



高等院校力学系列教材  
Textbook Series in Mechanics for Higher Education

# 弹塑性力学引论

Introduction to Elasticity and Plasticity

杨桂通 编著

Yang Guitong



清华大学出版社



Springer



高等院校力学系列

Textbook Series in Mechanics for Higher Education



# 弹塑性力学引论

Introduction to Elasticity and Plasticity

杨桂通 编著

Yang Guitong



清华大学出版社  
北京



Springer

## 内 容 简 介

本书是为工程类各有关专业编写的一本弹塑性力学简明教程,可供研究生和高年级大学生作为教材,约在30学时内可以讲完。全书共有10章,包括弹性力学和塑性力学的基本理论、基本概念和基本方法;简单的弹性和塑性平面问题;弹塑性弯曲和扭转;弹性薄板的弯曲及其塑性极限分析;变分原理和极值原理等。本书的特点是把弹性和塑性这一连续变形过程统一起来讲授,概念清晰,容易理解和掌握。

### 图书在版编目(CIP)数据

弹塑性力学引论/杨桂通编著. —北京:清华大学出版社,2004

(高等院校力学系列教材)

ISBN 7-302-07476-3

I. 弹… II. 杨… III. ①弹性力学—高等学校—教材 ②塑性力学—高等学校—教材 IV. O34

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第096100号

出 版 者: 清华大学出版社 地 址: 北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175 客 户 服 务: 010-62776969

责任编辑: 杨 倩

封面设计: 常雪影

印 刷 者: 北京市清华园胶印厂

装 订 者: 三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 175×245 印 张: 17.75 字 数: 345 千字

版 次: 2004年2月第1版 2004年2月第1次印刷

书 号: ISBN 7-302-07476-3/0·326

印 数: 1~3000

定 价: 24.00元

---

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103或(010)62795704

# 前 言

这本书是在我 20 多年前写的那本《弹塑性力学》(人民教育出版社,1979)基础上经过增删改写而成的。由于改动较大,故更名为《弹塑性力学引论》,目的是为工程类各有关专业的研究生和高年级大学生,提供一本简明易懂而又包含必要基础理论的教科书,希望能在 30 学时之内讲完。这就要求在取材和讲授方法上做到:去粗取精,通俗易懂,概念清晰,系统不乱。开始动笔以来,我便朝这个方向努力去做。

所有的工程技术人员都会碰到各式各样的力学问题,其中最多的可能就是当各种材料的物体或结构受各式各样的外界作用时,要我们判断其工作状态,或是做出有安全、经济要求的设计。对于重要的工程要求给出科学的判断或精确的设计,这就需要固体力学特别是弹塑性力学的基础理论和分析方法。固体材料受外力作用后,随着外力的逐渐增加,材料将经历弹性状态到塑性状态,一直到损坏而失效。从弹性到塑性是一个连贯的过程,在塑性状态下的物体或结构并不等于丧失承载能力,而可以安全工作。有时,有必要让物体的一部分进入塑性状态,以求得预定的有效工作期限。所以,掌握弹塑性力学的基础理论、基本概念和分析方法是非常重要的。

本书共分 10 章,都是弹性和塑性理论的最基本和最有实用价值的重要概念和分析方法,包括:应力和应变的概念和表达方法,即第 2、3 章;应力和应变之间的联系,即第 4 章,本构关系;第 5 章讲弹塑性力学问题的正确提法。之后便讨论弹性和塑性力学中的简单问题和弹性到塑性这一连续过程中应力和应变的变化,这部分内容,即第 6、7 两章,我想是最重要的,因为在这里所讨论的问题都可以得到完善的解答。此外,第 8 和第 10 章是柱体的弹塑性扭转和薄板的弹塑性弯曲;第 9 章是弹塑性力学的变分原理、极值原理及其应用。这部分内容是近似计算和数值计算的理论基础,现在计算机和计算技术非常发达,计算速度很快,一般问题已不需手工计算,但没有理

论基础,仍然会困难重重。第9章实为做数值计算准备理论基础,并对进一步做研究工作建立重要概念。书中每章附有复习要点、思考题和习题。为了使读者对力学的发展历程和著名科学家对力学发展的贡献有些了解,我们给出了部分著名力学家简介和插图。

本书在完成过程中得到了太原理工大学树学锋教授在文字和插图等方面的良好建议与帮助。陈维毅教授、马宏伟教授审读了部分内容,提出了一些宝贵的修改意见。应用力学研究所的一些博士生和硕士生都给了我许多帮助。特向他们致以诚挚的谢意。

此外,我在编写过程中,参考并吸收了许多国内外弹塑性力学名著的思想和内容,非常感谢众多专家学者给予的现成的精彩成果,这些都列在参考文献中。最后,我要特别感谢清华大学出版社的杨倩编辑为本书出版所付出的辛勤劳动。

杨桂通  
于太原理工大学  
2003年4月

# 目 录

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 弹塑性力学的研究对象和任务 .....	1
1.2 基本假定 .....	2
1.3 弹性与塑性 .....	3
思考题 .....	6
<b>第 2 章 应力</b> .....	7
2.1 力和应力的概念 .....	7
2.2 二维应力状态与平面问题的平衡方程 .....	11
2.3 一点处应力状态的描述 .....	15
2.4 边界条件 .....	17
2.5 主应力与主方向 .....	20
2.6 球张量与应力偏量 .....	25
本章复习要点 .....	27
思考题 .....	28
习题 .....	28
<b>第 3 章 应变</b> .....	30
3.1 变形与应变的概念 .....	30
3.2 主应变与应变偏量及其不变量 .....	36
3.3 应变率的概念 .....	37

3.4 应变协调方程 .....	38
本章复习要点 .....	40
思考题 .....	40
习题 .....	41
<b>第 4 章 本构关系 .....</b>	<b>43</b>
4.1 广义胡克定律 .....	43
4.2 弹性应变能函数 .....	49
4.3 屈服函数与应力空间 .....	52
4.4 德鲁克公设与伊留申公设 .....	55
4.5 常用的屈服条件 .....	59
4.6 增量理论 .....	67
4.7 全量理论 .....	72
4.8 塑性势的概念 .....	74
本章复习要点 .....	77
思考题 .....	77
习题 .....	78
<b>第 5 章 弹塑性力学问题的提法 .....</b>	<b>79</b>
5.1 基本方程 .....	79
5.2 问题的提法 .....	82
5.3 弹性力学问题的基本解法 解的惟一性 .....	84
5.4 圣维南原理 .....	88
5.5 叠加原理 .....	89
5.6 塑性力学问题的提法 .....	90
5.7 简例 .....	93
本章复习要点 .....	98
思考题 .....	98
习题 .....	99
<b>第 6 章 弹塑性平面问题 .....</b>	<b>100</b>
6.1 平面问题的基本方程 .....	100
6.2 应力函数 .....	103
6.3 梁的弹性平面弯曲 .....	106
6.4 深梁的三角级数解法 .....	111

6.5	用极坐标表示的基本方程	115
6.6	厚壁筒的弹塑性解	119
6.7	半无限平面体问题	124
6.8	圆孔孔边应力集中	131
	本章复习要点	135
	思考题	136
	习题	136
<b>第7章</b>	<b>理想刚塑性平面应变问题</b>	<b>139</b>
7.1	基本关系式	139
7.2	滑移线场理论	141
7.3	滑移线场的主要性质	147
7.4	边界条件	150
7.5	应用简例	152
7.6	位移速度方程	160
	本章复习要点	162
	思考题	162
	习题	163
<b>第8章</b>	<b>柱体的弹塑性扭转</b>	<b>164</b>
8.1	问题的提出 基本关系式	164
8.2	矩形截面柱体的扭转	168
8.3	薄膜比拟法	173
8.4	受扭开口薄壁杆的近似计算	174
8.5	塑性扭转 沙堆比拟法	176
8.6	弹塑性扭转 薄膜-屋顶比拟法	178
	本章复习要点	181
	思考题	182
	习题	182
<b>第9章</b>	<b>变分原理与极值原理及其应用</b>	<b>184</b>
9.1	基本概念	184
9.2	虚位移原理	185
9.3	最小总势能原理	190
9.4	虚应力原理	194



9.5 最小总余能原理	195
9.6 利用变分原理的近似解法	197
9.7 最大耗散能原理	208
9.8 极限分析定理及其应用	209
本章复习要点	214
思考题	215
习题	215
<b>第 10 章 薄板的弯曲与塑性极限分析</b>	<b>218</b>
10.1 基本概念与基本假定	218
10.2 薄板弯曲的平衡方程	221
10.3 边界条件	226
10.4 矩形板的经典解法	230
10.5 圆板的轴对称弯曲	235
10.6 用变分法解板的弯曲问题	240
10.7 板的屈服条件	245
10.8 板的塑性极限分析	247
本章复习要点	256
思考题	257
习题	257
<b>附录 I 下标记号法与求和约定</b>	<b>259</b>
I.1 下标记号法	259
I.2 求和约定	260
<b>附录 II 特征线理论简介</b>	<b>261</b>
II.1 一阶偏微分方程的特征线理论	261
II.2 一阶偏微分方程组的特征线理论	262
<b>参考文献</b>	<b>267</b>
<b>外国人名译名对照表</b>	<b>269</b>
<b>索引</b>	<b>271</b>
<b>后记</b>	<b>274</b>

# 第 1 章

## 绪 论

### 1.1 弹塑性力学的研究对象和任务

弹塑性力学是固体力学的一个分支学科,是研究可变形固体受到外载荷、温度变化及边界约束变动等作用时,弹塑性变形和应力状态的科学。弹塑性力学这个名词是根据固体材料在受外部作用时所呈现出来的弹性与塑性性质命名的。弹性力学讨论固体材料中的理想弹性体及固体材料弹性变形阶段的力学问题。塑性力学讨论固体材料塑性变形阶段的力学问题。可变形固体的弹性阶段与塑性阶段是整个变形过程中不同的两个阶段,弹塑性力学是研究这两个密切相连阶段的力学问题的科学。

弹塑性力学是人们在长期生产斗争与科学实验的丰富成果的基础上发展起来的。它的发展与社会生产发展有着特别密切的关系,它来源于生产实践,又反过来为生产实践服务。弹塑性力学作为固体力学的一个独立分支学科已有一百多年的历史。它有一套较完善的经典理论和方法,在工程技术的许多领域得到了广泛的应用。目前,由于现代科学技术的进一步发展,生产向弹塑性力学提出了一系列新课题、新任务。因而,研究弹塑性力学的新理论、新方法及其在工程上的应用是非常必要的。在目前,弹塑性力学仍然是一门富有生命力的学科。

材料力学和结构力学的研究对象及问题,往往也是弹塑性力学所要研究的问题。不过,在材料力学和结构力学中主要采用简化的用初等理论可以描述的数学模型。在弹塑性力学中,则将采用较精确的数学模型。有些工程问题(例如非圆形断面柱体

的扭转,孔边应力集中,深梁应力分析等问题)用材料力学和结构力学的理论无法求解,而在弹塑性力学中是可以解决的。有些问题虽然用材料力学和结构力学的方法可以求解,但无法给出精确可靠的结论,而弹塑性力学则可以给出用初等理论所得结果可靠性与精确度的评价。因而,弹塑性力学的任务有二:一是建立并给出用材料力学和结构力学方法无法求解的问题的理论和方法;二是给出初等理论可靠性与精确度的度量。

学习本课程的目的大致可归结为:

- 1) 确定一般工程结构在外力作用下的弹塑性变形与内力的分布规律。
- 2) 确定一般工程结构的承载能力。
- 3) 为进一步研究工程结构的强度、振动、稳定性等力学问题打下必要的理论基础。

## 1.2 基本假定

固体材料通常分为晶体和非晶体两种。晶体是由许多离子、原子或分子按一定规则排列起来的空间格子(称为晶格)构成的。它们一般均处于稳定的平衡状态。普通固体(例如低碳钢、黄铜、铝、铅等)是由许多晶粒方位混乱地组合起来的。它们中间常有一些缺陷存在。非晶体一般是由许多分子集合组成的高分子化合物。由此可见,固体材料的微观结构是多样的、复杂的。如果我们在研究工程结构的力学性态时,考虑固体材料的这些特征,必将带来数学上的极大困难。为了把本书所研究的问题限制在一个简便可行的范围内,必须引进下列一些假定。

1) 假定固体材料是连续介质。就是说,这种介质无空隙地分布于物体所占的整个空间。这一假定显然与上述介质是由不连续的粒子所组成的观点相矛盾。但我们采用连续性假定,不仅是为了避免数学上的困难,更重要的是根据这一假定所得出的力学分析,被广泛的实验与工程实践证实是正确的。事实上,连续性假定与现代物质理论的分歧可用统计平均的观点统一起来。从统计学的观点来看,只要所论物体的尺寸足够大时,物体的性质就与体积的大小无关。通常工程上的结构构件的尺寸,与晶粒或分子团的大小相比其数量级是非常悬殊的。在力学分析中,从物体中取出任一微小单元,在数学上是一个无穷小量,但它却含有大量的晶粒,晶体缺陷与微小单元进而与物体尺寸相比更是小得很多,因而连续性假定实际上是合理的。对于一些多相物体,通常也作为连续性介质看待。

根据**连续性假定**,用以表征物体变形和内力分布的量,就可以用坐标的连续函数来表示。这样,我们在进行弹塑性力学分析时,就可以应用数学分析这个强有力的工具。

弹塑性力学的理论基础仍然是牛顿力学。连续性假定和理论力学中讨论过的牛顿力学定律相结合就必然会产生连续介质力学。当进一步给出了固体材料的弹塑性本构关系之后,也就必然会得到弹塑性力学的基本方程。

2) 物体为均匀的各向同性的。即认为物体内各点介质的力学特性相同,且各点的各方向的性质也相同。也就是说,表征这些特性的物理参数在整个物体内是不变的。

3) 物体的变形属于小变形。即认为物体在外力作用下所产生的变形,与其本身几何尺寸相比很小,可以不考虑因变形而引起的尺寸的变化。这样,就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的尺寸。此外,物体的变形和各点的位移公式中二阶微量可以略去不计,从而使得几何变形线性化。

4) 物体原来是处于一种无应力的自然状态。即在外力作用以前,物体内各点应力均为零。我们的分析计算是从这种状态出发的。

以上基本假定是本书讨论问题的基础,还有一些针对具体问题所作的假定,将在以后各章分别给出。

### 1.3 弹性与塑性

固体材料在受力以后就要产生变形,从变形开始到破坏一般可能要经历两个阶段,即弹性变形阶段和塑性变形阶段。根据材料特性的不同,有的弹性阶段较明显,而塑性阶段很不明显,像一般的脆性材料那样,往往弹性阶段以后紧跟着就破坏。有的则弹性阶段很不明显,变形一开始就伴随着塑性变形,弹塑性变形总是耦联产生。像混凝土材料就是这样。不过大部分固体材料都呈现出明显的弹性变形阶段和塑性变形阶段。今后我们主要讨论这种有弹性与塑性变形阶段的固体,并统称为弹塑性材料。

由材料力学知道,弹性变形是物体卸载以后,能完全消失的那种变形,而塑性变形则是指卸载后不能消失而残留下来的那部分变形。

产生以上两种变形的机理,应从材料内部原子间力的作用来分析。实际上,固体材料之所以能保持其内部结构的稳定性是由于组成该固体材料(如金属)的原子间存在着相互平衡的力。吸力使各原子彼此密合在一起,而短程排斥力则使各原子间保持一定的距离。在正常情况下,这两种力保持平衡,原子间的相对位置处于一种规则排列的稳定状态。受外力作用时,这种平衡被打破,为了恢复平衡,原子便需产生移动和调整,使得吸力、斥力和外力之间取得平衡。因此,如果知道了原子间的力相互作用的定律,原则上就能算出晶体在一定外力作用下的弹性反应。

塑性变形的机理要考虑晶体结构细节。例如夹杂、微孔、晶界、位错群等,都是影

响塑性变形发展的因素。20 世纪 30 年代提出的位错理论说明塑性变形是一种微观晶体缺陷称为位错运动的结果,而简单的原子说尚不能解释全部固体材料的微观性态,主要地,就是由于所有的工程材料都不可避免地有缺陷存在。对于工程问题来说不必具体分析每一个缺陷对于材料性态的影响,而只需研究其宏观的统计特性,即可解决工程设计中的力学分析问题。

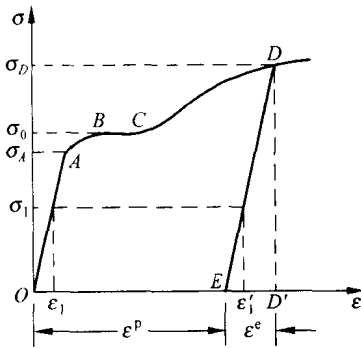


图 1-1

固体材料的上述弹性与塑性性质可用简单拉伸试验来说明。图 1-1 是熟知的低碳钢试件简单拉伸试验代表性的应力-应变曲线。其中 A 点所对应的应力  $\sigma_A$  称为比例极限, A 点以下 OA 段为直线。B 点所对应的应力  $\sigma_0$  为弹性极限, 标志着弹性变形阶段终止及塑性变形阶段开始, 亦称为屈服极限(或屈服应力)<sup>①</sup>。当应力超过  $\sigma_A$  时, 应力应变关系不再是直线关系, 但仍属弹性阶段, 在 B 点之前, 即  $\sigma < \sigma_0$ , 如卸载, 则应力应变关系按原路径恢复到原始状态。

可见, 应力在达到屈服应力以前经历了线弹性阶段(OA 段)和非线性弹性阶段(AB 段)。应力超过屈服应力以后, 如卸载, 则应力与应变关系就不再按原路径回到原始状态, 而有残余应变, 即有塑性应变保留下来。BC 段称为塑性平台。在 BC 段上, 在应力不变的情况下可继续发生变形, 通常称为塑性流动。

当应力达到  $\sigma_D$  时, 如卸载, 则应力应变关系自 D 点沿 DE 到达 E 点, OE 为塑性应变部分, ED' 为弹性应变部分。就是说, 总应变可分为两部分: 弹性部分  $\epsilon^e$  和塑性部分  $\epsilon^p$ , 即总应变为

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$

若在 D 点卸载后重新加载, 则在  $\sigma < \sigma_D$  以前, 材料呈弹性性质, 当  $\sigma > \sigma_D$  以后才重新进入塑性阶段。这就相当于提高了屈服应力, 也相当于增加了材料内部对变形的抵抗能力, 材料的这种性质, 叫做强化。

综上所述, 弹性变形是可逆的, 物体在变形过程中所储存起来的能量在卸载过程中将全部释放出来, 物体的变形可完全恢复到原始状态。这就是说, 如已知应力值, 则相应的应变可惟一地确定。

材料在弹塑性阶段时, 就不是这样, 除了应变不可恢复性之外, 应力和应变不再

<sup>①</sup> 在材料力学课程中曾经讨论过, 对有些材料, 弹性极限与屈服极限并不重合, 屈服极限要高于弹性极限。一般来说, 二者相差很小。屈服极限又分为上、下屈服极限。上屈服极限应力较持续屈服变形时的屈服应力为高, 我们这里以下屈服极限为屈服极限。

有一一对应的关系,即应变的大小和加载的历史有关(如图 1-1 中与  $\sigma_1$  相对应的应变可以是  $\epsilon_1, \epsilon'_1$  等)。

线性弹性力学只讨论应力应变关系服从  $OA$  直线变化规律的问题(对于非线性弹性力学问题,即  $OB$  为曲线的情况,本书不加讨论)。塑性力学则讨论材料在破坏前的弹塑性阶段的力学问题。

容易理解,塑性力学问题要比弹性力学问题复杂得多,但为更好地了解固体材料在外力作用下的性质,塑性理论的研究是十分必要的。对于工程结构的设计来说,如不进行弹塑性分析,则有可能导致浪费或不安全,乃至出现以弹性设计代替塑性设计的错误。鉴于问题的复杂性,通常在塑性理论中要采用简化措施,使在反映了具体问题的主要特征的前提下,将上述应力-应变曲线理想化。图 1-2 是几种简化模型。其中:(a)为理想弹塑性模型;(b)为理想刚塑性模型;(c)为理想弹塑性线性强化模型;(d)为理想刚塑性线性强化模型。这些模型是根据具体问题的特点对应力应变图形(图 1-1)所进行的简化。对于低碳钢材料来说,当总应变超过弹性应变  $10\sim 20$  倍时也不发生强化,故一般地可当作理想塑性材料处理。另一种情况是虽然弹塑性阶段的弹性变形和塑性变形差不多是同量级的,但当研究极限平衡问题时,仍可采用简化模型。例如受内压作用的厚壁筒(见第 6 章),塑性区由内壁开始向外扩展,形成了一个内层为塑性区、外层为弹性区的弹塑性体,由于外层弹性区的约束,内层塑性区的变形仍与弹性变形为同一量级。一旦全截面均进入塑性状态,无限制的塑性流动才成为可能。在这种情况下取理想弹塑性模型(图 1-2a)来分析,既简便,又能反映问题的主要特征。如果塑性变形的发展不受约束,像形成塑性铰的梁那样,则弹性变形与塑性变形相比可以忽略不计。这种情况取理想刚塑性模型(图 1-2b)是合适的。图 1-2c 和图 1-2d 所给出的两种简化模型,是对前两种情况计入线性强化效应而略去塑性流动的结果。

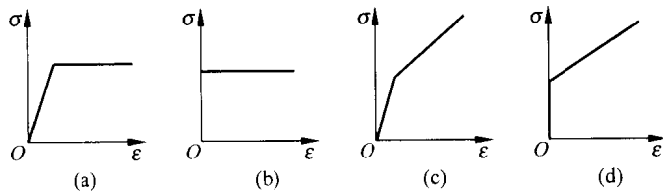


图 1-2

上面介绍的是材料在简单拉伸时的现象。在二维、三维应力状态的条件下,描述方法就复杂得多了,需要进一步讨论屈服条件问题。

## 思 考 题

- 1-1 为什么要引进一些基本假定？如果放弃其中的任一条会出现什么情况？
- 1-2 能否给出几种非金属固体材料的应力应变曲线的特征？

## 第 2 章

# 应 力

### 2.1 力和应力的概念

作用在物体上的外力可分为表面力和体积力,简称**面力**和**体力**。

所谓面力指的是作用在物体表面上的力,如风力、液体压力、两固体间的接触力等。物体上各点所受的面力一般是不同的。为了表明物体表面上的一点  $P$  所受面力的大小和方向,我们在  $P$  点的邻域取一包含  $P$  点在外的微小面积元素  $\Delta S$ (图 2-1),设在  $\Delta S$  上的面力为  $\Delta \boldsymbol{p}$ ,则面力的平均集度为  $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 。如将  $\Delta S$  不断地缩小,则  $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$  及  $\Delta \boldsymbol{p}$  都将不断地改变其大小、方向和作用点。如令  $\Delta S$  无限缩小而趋于  $P$  点, $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$  将趋于一定的极限  $\boldsymbol{p}_s$ ,即有

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S} = \boldsymbol{p}_s \quad (2-1)$$

这个极限矢量  $\boldsymbol{p}_s$  就是  $P$  点面力的集度。由于  $\Delta S$  是标量,故矢量  $\boldsymbol{p}_s$  的方向与  $\Delta \boldsymbol{p}$  的极限方向相同。 $\boldsymbol{p}_s$  在坐标轴  $x, y, z$  方向的投影  $p_x, p_y, p_z$  称为  $P$  点面力的分量,并规定指向坐标轴正方向的分量为正,反之为负。

作用在物体表面上的力都占有一定的面积,但对于作用面很小的面力通常理想化为作用在一点的集中力。

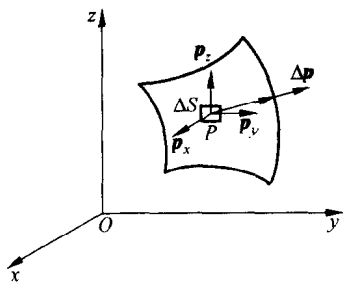


图 2-1

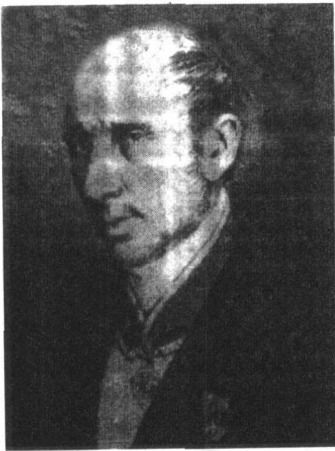


体力,则是满布在物体内部各质点上的力,如重力、惯性力、电磁力等。物体内部各点所受的体力一般也是不同的。我们可以仿照对面力的讨论,得出物体内部一点  $C$  所受的体力为按体积计算的平均集度  $\Delta F_b / \Delta V$ ,在微小体积元素  $\Delta V$  无限缩小而趋于  $C$  点时的极限矢量  $F_b$ ,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_b}{\Delta V} = F_b \quad (2-2)$$

显然,体力矢量  $F_b$  的方向就是  $\Delta V$  内的体力  $\Delta F$  的极限方向。

固体材料受外力作用后就要产生内力和变形。用以描述物体中任何部位的内力和变形特征的力学量是应力和应变。应力的概念,在材料力学课程中虽已讨论并应用过,但由于这一概念的重要性,我们在这里除了强调应力的确切含义之外,还要进一步给出在受力物体内部某一点处的应力状态的描述方法。



Augustin Louis Cauchy

柯西(A. L. Cauchy) 1789年生于法国,1857年逝世。数学家和力学家。他奠定了应力和应变的理论,首先指出了矩形截面柱体的扭转与圆形截面柱体的扭转有重大区别,最早研究了板的振动问题。在数学和力学的其他领域有很多重要贡献。

柯西(A. L. Cauchy, 1789—1857)首先提出了应力和应变的理论。为了说明应力的概念,我们假想把受一组平衡力系作用的物体用任一平面  $C$  分为  $A$ 、 $B$  两部分(图 2-2)。如将  $B$  部分移去,则  $B$  对  $A$  的作用应代之以  $B$  部分对  $A$  部分的作用力。这种力在  $B$  移去前是物体内部  $A$ 、 $B$  之间在  $C$  截面上的内力,且为分布力。如从  $C$  面上  $P$  点的邻域取出一包括  $P$  点在内的微小面积元素  $\Delta S_c$ ,而  $\Delta S_c$  上的内力矢量为  $\Delta p$ ,则内力的平均集度为  $\Delta p / \Delta S_c$ 。如令  $\Delta S_c$  无限缩小而趋于  $P$  点,则在内力连续分布的条件下  $\Delta p / \Delta S_c$  趋于一定的极限  $\sigma$ ,即

$$\sigma = \lim_{\Delta S_c \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta S_c} \quad (2-3)$$

这个极限矢量  $\sigma$  就是物体在过  $C$  面上  $P$  点处的应力。由于  $\Delta S_c$  为标量,故  $\sigma$  的方向与  $\Delta p$  的极限方向一致。

应力  $\sigma$  可分解为其所在平面的外法线方向和切线方向这样两个分量。沿应力