目　　录

第一章　极　　限

我们在中学学习的数学，主要讨论常量，那些数学内容，构成所谓初等数学；现在我们学习高等数学，以微积分为主体，研究的对象是函数，研究的手段是取极限. 从中学到大学，数学学习当中最令人困惑的转折是极限理论的引入. 极限理论与方法是打开微积分宝库的钥匙，而极限理论的核心和整个微积分的灵魂是所谓无穷小量.

本章要点是极限的定义和计算.

1　实数与绝对值不等式

在本书中考虑的数，若无特别声明，皆指实数. 实数集合及其重要子集如下：

$\mathbb{R}$：实数集合；

$\mathbb{Q}$：有理数集合；

$\mathbb{Z}$：整数集合；

$\mathbb{N}$：自然数集合；

$\varnothing$：空集.

空集是不含任何元素的一种集合，约定空集是任何集合的子集合，例如 $\varnothing\subset\{1,2,3\}$，$\varnothing\subseteq\varnothing$.

实数可用数轴上的点形象地表示；在直线 l 上取定一点 o 作为原点，再取一个点代表 1，把这两个点之间的距离作为度量单位，规定从 0 到 1 的方向为正向，如此规定了原点、正向和长度单位的直线 l 即为一条数轴. 数轴上每一点都有一个实数 x 与之对应，该实数 x 称为该点的坐标，下面将数 x 与点 x 混为一谈. 从 o

点到 x 点的距离叫做实数 x 的绝对值，记成 $|x|$，于是

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

显然，对任意实数 x，皆有 $|x| \geqslant 0$，而 $|x-y|$ 则表示从 x 到 y 的距离.

称满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 组成的集合为一个闭区间，记成 $[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 与 b 称为 $[a,b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间长.

称满足 $a<x<b$ 的实数 x 组成的集合为一个开区间，记成 (a,b)，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

开区间没有端点，但约定其长度仍为 $b-a$.

相似地定义半开半闭区间如下：

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 与 $(a,b]$ 的长也是 $b-a$.

以上的四种区间长度皆为有限数，称为有限区间；下面定义有无限长度的几种区间：

满足 $a<x$ 的实数 x 组成的集合记成 $(a,+\infty)$；

满足 $a \leqslant x$ 的实数 x 组成的集合记成 $[a,+\infty)$；

满足 $x<a$ 的实数 x 组成的集合记成 $(-\infty,a)$；

满足 $x \leqslant a$ 的实数 x 组成的集合记成 $(-\infty,a]$；

而 $\mathbb{R}$ 亦记成 $(-\infty,+\infty)$.

以上使用的符号 $-\infty$ 与 $+\infty$ 不是数，分别称为负无穷大和正无穷大，其严格定义下面还要讲.

称区间 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 为 x_0 的 ε-邻域，其中 x_0 称为该邻域的中心，ε 称为该邻域的半径，见图 1.1.

容易看出 x_0 的 ε-邻域 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 是满足 $|x-x_0|<\varepsilon$ 的 x

组成的集合,我们应当记住

$$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon),\ |x-x_0|<\varepsilon,x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

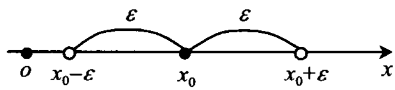

图 1.1

这三种写法表达的是一件事.

从 x 的邻域$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$内删除点 x_0 得到的集合称为 x_0 的去心邻域.

关于绝对值不等式,最基本的有三个:

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$,

(2) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,

(3) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$,

其中 $a,b\in\mathbb{R}$.

(1)式成立的理由很明显.

(2)式称为三角不等式.事实上,由(1)知

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|, \tag{α}$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|, \tag{β}$$

$(\alpha)+(\beta)$得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|, \tag{γ}$$

(γ)与不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

等价,所以(2)成立.

下面讨论(3)是真的,事实上,

$$|a|=|(a-b)+b|,$$

由(2),

$$|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

于是

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|,$$

即

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$

例 1 求 x 的变化范围,已知 $|x-3|<4$.

解 由于 $|x-3|<4$ 与不等式 $3-4<x<3+4$ 等价,即

$$-1<x<7,$$

解得 $x\in(-1,7)$.

例 2 解不等式 $|x|>x$.

解 若 $x\geqslant 0$,则 $|x|=x$,代入 $|x|>x$ 得 $x>x$,这不能成立,下面讨论 $x<0$ 的情形.

由于 $x<0$,故 $|x|=-x$,代入 $|x|>x$ 得

$$-x>x,$$

$$2x<0,\ x<0,$$

故解得 $x\in(-\infty,0)$.

2 初等函数

2.1 函数概念

定义 1.1 设 x 与 y 是两个变量,D 是给定的一个 $\mathbb{R}$ 的子集,对于每个给定的 $x\in D$,存在唯一的 y 值按一定法则与 x 相对应,则称 y 是 x 的函数,记成 $y=f(x)$;D 称为函数 $f(x)$ 的定义域,x 称为自变量,y 称为应变量;当 $x_0\in D$ 时,$f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值,集合

$$Y=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的值域. □

关于函数的记号,不一定总写成 $y=f(x)$,还可以用 $y=g(x)$,$y=h(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=\psi(x)$ 等来标志某个函数,但在同一个题目当中不同的函数不可有一样的标志,例如 $f(x)=\sin x$,不能同时又写 $f(x)=\cos x$.

函数的要素有二,一是定义域,二是对应的法则. 函数的值域不那么重要,因为它可以由上述二要素确定出来.

自变量与应变量用什么字母表示,也是无关紧要的,例如若 $D=(-\infty,+\infty)$,则

$$y=\sin x,\ x\in D$$

与

$$u=\sin\theta,\ \theta\in D$$

表达的是同一个函数(正弦函数),事实上,两者的定义域与对应法则一致.

函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 不是相同的函数,事实上,$y=\lg x^2$ 的定义域是 $x\neq 0$,而 $y=2\lg x$ 的定义域是 $x>0$,两者定义域不一致,所以它们是不同的函数.

$x\neq 0$ 可以写成 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

$x>0$ 可以写成 $(0,+\infty)$.

但函数的定义域未必是区间或区间的并集,例如

$$y=\sqrt{\cos x-1},$$

它的定义域 $D=\{2k\pi\,|\,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$,$D$ 是由一些孤立点组成的离散集合.

关于函数的表达方式,列表法(函数表)在高等数学当中很少使用,图像法有直观全面的优点,在高等数学当中颇被重视;而有统一的公式表达(解析表达)的函数则是最常用的函数;有的函数,其定义域划分成有限个子集,在每个子集上有一个特定的表达,例如

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0,\end{cases}$$

$\operatorname{sgn}x$ 称为符号(正负号)函数,见图 1.2,它是分段函数的典型,而狄利克利(Dirichlet)函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数}, \\ 0, x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

$\chi(x)$的表达式是描述性的，称为叙述式.

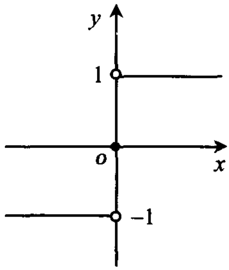

图 1.2

函数的对应规律可以很“不规则”，一般不能用常见的运算方法精确地由其解析表达式来确定对应的函数值，例如 $y=\sin x$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=\lg x$ 等等，虽然有一个解析表达式(公式)，但谁能确定 $\sin 1$，$\lg 2$，$3^{\frac{1}{3}}$ 的精确值呢？

2.2 函数的简单性质

(1) 奇偶性　设函数 $f(x)$的定义域为$(-l,l)$，l 可为常数，也可为∞，且对任何 $x\in(-l,l)$，皆有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是$(-l,l)$内的偶函数，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是$(-l,l)$内的奇函数.

$y=x^2$ 是偶函数，$y=x^3$ 是奇函数(见图 1.3)，而 $y=x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数，$y=0$ 则既是奇函数又是偶函数，$y=|x|$ 是偶函数(见图 1.4)，$y=\mathrm{sgn}x$ 是奇函数，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数.

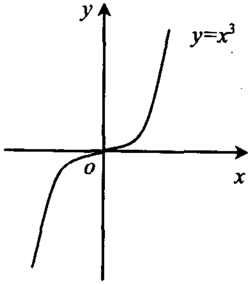

图 1.3

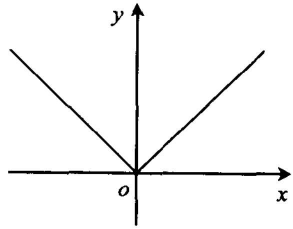

图 1.4

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

(2) 周期性　若 D 为函数 $y=f(x)$ 的定义域，又存在一个最小的正数 T，使得对任何 $x\in D$，皆有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的以 T 为周期的周期函数.

$y=\sin x, y=\cos x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的以 2π 为周期的函数，$y=\operatorname{tg}x, y=\operatorname{ctg}x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的以 π 为周期的函数.

(3) 有界性　若 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，又存在一个正数 M，使得对一切 $x\in D$，皆有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $y=f(x)$ 在 D 上是有界函数，否则称其为无界函数.

对于无界函数，有时我们可以追究它在其定义域的某一子集上是否有界，例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 是 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的无界函数，但在 $[1,100]$ 上它是有界的.

(4) 单调性　若 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，区间 $(a,b)\subseteq D$ (或 $[a,b]\subseteq D$)，任二点 $x_1,x_2\in(a,b)$ (或 $x_1,x_2\in[a,b]$)，当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内(或 $[a,b]$ 上)单调增加；若 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内(或 $[a,b]$ 上)单调减少；若函数在 D 上单调增加或单调减少，则称函数为单调函数.

例如 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调函数；而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，它在 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 内分别单调减少与单调增加.

2.3　反函数与复合函数

(1) 反函数

定义 1.2 若 $f(x)$是区间$[a,b]$上的单调函数，$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则对每个 $y\in[\alpha,\beta]$，存在唯一的 $x\in[a,b]$，使得 $f(x)=y$；x 由 y 唯一确定，由函数的定义知，在$[\alpha,\beta]$上确定了一个函数 $x=g(y)$，称 $x=g(y)$是 $f(x)$在区间$[a,b]$上的反函数. □

例如 $y=\sin x$ 在$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调上升，所以在$[\alpha,\beta]$上可以确定 $y=\sin x$ 的反函数 $g(y)$，这里 $y\in[\alpha,\beta]$，$\alpha=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，$\beta=\sin\frac{\pi}{2}=1$，我们知道这个反函数 $g(y)$即反正弦函数，$x=\arcsin y$，$y\in[-1,1]$. 为了方便，我们一般仍把反函数中自变量 y 写成 x，反函数的应变量 x 写成 y，于是把反正弦函数写成

$$y=\arcsin x,\ x\in[-1,1].$$

显然，单调增加的函数的反函数仍为单调增加函数，单调减少函数的反函数仍为单调减少函数.

函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=g(x)$的图像若画在同一个坐标平面上，则两者关于直线 $y=x$ 是对称的. 事实上，若 $P(a,b)$是 $y=f(x)$上一点，则 $Q(b,a)$是反函数 $y=g(x)$上的点；反之，若 $Q(b,a)$是 $y=g(x)$上一点，则 $P(a,b)$是 $y=f(x)$上的点，而 $Q(b,a)$与 $P(a,b)$两点恰为对称点，对称轴是 $y=x$，所以，在同一坐标系中，$y=f(x)$与其反函数 $y=g(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

有时 $y=f(x)$的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$.

注意定义 1.2 中只是假定 $f(x)$在区间$[a,b]$上单调，这时就可以谈 $f(x)$的反函数了，但是即使在定义域上不单调的函数，例如 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，也可以谈反函数，不过要明确这个反函数的值域是什么.

(2) 复合函数

考虑函数

$$y=f_1(u)=\operatorname{arctg}u,\ u\in(-\infty,+\infty),$$
$$u=f_2(x)=x^3,\ x\in(-\infty,+\infty),$$

则函数

$$y = \mathrm{arctg} x^3,\ x \in (-,\infty, +\infty)$$

可以写成 $y=f_1(f_2(x))$，$x\in(-\infty,+\infty)$，或者说函数 $y=\mathrm{arctg}x^3$ 是函数 $f_1(u)$与 $f_2(x)$复合而成的.

定义 1.3 若函数 $y=f(u)$的定义域是 D_1，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D'_2，令 $D_2=\{x|x\in D'_2,\varphi(x)\in D_1\}$，于是任取 $x_0\in D_2$，可得唯一的 $\varphi(x_0)\in D_1$，进而得出唯一的 $y_0=f[\varphi(x_0)]$，从而确定了一个定义域为 D_2 的函数，其自变量是 x，应变量是 y. 我们称该函数是由函数 $y=f(x)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记之为

$$y = f[\varphi(x)],\ x \in D_2.$$

称 u 为中间变量. □

值得小心的是，并不是任何两个函数都可以加以叠置代入而构成一个复合函数，例如

$$y = \arcsin u,\ u = 2 + x^2,$$

由于 $u=2+x^2\geqslant 2$，于是 $y=\arcsin u=\arcsin(2+x^2)$在$\mathbb{R}$ 中是无意义的，因为 $\arcsin u$ 的定义域是 $u\in[-1,1]$，而 $2+x^2$ 已经不在 $\arcsin u$ 的定义域内.

复合函数可以是多层次的，即可以由三个以上的函数复合而成，例如

$$y = \sqrt{\sin\frac{x}{2}+1},\ x \in (-\infty, +\infty)$$

是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v+1$, $v=\dfrac{x}{2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$复合而成.

2.4 初等函数

我们在中学学过的重要函数有下面几种：

(1) 幂函数

$$y = x^{\mu},\ x \in (0, +\infty)$$

其中常数 $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$，见图 1.5.

(2) 指数函数

$$y = a^x,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

其中常数 $a>0, a\neq 1$，见图 1.6. $a=\mathrm{e}=2.7182818\cdots$ 时的指数函数最常用.

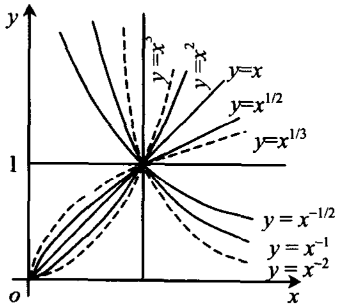

图 1.5

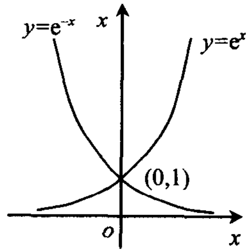

图 1.6

(3) 对数函数

$$y = \log_a x,\ x \in (0, +\infty),$$

其中常数 $a>0, a\neq 1$，见图 1.7.

$a=\mathrm{e}$ 时，$\log_a x$ 写成 $\ln x$.

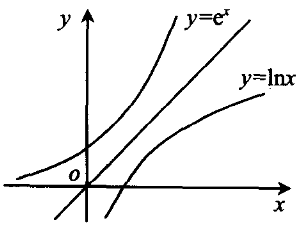

图 1.7

(4) 正弦函数

$$y = \sin x,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

见图 1.8.

(5) 余弦函数

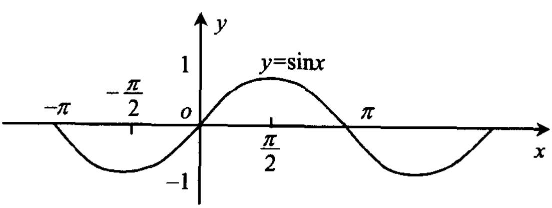

图 1.8

$$y = \cos x,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

见图 1.9.

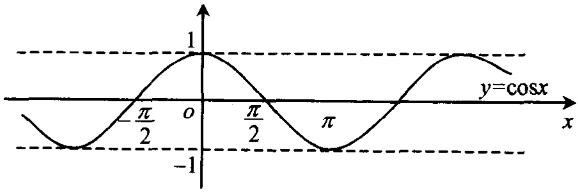

图 1.9

(6) 正切函数

$$y = \mathrm{tg}x,$$

定义域为 $D=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\}$,见 1.10.

(7) 余切函数

$$y = \mathrm{ctg}x,$$

定义域为 $D=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}\}$,见图 1.11.

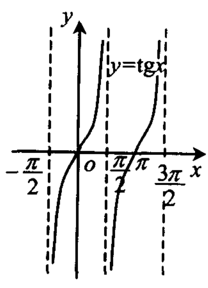

图 1.10

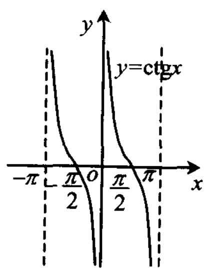

图 1.11

tg$x$ 可写成 tan$x$,ctg$x$ 可写成 cot$x$.

(8) 正割函数

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

定义域同 $\operatorname{tg}x$，它是无界的以 2π 为周期的偶函数，值域为 $(-\infty, +\infty)$.

(9) 余割函数

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

定义域同 $\operatorname{ctg}x$，是以 2π 为周期的无界奇函数，值域为 $(-\infty, +\infty)$.

(10) 反正弦函数

$$y = \arcsin x,\ x \in [-1,1],$$

见图 1.12.

(11) 反余弦函数

$$y = \arccos x,\ x \in [-1,1],$$

见图 1.13.

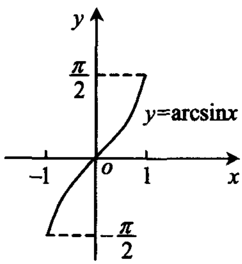

图 1.12

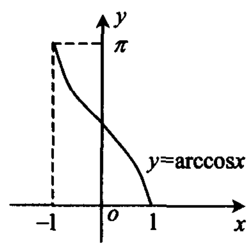

图 1.13

(12) 反正切函数

$$y = \operatorname{arctg}x,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

见图 1.14.

(13) 反余切函数

$$y = \operatorname{arcctg}x,\ x \in (-\infty, +\infty),$$

见图 1.15.

(14) 双曲正弦函数

$$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\ x\in(-\infty,+\infty),$$

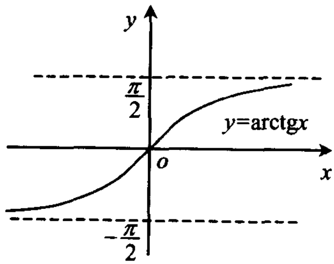

图 1.14

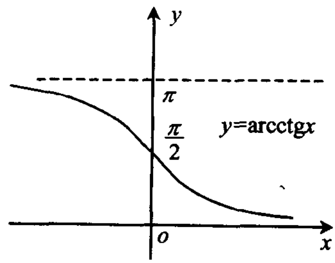

图 1.15

见图 1.16.

（15）双曲余弦函数

$$y=\operatorname{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\ x\in(-\infty,+\infty),$$

见图 1.16.

（16）双曲正切函数

$$y=\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}},\ x\in(-\infty,+\infty),$$

见图 1.17.

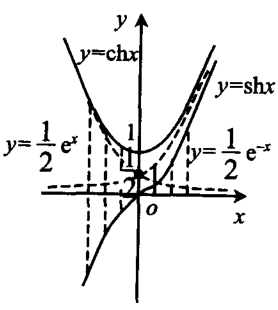

图 1.16

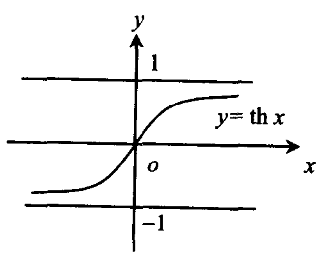

图 1.17

以上各函数的简单性质，可由其图像一目了然.