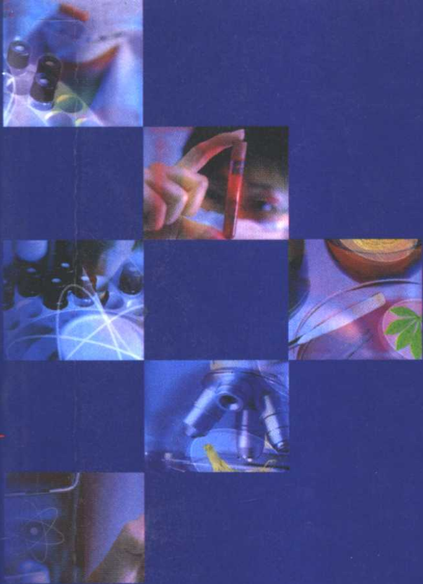
高等医药院校教材

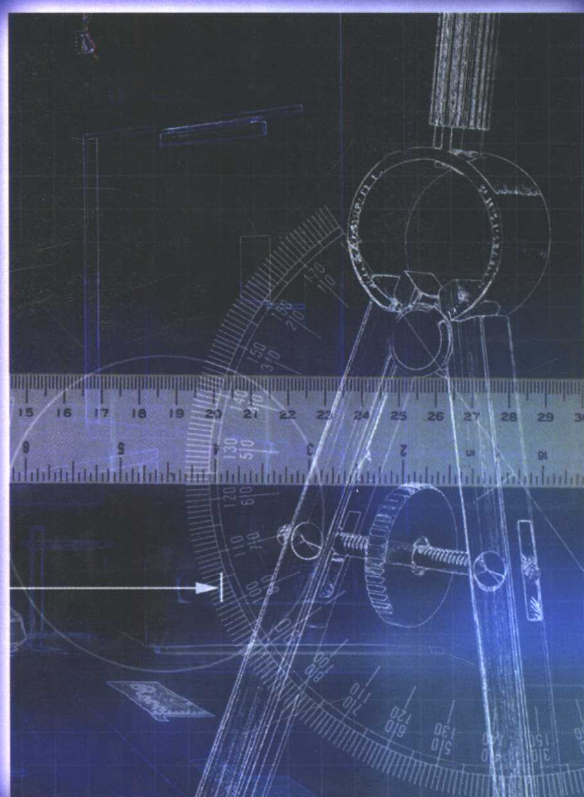
（供医药院校本科各专业使用）

总主编　周巨贵／副总主编　刘晓勤　文民刚



医用高等数学(二)

颜　刚　主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等医药院校教材

（供医药院校本科各专业使用）

总 主 编 周巨贵

副总主编 刘晓勤 文民刚

医用高等数学（二）

颜 刚 主编

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书为适应高等医药院校学生素质教育而进行的课程体系改革所设立的平台课程系列而编写，有鲜明的数理医药学特色.内容为空间解析几何、向量代数、多元微积分、重积分、曲线积分与曲面积分、级数等，可作为高等医药院校本科各专业的教材，也可供医药工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学(二)/颜 刚主编. 一北京:科学出版社,2002.6
(高等医药院校教材)
ISBN 7-03-010259-2

Ⅰ.医… Ⅱ.颜… Ⅲ.医用数学:高等数学-医药院校-教材
Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 015338 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002年6月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2002年6月第一次印刷 印张: 11
印数: 1—4 000 字数: 261 000

定价: 18.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

高等医药院校教材

总 主 编 周巨贵

副总主编 刘晓勤 文民刚

医用高等数学(二)

主　　编 颜　刚

副 主 编 林才瀚

编　　者 颜　刚　林才瀚　刘幸明

马　波　段影影

前　言

近几十年来各种数学方法在医学领域已被日益广泛地应用,并取得了显著的成效.生物的遗传、变异、代谢与神经活动,药物作用以及生物医学工程的定量研究,进一步拓新了遗传学、生物化学、生理学、药理学及生物物理学研究的领域;许多疾病的发生和发展、分布和传播,以及相应诊断等问题进一步深层次的研究都需要建立数学模型,以使问题的分析能上升到理论化的高度.随着现代医学逐步向数量化、精确化的方向发展,将会有更多的数学方法在医学领域得到应用.自然对医学人才的数学水准提出了新的要求,即尽可能多掌握一些数学的基本知识,增强抽象思维和逻辑推理的能力,以适应医学事业发展的需要.

本套教材是为适应高等医药院校学生素质教育需要所进行的课程体系改革,设立平台课程而编写的系列教材,数学系列共分三册.第一册内容包括一元函数微积分、微分方程等.第二册内容包括空间解析几何、多元函数微积分、级数等.第三册内容包括线性代数、概率论与数理统计初步、模糊数学等.可作为高等医药院校本科各专业的高等数学平台课程教材,也可供医药工作者参考.

由于编者水平有限,书中可能有错误与不足,恳请使用的教师、学生和读者批评指正.

编　者

2002年3月

目 录

第六章　空间解析几何与向量

数学有两个基本研究对象“数”和“形”，坐标的产生使得它们统一起来，从而使人们可以用代数的方法解决几何问题，也可以用几何的方法解决代数问题．中学曾学习过平面解析几何，通过平面坐标把平面上的点与有序数对对应起来，把平面图形和方程对应起来．平面解析几何是学习一元函数微积分不可缺少的．同样，我们可以建立空间三维坐标系，使得空间图形与方程对应起来．因此，学习多元函数微积分，空间解析几何仍然是不可缺少的工具．

本章首先建立空间直角坐标系，并引入向量，以向量为工具讨论空间曲线和曲面．

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

为了沟通空间图形与数之间的联系，我们建立空间直角坐标，使得空间的点与实数组有一一对应关系，从而可以用代数方法讨论几何问题．

过空间定点 O，作三条两两互相垂直的数轴，分别记为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），统称为坐标轴．通常把 x 轴和 y 轴置于水平面上，z 轴取铅直向上方向（图 6-1）．它们的正向符合右手法则，即伸出右手，使拇指与其他四指垂直，当四指从 x 轴转动 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时，大拇指的指向应是 z 轴的正向（图 6-2）．按右手法则确定的坐标系为右手系．今后采用的坐标系均为右手系．这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系，点 O 为坐标原点．

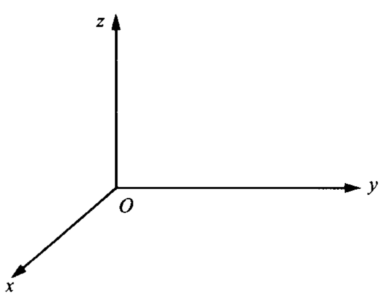


图 6-1

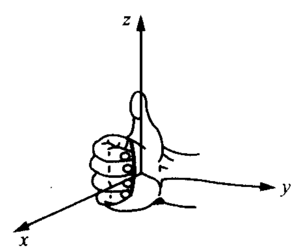


图 6-2

由任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面．这样，可以确定三个坐标面，x 轴和 y 轴所确定的坐标面为 xOy 面，另两个为 yOz 面和 xOz 面．三个坐标面把整个空间分隔为八个部分，每个部分称为一个卦限．含有 x 轴，y 轴，z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定．第五至第八卦限在 xOy 面的下方，第一卦限的下方是第五卦限，按逆时针方向确定．关于八个卦限的顺序，如图 6-3．

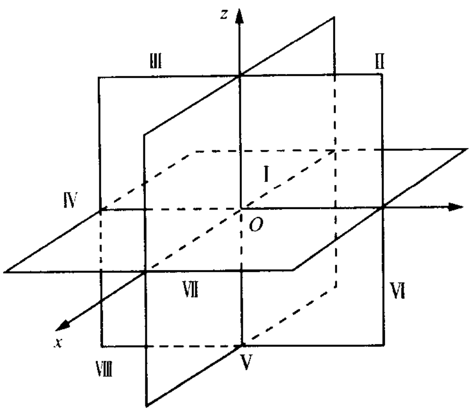


图 6-3

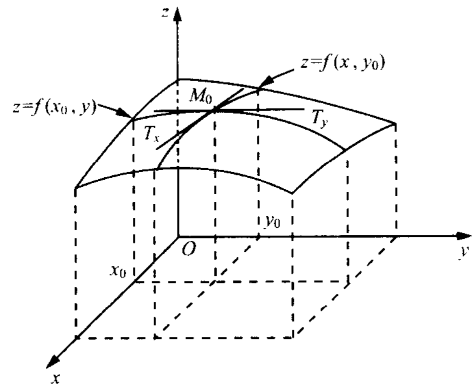


图 6-4

有了坐标系后,我们就建立了空间的点和有序数组间的对应关系.

设 M 为空间一定点,过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴,交点分别为 P,Q 和 R. 设 P,Q,R 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x,y 和 z,那么空间点 M 就惟一地确定了一个有序数组(x,y,z)(图 6-4). 反之,给定有序数组(x,y,z),我们可以依次在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标为 x,y,z 的点 P,Q,R 三点,过 P,Q,R 各作一个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴,这三个平面的交点就是有序数组(x,y,z)所确定的惟一点.

这样,就建立了空间点 M 和有序数组(x,y,z)间的一一对应关系. 有序数组中的 x,y,z 称为点 M 的坐标,其中,x,y,z 依次称为 M 的横坐标,纵坐标和竖坐标. 坐标为 x,y,z 的 M 点记为 $M(x,y,z)$.

坐标面和坐标轴上点的坐标有一定的特点. 在 xOy 坐标面上的点,其竖坐标 $z=0$;在 yOz 坐标面上的点,其横坐标 $x=0$;在 zOx 坐标面上的点,其纵坐标 $y=0$;x 轴上的点,$y=z=0$;y 轴上的点,$x=z=0$;z 轴上的点,$x=y=0$.

设 $P(a,b,c)$为空间一点,从点 P 向 xOy 平面做垂线交于 Q 点,则容易知道 Q 点的坐标为$(a,b,0)$,称 Q 为 P 点在 xOy 平面上的投影. 同样,点 P 在 yOz 平面和 zOx 平面上的投影为$(0,b,c)$和$(a,0,c)$.

二、空间点的距离

我们可以将平面坐标里的两点间的距离公式直接推广到空间坐标情形.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,那么

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{6-1-1}$$

就是空间两点间的距离公式.

特别地,点 $M(x,y,z)$到原点 $O(0,0,0)$的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 1 证明以 $A(10,-1,6)$,$B(4,1,9)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

解 因为

$$|AB| = \sqrt{(4-10)^2 + (1+1)^2 + (9-6)^2} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = 7\sqrt{2},$$

$$|BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7.$$

所以$\triangle ABC$是等腰三角形.

例 2　在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　设所求的点为 $M(0,0,z)$，依题意有 $|MA| = |MB|$，即

$$\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}$$

解得 $z = \dfrac{14}{9}$，所以，所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$$A(1,-2,3);B(1,2,3);C(-1,-2,3);D(1,-2,-3);E(-1,2,3).$$

2. 指出下列各点的位置：

$$A(5,0,0);B(0,-2,0);C(0,0,4).$$

3. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.
4. 自点 (a,b,c) 分别做各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.
5. 已知 A,B,C 三点的坐标，求三角形 ABC 的边长，确定它是否等腰或直角三角形：
   (1) $A(2,1,0),B(3,3,4),C(5,4,3)$；
   (2) $A(5,5,1),B(3,3,2),C(1,4,4)$；
   (3) $A(-2,6,1),B(5,4,-3),C(2,-6,4)$.
6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.
7. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2),B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

第二节　向量及其坐标

一、向量的概念

在自然科学和社会科学中，我们遇到的量通常有两种. 其中一类较简单，在取得测量单位后，就可以用一个实数来表示，例如，体积、温度、质量等，这种只具有大小的量叫做数量，也叫做标量或纯量. 数量有正有负. 另外，还有一种较复杂的量，它们不但有大小，而且还必须指出方向，例如，位移、速度、加速度、电场等等. 我们把这种既有大小，又有方向的量叫做向量或矢量. 向量通常用粗体字母或一个上面加箭头的字母来表示，如 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 或 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. 以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 向量的大小叫做模或长度，向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，向量 $\boldsymbol{i}$ 的模记作 $|\boldsymbol{i}|$. 注意：向量是不能比较大小的，所以，“大于”和“小于”的概念对于向量就无意义. 但是，两个向量的长度可以比较大小.

二、几种特定条件的向量

如果向量具备某些特定条件,就将得出一些特定情况下的向量,如:两个长度及方向均相同的向量称为相等向量,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;两个长度相同而方向相反的向量则称为相反向量,记为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$.长度是1的向量叫做单位向量;与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量记作 a°,叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量;长度是零的向量叫做零向量,显然零向量的始点与终点相重合,所以,它没有确定的方向,我们规定,所有零向量均相等,并且规定零向量的方向是任意的;与一定直线平行的向量叫做共线向量,当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是共线向量时,叫做平行,记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.以同一点为始点作共线向量的相等向量,则它们必在一直线上;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相垂直时称为垂直向量;与一定平面平行的向量叫做共面向量;易知一个向量经平行移动后所得的向量和原来的向量相等,因此,给出一个向量,就有很多向量和它相等;如果把相等的向量看做是在不同地点的同一向量,这时的向量就叫做自由向量.它的始点可以是空间的任何一点.在几何里为了研究方便,常将一组向量平移到共同始点——坐标系的原点 O,以 O 为始点的向量$\overrightarrow{OP}$叫$\boldsymbol{P}$ 点的半径向量或位置向量,以后常以$\vec{\boldsymbol{P}}$表示P点的半径向量.这样,点与半径向量就建立了一一对应,有关点的讨论就可以转为有关半径向量的讨论.

三、向量的坐标表示与分解

为了沟通向量与数的联系,我们把向量放到直角坐标系里考虑.

设以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为起点,以 $M_1(x,y,z)$为终点的向量为$\overrightarrow{M_0M_1}$,把它平移到 O 为起点,此时设终点为 $P(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$,那么向量$\overrightarrow{OP}$ 即是它的半径向量,它惟一地确定空间一点 $P(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.反之,由空间一点 $P(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$可以惟一地确定一向量.我们称$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$为向量$\overrightarrow{M_0M_1}$ 的坐标表示,即$\overrightarrow{M_0M_1}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.$x-x_0,y-y_0,z-z_0$ 称为向量的分量,有时也称为向量在坐标轴上的投影.

称 x,y,z 轴上的正向单位向量 $\boldsymbol{i}(1,0,,0)$,$\boldsymbol{j}(0,1,0)$,$\boldsymbol{k}(0,0,1)$为基本单位向量.向量$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$可以用基本单位向量表示为

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k},$$

此式称为向量的分解式.

四、模与方向角

当向量 $\boldsymbol{a}$ 以坐标形式给出,即 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,由模的定义知道

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{6-2-1}$$

设向量与 x 轴,y 轴,z 轴的正向的夹角为α,β,γ,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,方向角的余弦 $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 叫做向量$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.由立体几何知识知道

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases} \tag{6-2-2}$$

很明显方向余弦满足：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\boldsymbol{a}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

例 1　已知 $A(1,0,2)$，$B(2,-1,1)$是空间两点，求向量$\overrightarrow{AB}$ 和它的模.

解　$\overrightarrow{AB}=(2-1,-1-0,1-2)=(1,-1,-1)$，

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

例 2　设 $A=(4,0,5)$，$B=(7,1,3)$，求与向量$\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量.

解　由$\overrightarrow{AB}=(7-4,1-0,3-5)=(3,1,-2)$ 得

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$$

设 $\boldsymbol{a}^\circ$ 为和向量$\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量，由 $\boldsymbol{a}^\circ=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，即得

$$\boldsymbol{a}^\circ=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}}\right).$$

例 3　设已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$和 $M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解　由$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$，得$|\overrightarrow{M_1M_2}|=2$；

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{1}{3}\pi,\gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

习题 6-2

1. 一向量 $\boldsymbol{r}$ 的终点在点$B(2,-1,7)$，它在 x 轴，y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标.

2. 已知两点 $M_1(0,1,2)$和 $M_2(1,-1,0)$，试用坐标表示式表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

3. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$和 $M_2(3,0,2)$，计算$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

4. 设向量的方向余弦分别满足(1)$\cos\alpha=0$；(2)$\cos\beta=1$；(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

5. 分别求出向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的模，并分别用单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$，$\boldsymbol{b}^\circ$，$\boldsymbol{c}^\circ$ 表达向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$.

第三节 向量运算

一、向量的加减法

从物理与力学中我们知道,两个力、两个速度均能合成,得到合力与合速度,并且合力与合速度都符合平行四边形法则.由此实际背景出发,我们定义向量的加法如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=a$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=b$,连接 AC,那么向量 $\overrightarrow{AC}=c$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 6-5).

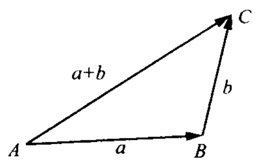


图 6-5

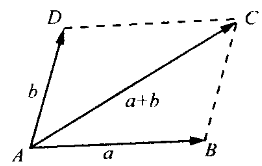


图 6-6

此规则叫做向量加法的三角形法则.类似地,还有平行四边形法则(图 6-6).

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

对于向量的减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 相当于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量 $-\boldsymbol{b}$ 做加法运算.

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \tag{6-3-1}$$

其中等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

下面讨论向量加减法的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$.

利用向量加法的结合律和交换律,得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z). \tag{6-3-2}$$

向量加法的坐标表达式告诉我们,两向量和的坐标是两向量对应坐标之和.同样可得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z). \tag{6-3-3}$$

二、向量与数的乘法(数乘向量)

对任意的实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$,我们定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(简称数乘)是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模与方向规定如下:

(1) $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$;

(2)当 $\lambda > 0$ 时,$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda < 0$ 时,$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = \mu(\lambda \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$;$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$.

下面我们给出数乘向量的坐标表达式.

令 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$即 $\boldsymbol{a} = a_x i + a_y j + a_z k$. 由向量乘法的结合律知道:

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda a_x i + \lambda a_y j + \lambda a_z k = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \qquad (6\text{-}3\text{-}4)$$

上式说明:向量与数的乘积的三个坐标是向量的三个坐标与该数之积.

由于向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明向量的平行关系.

定理　设向量 $\boldsymbol{a} \neq 0$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在惟一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$.

证　必要性　设 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$,若 $\boldsymbol{b} = 0$,取 $\lambda = 0$. 若 $\boldsymbol{b} \neq 0$,由设 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$ 知道:$\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \pm \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,取 $\boldsymbol{\lambda} = \pm \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,就有 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$.

充分性　若 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$ 时,由数乘向量的定义可以知道 $\boldsymbol{b} /\!/ \boldsymbol{a}$.

三、向量的数量积

设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于某物体时,该物体产生位移矢量 S,若 $\boldsymbol{F}$ 和 S 的夹角为 θ,则力 $\boldsymbol{F}$ 在位移 S 上所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||S|\cos\theta.$$

上述运算为两向量间的一种重要运算——数量积.

下面我们给出数量积的定义:

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个向量,θ 为它们的夹角,规定向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的数量积(记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$)是由下式确定的一个数

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

向量的数量积又叫做点积、内积或标量积,通常记向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$. 由数量积的定义,上述力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{F} \cdot s$.

由数量积的定义可以明显看出:

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

因为夹角是 0,所以. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2$.

(2)对于向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

必要性是显然的,只需证明充分性. 若有一个向量是零,由于零向量的方向是任意的,故结论成立;当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均不是零时由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,可知:$\cos\theta = 0$,即 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

数量积符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) 结合律$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

需要特别注意的是,消去律不成立.如果向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 不能得到 $\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$,因为两非零垂直向量的数量积为零.

下面给出数量积的坐标表达式.设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,由数量积的运算规律及 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$,$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$,所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \quad (6\text{-}3\text{-}5)$$

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,所以当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}, \quad (6\text{-}3\text{-}6)$$

将模的坐标表达式和数量积的坐标表达式代入得

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \quad (6\text{-}3\text{-}7)$$

例 1 一质点在力 $\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 的作用力下,从点 $A(2,1,0)$移动到点 $B(4,6,2)$,求力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.

解 质点的位移向量是

$$\overrightarrow{AB}=(4-2,6-1,2-0)=(2,5,2),$$

力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=\boldsymbol{F}\cdot S=(3,4,5)\cdot(2,5,2)=6+20+10=36$.

例 2 设 $a_i,b_i\in R(I=1,2,3)$,证明不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{3}a_ib_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{3}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,由于$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标代入即得.

这就是著名的柯西不等式.

例 3 已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$,试求(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;(2)$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 (1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times4+3\times(-2)+(-1)\times0=2$.

(2) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{70}}$.

四、向量的向量积

力 $\boldsymbol{F}$ 作用于某物体的点 A,对于该物体上的支点 O 来说,$\boldsymbol{F}$ 产生一力矩,其大小应等于 $\boldsymbol{F}$ 的大小乘以点 O 到 $\boldsymbol{F}$ 的作用线的距离.但是,仅用力矩的大小不能全部反映力矩所产生的效

果,还要设法描述力矩所产生的“转动”的“方向”.

上面的描述可以抽象为向量的一种运算——向量积.

下面给出向量积的定义:

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量,规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模与方向分别为:

(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,并且向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向符合右手法则(图 6-7)向量的向量积又叫做叉积或外积.

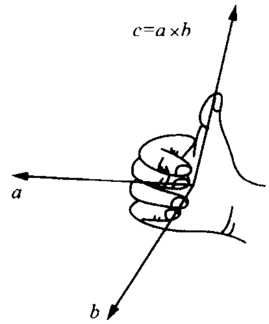


图 6-7

从向量积的定义可以看出,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的几何意义是以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

由定义可以直接看出:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$.

这是因为夹角 $\theta=0$,故 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin 0=0$.

(2)向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零时,结论显然成立.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中都不是零时,如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$,由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,$|\boldsymbol{b}|\neq 0$,故必有 $\sin\theta=0$,即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,那么 $\sin\theta=0$,从而,$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$.

向量积符合下列运算规律:

(1) 反交换律 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 为实数.

这里,消去律仍然不成立,因为两非零平行向量的向量积为零.

下面给出向量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,由数量积的运算规律,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})\\&\quad+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

由于

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)i+(a_zb_x-a_xb_z)j+(a_xb_y-a_yb_x)k. \qquad (6\text{-}3\text{-}8)$$

为便于记忆,利用三阶行列式,上式可以写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

例 4 设平面 π 过点 $A(1,0,0),B(3,1,-1),C(2,-1,2)$,求一个垂直于平面 π 的向量 n.

解 向量 $\overrightarrow{AB}=(3-1,1-0,-1-0)=(2,1,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(2-1-1-0,2-0)=(1,-1,2)$,易知 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线且它们均位于平面 π 内,因而 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 垂直于平面 π,故取

$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

例 5 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$,求三角形 ABC 的面积.

解 由向量积模的几何意义,可以知道 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$. 由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$,$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$,因此,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{14}.$$

习题 6-3

1. 求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,并用几何图形表出.

   (1) $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(0,0,1)$, (2) $\boldsymbol{a}=(0,3,2)$, $\boldsymbol{b}=(1,0,-3)$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求

   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$;(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.

4. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,证明:

   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$;

   (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

5. 已知 $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$ 求:

   (1) 同时与 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量;

   (2) $\triangle ABC$ 的面积;