... | 354        |
| 11.3.3        | 滤波器组和离散小波变换 .....              | 356        |

|               |                                 |            |
|---------------|---------------------------------|------------|
| 11.4          | 小波的构造 .....                     | 358        |
| 11.5          | 小波的例子 .....                     | 361        |
| 11.6          | 小波变换的应用 .....                   | 365        |
|               | 习题 11 .....                     | 366        |
| <b>第 12 章</b> | <b>维格纳分布</b> .....              | <b>369</b> |
| 12.1          | 连续维格纳分布 .....                   | 370        |
| 12.1.1        | 维格纳分布的性质 .....                  | 370        |
| 12.1.2        | 伪维格纳分布 .....                    | 375        |
| 12.1.3        | 维格纳分布的一些例子 .....                | 376        |
| 12.1.4        | 频限信号维格纳分布的离散表示式 .....           | 377        |
| 12.2          | 离散信号维格纳分布的定义及其性质 .....          | 379        |
| 12.2.1        | 离散信号维格纳分布的性质 .....              | 380        |
| 12.2.2        | 离散信号维格纳分布的例子 .....              | 383        |
| 12.3          | 连续信号的维格纳分布和相应离散信号维格纳分布的关系 ..... | 384        |
| 12.4          | 广义时频分布 .....                    | 385        |
| 12.4.1        | 维格纳分布和模糊函数之间的关系 .....           | 385        |
| 12.4.2        | 广义时频分布 .....                    | 388        |
| 12.4.3        | 交叉项的消除方法 .....                  | 392        |
| 12.4.4        | 自适应核设计 .....                    | 395        |
|               | 习题 12 .....                     | 397        |
| <b>第 13 章</b> | <b>多速率信号处理</b> .....            | <b>401</b> |
| 13.1          | 采样率变换 .....                     | 402        |
| 13.1.1        | 数字信号的表示 .....                   | 402        |
| 13.1.2        | 抽取 .....                        | 406        |
| 13.1.3        | 插值 .....                        | 407        |
| 13.1.4        | 抗混叠和抗镜像滤波器的比例因子 .....           | 408        |
| 13.1.5        | 等价信号流图 .....                    | 409        |
| 13.2          | 用 FIR 实现信号的插值和抽取 .....          | 409        |
| 13.2.1        | 横向滤波器结构 .....                   | 409        |
| 13.2.2        | 多相滤波器结构 .....                   | 411        |
| 13.3          | 多速率滤波器 .....                    | 417        |
| 13.3.1        | 单级抽取和插值的多速率系统 .....             | 418        |
| 13.3.2        | 多级抽取和插值的多速率系统 .....             | 419        |
| 13.4          | 二通道滤波器组 .....                   | 421        |
| 13.4.1        | 互补滤波器和 Nyquist 滤波器 .....        | 421        |
| 13.4.2        | 二通道滤波器组的基本概念 .....              | 424        |
| 13.4.3        | 二通道完全重构滤波器组 .....               | 426        |

|        |                                |     |
|--------|--------------------------------|-----|
| 13.4.4 | 二通道标准正交镜像滤波器组 .....            | 428 |
| 13.4.5 | 共轭正交滤波器组 .....                 | 429 |
| 13.4.6 | 完全重构的双正交线性相位滤波器组 .....         | 431 |
| 13.5   | 均匀 $M$ 通道滤波器组 .....            | 431 |
| 13.5.1 | 平行结构的 $M$ 通道滤波器组 .....         | 432 |
| 13.5.2 | 仿酉系统 .....                     | 434 |
| 13.6   | 滤波器组的多相结构 .....                | 435 |
| 13.6.1 | 二通道滤波器组的多相结构 .....             | 435 |
| 13.6.2 | 二通道滤波器组的多相矩阵和完全重构条件 .....      | 436 |
| 13.6.3 | 二通道滤波器组多相矩阵和调制矩阵之间的联系 .....    | 437 |
| 13.6.4 | $M$ 通道滤波器组的多相结构实现 .....        | 438 |
| 13.6.5 | $M$ 通道滤波器组多相矩阵和调制矩阵之间的联系 ..... | 440 |
| 13.7   | 滤波器组的正交和双正交特性 .....            | 441 |
| 13.7.1 | 调制矩阵、多相矩阵的仿酉特性 .....           | 441 |
| 13.7.2 | 正交和双正交滤波器组 .....               | 443 |
| 13.8   | 调制滤波器组 .....                   | 446 |
| 13.8.1 | 复调制滤波器组 .....                  | 446 |
| 13.8.2 | COS 调制滤波器组 .....               | 447 |
| 13.8.3 | 调制滤波器组的多相结构 .....              | 448 |
| 13.8.4 | 其他形式的调制滤波器组 .....              | 450 |
| 13.9   | 滤波器组的格型结构和线性相位滤波器组 .....       | 459 |
| 13.9.1 | 滤波器组的格型结构 .....                | 460 |
| 13.9.2 | 几种常见的线性相位滤波器组 .....            | 461 |
| 13.9.3 | 线性相位滤波器组的几个基本结论 .....          | 464 |
| 13.9.4 | 线性相位特性传递的双正交滤波器组的格型结构 .....    | 468 |
| 习题 13  | .....                          | 475 |
| 附录 A   | 框架的基本概念 .....                  | 479 |
| 参考文献   | .....                          | 481 |

# 第 1 章 基础知识

随机信号需用统计方法来研究。离散随机信号的统计特性通常用概率分布函数与概率密度函数来表示或者采用统计平均量(均值、方差、相关函数与协方差函数)来描述。

本章首先复习离散随机信号(随机序列)的基本概念、统计描述及有关问题,讨论随机信号在频域中的特性,描述功率谱和周期图的概念,然后由相关抵消的讨论引出最佳线性估计的概念,并阐明最佳线性估计理论中的两个重要概念——新息和偏相关系数。

## 1.1 离散随机信号

### 1.1.1 离散随机过程

随机信号在数学上就是一个随机过程,定义为一个随机变量的序列,即 $\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ,这里 $n$ 表示时间。离散随机信号或过程是指由随机变量按一定顺序排列而成的时间序列。

一个随机变量 $x_n$ 可用如下的概率分布函数来描述

$$P_{x_n}(X_n, n) = P[x_n \leq X_n] \quad (1.1.1)$$

式中 $X_n$ 是 $x_n$ 的一个具体值。若 $x_n$ 取连续值,则可用概率密度函数描述为

$$P_{x_n}(X_n, n) = \frac{\partial P_{x_n}(X_n, n)}{\partial X_n} \quad (1.1.2)$$

或

$$P_{x_n}(X_n, n) = \int_{-\infty}^{X_n} p_{x_n}(x, n) dx \quad (1.1.3)$$

对两个随机变量 $x_n$ 和 $x_m$ ,则用下列联合概率分布函数来描述

$$P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = P[x_n \leq X_n, x_m \leq X_m] \quad (1.1.4)$$

若是连续随机变量,也可用联合概率密度函数

$$p_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = \frac{\partial^2 P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m)}{\partial X_n \partial X_m} \quad (1.1.5)$$

来表示。

以此类推,对 $N$ 个随机变量 $x_1, x_2, \dots, x_N$ ,有

$$P_{x_1, x_2, \dots, x_N}(X_1, 1, X_2, 2, \dots, X_N, N) = P(x_1 \leq X_1, x_2 \leq X_2, \dots, x_N \leq X_N) \quad (1.1.6)$$

$$p_{x_1, x_2, \dots, x_N}(X_1, 1, X_2, 2, \dots, X_N, N) = \frac{\partial^N P_{x_1, x_2, \dots, x_N}(X_1, 1, X_2, 2, \dots, X_N, N)}{\partial X_1 \partial X_2 \cdots \partial X_N} \quad (1.1.7)$$

其中, $P_{x_1, x_2, \dots, x_N}(X_1, 1, X_2, 2, \dots, X_N, N)$ 为 $N$ 维概率分布函数, $p_{x_1, x_2, \dots, x_N}(X_1, 1,$

$X_2, 2, \dots, X_N, N)$  为  $N$  维概率密度函数。

对于任何  $N$  个随机变量  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , 如果下列等式成立

$$P_{x_1, x_2, \dots, x_N}(X_1, 1, X_2, 2, \dots, X_N, N) = P_{x_1}(X_1, 1)P_{x_2}(X_2, 2) \cdots P_{x_N}(X_N, N) \quad (1.1.8)$$

则称这些随机变量是统计独立的。

如果一个离散随机过程经过时间平移  $k$  ( $k$  为整数) 后, 其概率统计特性保持不变, 即

$$\begin{aligned} P_{x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_{N+k}}(X_{1+k}, 1+k, X_{2+k}, 2+k, \dots, X_{N+k}, N+k) = \\ P_{x_1, x_2, \dots, x_N}(X_1, 1, X_2, 2, \dots, X_N, N) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

则该离散随机过程称为严格平稳的。由此可以得到平稳离散随机过程的一维概率分布函数与时间无关, 即

$$P_{x_n}(X_n, n) = P_{x_n}(X_n) \quad (1.1.10)$$

而二维概率密度函数与时间差有关, 即

$$P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = P_{x_n, x_m}(X_n, X_m, n-m) \quad (1.1.11)$$

### 1.1.2 集合平均与时间平均

离散随机过程通常可用概率与统计平均量(均值、方差、相关函数、协方差函数等)两种方法来描述。均值和方差是描述随机变量特征很有用的平均量, 因为一个随机过程是一组带有有序号的随机变量, 所以可以用组成随机过程的随机变量的统计平均来描述随机过程的特征, 这类平均称为集合平均。

离散随机过程的均值定义为

$$m_{x_n} = E[x_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{x_n}(x, n) dx \quad (1.1.12)$$

其中  $E$  表示数学期望。均值(期望值)通常与  $n$  有关。如果  $g(\cdot)$  是一个单值函数, 则  $g(x_n)$  就是一个随机变量, 而且随机变量的集合  $\{g(x_n)\}$  定义了一个新的随机过程。可以证明, 该随机过程的平均为

$$E[g(x_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) p_{x_n}(x, n) dx \quad (1.1.13)$$

如果随机变量是离散的, 则积分就变成对随机变量所有可能的值求和, 即

$$E[g(x_n)] = \sum_x g(x) p_{x_n}(x, n) \quad (1.1.14)$$

在我们对两个(或更多个)随机过程之间的关系感兴趣的场合, 必须考虑两个随机变量的集合  $\{x_n\}$  和  $\{y_m\}$ 。例如, 两个随机变量函数的期望值定义为

$$E[g(x_n, y_m)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p_{x_n, y_m}(x, n, y, m) dx dy \quad (1.1.15)$$

式中  $p_{x_n, y_m}(x, n, y, m)$  是随机变量  $x_n$  和  $y_m$  的联合概率密度。

均值有下列性质:

(1)  $E[x_n + y_m] = E[x_n] + E[y_m]$ , 即和的均值等于均值的和;

(2)  $E[ax_n] = aE[x_n]$ , 即一个常数与  $x_n$  相乘的均值等于该常数乘以  $x_n$  的均值。

一般说来, 两个随机变量乘积的均值并不等于各自均值的乘积。如果它们相等, 则称这两个随机变量是线性独立的或不相关的。这就是说, 若

$$E[x_n y_m] = E[x_n] \cdot E[y_m] \quad (1.1.16)$$

则称  $x_n$  和  $y_m$  是线性独立的, 其充分条件是

$$p_{x_n, y_m}(x_n, n, y_m, m) = p_{x_n}(x_n, n) \cdot p_{y_m}(y_m, m) \quad (1.1.17)$$

可以证明, 它的独立性比式(1.1.16)的条件更强一些。统计独立的随机过程必定是线性独立的, 而线性独立的随机过程并不意味着统计独立。

均值一般是时间的函数, 但一个平稳随机过程的均值是常数, 简记为  $m_x$ , 除了如式(1.1.12)定义的随机过程的均值外, 还有几个平均量在信号处理的范畴内是很重要的。下面将给出它们的定义。

$x_n$  的均方值定义为  $|x_n|^2$  的平均, 即

$$E[|x_n|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 p_{x_n}(x, n) dx \quad (1.1.18)$$

均方值也就是  $x_n$  的平均功率。

$x_n$  的方差定义为  $[x_n - m_{x_n}]$  的均方值, 即

$$\text{var}[x_n] = E[|(x_n - m_{x_n})|^2] = \sigma_{x_n}^2 \quad (1.1.19)$$

因为和的均值等于均值的和, 所以容易证明, 式(1.1.19)可写为

$$\text{var}[x_n] = E[|x_n|^2] - |m_{x_n}|^2 \quad (1.1.20)$$

通常, 均方值和方差都是时间  $n$  的函数, 但是对于平稳离散随机过程, 它们均为常量。均值、均方值和方差等都是简单的统计平均量, 它们只能提供有关随机过程的少量信息。相关函数与协方差函数是更有用的统计平均量。自相关函数(自相关序列)是描述随机过程在不同时刻的值与值之间的依赖性的一个量度, 它定义为

$$r_x(n, m) = E[x_n x_m^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_n x_m^* p_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) dx_n dx_m \quad (1.1.21)$$

式中 \* 表示复共轭。

随机过程的自协方差函数(自协方差序列)定义为

$$c_x(n, m) = E[(x_n - m_{x_n})(x_m - m_{x_m})^*] \quad (1.1.22)$$

它可以写成

$$c_x(n, m) = r_x(n, m) - m_{x_n} m_{x_m}^* \quad (1.1.23)$$



对于零均值随机过程  $m_{x_n} = m_{y_m} = 0$ , 则

$$c_x(n, m) = r_x(n, m) \quad (1.1.24)$$

即自协方差函数与其自相关函数相同。应当注意, 通常自相关和自协方差都是二维序列, 即为两个变量的函数。

两个不同随机信号之间相关性的度量可以由互相关序列得出。如果  $\{x_n\}$  和  $\{y_m\}$  是两个随机过程, 它们的互相关为

$$r_{xy}(n, m) = E[x_n y_m^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy^* p_{x_n, y_m}(x, n, y, m) dx dy \quad (1.1.25)$$

其中  $p_{x_n, y_m}(x, n, y, m)$  是  $x_n$  和  $y_m$  的联合概率密度。

互协方差函数定义为

$$c_{xy}(n, m) = E[(x_n - m_{x_n})(y_m - m_{y_m})^*] = r_{xy}(n, m) - m_{x_n} m_{y_m}^* \quad (1.1.26)$$

当  $m_{x_n} = m_{y_m} = 0$  时, 有

$$c_{xy}(n, m) = r_{xy}(n, m) \quad (1.1.27)$$

若对所有  $m$ , 有

$$r_{xy}(n, m) = 0 \quad (1.1.28)$$

则称它们是不相关的。统计独立的两个随机过程必然是不相关的, 但不相关的两个随机过程不一定是统计独立的。

正如我们已经指出的, 一个随机过程的统计特性通常是随时间变化的, 但是一个平稳随机过程是用稳定条件来描述其特征, 在该条件下其统计特性不随时间原点的平移而变化, 这意味着一阶概率分布是与时间无关的。类似地, 全部的联合概率分布函数也不随时间原点的平移而变化, 即二阶联合概率分布只取决于时间差  $(m - n)$ 。一阶平均, 如均值和方差, 与时间无关; 二阶平均, 如自相关函数, 仅与时间差  $(m - n)$  有关。因此, 对于平稳过程来说, 可以得出

$$m_x = E[x_n] \quad (1.1.29)$$

$$\sigma_x^2 = E[|x_n - m_x|^2] \quad (1.1.30)$$

与  $n$  无关。若用  $m$  表示时间差, 则

$$r_x(m) = r_x(n, n + m) = E[x_n x_{n+m}^*] \quad (1.1.31)$$

这就是说, 一个平稳随机过程的自相关序列是一个一维序列, 是时间差  $m$  的函数。

在许多场合我们会遇到在严格的意义上并不平稳的随机过程, 即它们的概率分布不是时不变的, 但是式(1.1.29)至式(1.1.31)仍然成立, 这类随机过程称为是广义平稳的。

上面给出了离散随机过程的各种统计描述, 现在再介绍另一种时间平均量描述。定义一个随机过程的时间平均为

$$\langle x_n \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L + 1} \sum_{n=-L}^L x_n \quad (1.1.32)$$