新世纪高等师范院校专业系列教材

高等代数

主编 乐茂华

南京大学出版社

XINSHIJI
GAODENGSHIFANYUANXIAOZHUANYEXILIEJIAOCAI

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/乐茂华主编. —南京:南京大学出版社,2002.7

新世纪高等师范院校专业系列教材

ISBN 7-305-03949-7

Ⅰ.高… Ⅱ.乐… Ⅲ.高等代数—师范大学—教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 054309 号

丛 书 名 新世纪高等师范院校专业系列教材
书 名 **高等代数**
主 编 乐茂华
出版发行 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 [redacted] 210093
电 话 025-3596[redacted] 025-3592317 传真 025-3303347
网 址 http://[redacted]ss.nju.edu.cn
电子邮件 nupres[redacted]a public1.ptt.[redacted]cn
经 销 全国各地新华书店
印 刷 常熟市华顺印[redacted]限公司
开 本 880×1230 1/32 印张 9 字数 226 千
版 次 2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷
印 数 1-5000
ISBN 7-305-03949-7/O·277
定 价 13.50 元

新世纪高等师范院校专业系列教材

总 序

随着我国科教兴国战略的进一步实施，教师教育改革与发展“十五”规划的全面展开，全国教师教育结构稳步调整，教师教育资源逐步重组，以现有师范院校为主体的教师教育体系不断完善。就师范学院层次而言，我国2002年已有师范学院70所；另有28所师范专科学校通过合并升格为综合学院，仍然保留教师教育的职能与任务。随着办学规模的迅速拓展，一般师范院校普教在校生数均在五千至万人左右。无论是有四十年办学历史的老校，还是刚刚由师专、教院等为基础升格的新校，都面临诸多的困惑与挑战：一、原有的办学模式制约因素。传统的师范院校满足于培养“灌输”型的教师，师范院校的课程设置与教材基本上立足于“够用”这一标准，在前瞻性、系统性等方面比较欠缺。二、区域空间制约因素。传统师范院校往往

满足于为本地区范围培养人才，缺乏交流与流动，与当前涌现的跨地区，甚至是国际性的人才培养方式和培养需求严重不适应。三、规模与质量等矛盾性制约因素。在高等教育规模发展的同时，迫切要求办学水平和办学质量的提高，而课程和教材往往是决定质量的关键性因素。传统的师范院校在课程建设、课程开发以及教材建设方面投入不足、重视不够。四、新技术、新时代发展的挑战。网络技术的发展，校园网的普及，网上学校和网络课程的出现，这些对传统师范教育模式无疑会带来冲击。显然，传统师范教育中教材内容陈旧和滞后，已经不能适应日新月异的形势发展需要，也不适应教师和学生的教与学的要求。因此，必须研究和解决高等师范院校课程与教材面临的这些共同性问题。

高等师范院校的课程与教材关系到人才培养的规格与质量，也是高等师范院校教学建设和教学改革的突破口。教师、学生、课程这三个要素中，教师主导和学生主体必然以课程作为中介性载体。"课程"内容不是凝固不变的，而是随时代、社会、教师、学生等因素的变化而不断改变。课程开发的核心不在于创造出更多的课程，而是充分挖掘课程内涵，拓展课程边际，不断更新课程内容，更加贴近学生。而所有这些都必须通过教材体现出来。由此可见，教材在高等师范院校教育教学中具有极其重要的地位和作用。

2001 年 3 月，国家教育部在《关于"十五"期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的文件中，要求各高校"以邓小平理论为指导，全面贯彻国家的教育方针和科教兴国战略，面向现代化、面向世界、面向未来，认真贯彻全国第三次教育工作会议精神，深化教材改革，全面推进素质教育。加强组织领导，加大资金投入；实施精品战略，抓好重点规划，注重专业配套，促进推广选用"。

为了贯彻教育部《关于"十五"期间普通高等教育教材建设与改革的意见》、《基础教育课程改革纲要（试行）》、《义务教育课程设置实验方案》，加强教师培养、培训工作的针对性与主动性，推进高等师范院校课程设置与开发，推进课程建设与教材建设，立足"师范学院"这

一特殊而庞大的办学层次，围绕师范院校责无旁贷的服务属性，全国十二个省（自治区）二十余所师范院校与南京大学出版社联合攻关，组成“新世纪高等师范院校课程开发与教材建设研究”课题组和《新世纪高等师范院校专业系列教材》编委会，致力于课程设置、课程结构、课程内容与教材特色的研究，探索并建立适应本层次院校办学实际的人才培养课程结构、课程内容和教材建设体系。通过校际合作，学科互补，明确高等师范学院课程的基本结构和主要标准，推出真正适合本科层次、又不同于综合性师范大学的系列教材。本课题已获得江苏省政府教育科学“十五”规划课题立项、全国教育科学“十五”规划课题立项，同时也得到了教育部领导、教育部师范司领导的高度重视和大力支持。

在课题研究的基础上，我们提出了《新世纪高等师范院校专业系列教材》的编写宗旨和编写原则。首先，要本着“守正出新”的精神，坚持学术规范，坚持实事求是的科研态度，系统介绍本学科的基本知识，广泛吸收目前已有的优秀研究成果，在“守正”的基础上力求挖掘新资料，提出新问题，发现新视角，彻底转变传统教材只考虑教师“教”，不研究学生“学”，不注意培养学生探索精神、自学能力和创新能力的倾向，体现基础性、学术性、前沿性和探索性的统一。其次，要具有针对性。要面向高等师范院校（主要是刚升格的高等师范学院）这一个特殊的教学层面，根据这一层面的师资和学生的实际情况开展教材编写工作，处理好难易程度的关系、“守正”与“出新”的关系、基础课与专业课的关系、中等教育与高等教育如何衔接的关系、师范性与非师范性的关系。针对本层次院校学生的不同需求，在平实、实用的基础上，引导学生进入学术研究领域；同时，重视基础教育课程改革的进展，关注中小学教材的变革和不同版本，并做出呼应和对策。第三，“精品战略”与“人才战略”互动发展。每种教材的主编一般由在学术上有较高造诣的教授或博士担任，参编者一般为副教授或硕士。通过课题研究，推动高质量教材的编写；通过教材的编写，进一步培养、选拔本层次院校的学科带头人，使得教材建设和人才建

设两方面都取得丰硕的成果。

最后，我们热忱地欢迎全国师范院校的专家学者参加本课题的共同研究，对《新世纪高等师范院校专业系列教材》提出宝贵意见，让我们一起开创我国高等师范教育美好的明天！

新世纪高等师范院校专业系列教材编委会

2002 年 6 月

前　言

高等代数是高等师范院校数学与应用数学专业的一门基础课程。本书依照该课程的教学大纲，根据编者多年的教学实践经验编写而成。

本书内容大致可分为多项式理论和线性代数两个部分。在多项式理论部分，为了使读者了解多项式与整数的相似性质，本书在第一章简要介绍了整数的整除性、最大公因数、唯一分解定理、带余除法等基本概念和结论，以便对照。在线性代数部分，本书强调了行列式、矩阵和线性空间在线性方程组、线性变换、欧氏空间、二次型等方面的应用，力求使读者能够通过这些内容了解和掌握线性代数的基本研究方法。上述编写思路来源于编者承担的广东省教育厅省级重点课程建设项目的研究成果，它具体体现在第三章至第九章内容的编排和取舍。

本书的起点定位在读者已经熟悉中学数学的水平。书中提到的结论，除了代数基本定理尚需运用复变函数论知识来证明以外，其余都可在本书范围内得到证明。

由于高等代数是中学代数的继续和提高，它与中学代数有很大的不同。这种不同不但表现在内容、观点和

方法上，同时还表现在对知识掌握程度的评价方式上。读者要学好这门课程，不但要熟记各种计算技巧，还要会进行严密的推理论证。因此，本书在第一章除了介绍集合、映射等基本概念以外，还特意介绍了几种常用的证题方法。这些方法在各门数学课程的学习中都是有用的。

本书的第一章至第六章由乐茂华教授编写，第七章至第九章由江中豪教授编写。全书由乐茂华教授和谷秀川教授统一修改定稿，周建设副教授、殷庆祥副教授参加了编写和勘校工作。

本书的编写和出版得到了全国高等师范学院新世纪专业教材编委会和南京大学出版社的指导和资助，编者谨在此表示衷心的感谢。

编　者

2002 年 6 月

目　录

第一章　预备知识

本章介绍代数学中最基本的概念和方法. 同时,为了读者更好地了解多项式理论,本章简要介绍了与其对应的整数基本性质.

§1.1　常用证题术

一、命题

在数学中,将可以判断其真假的陈述语句称为**命题**,能够被证明是正确的命题通常以定理、引理或推论的形式出现. 可以认为数学就是从几个最原始的概念出发,利用几条不加证明而公认正确的公理,通过严格的逻辑推理,运用演绎的方法得到的知识体系. 因此,数学的发展过程就是不断地提出命题并判断其真伪的过程.

一个命题成立与否总是有条件的. 如果当命题 $\boldsymbol{A}$ 成立时,命题 $\boldsymbol{B}$ 必定成立,则记作命题 $\boldsymbol{A}\Rightarrow$命题 $\boldsymbol{B}$. 此时称命题 $\boldsymbol{A}$ 是命题 $\boldsymbol{B}$ 成立的**充分条件**.

如当命题 $\boldsymbol{A}$ 不成立时,命题 $\boldsymbol{B}$ 必定也不成立,则称命题 $\boldsymbol{A}$ 是命题 $\boldsymbol{B}$ 成立的**必要条件**. 由于"$\boldsymbol{A}$ 不成立时,$\boldsymbol{B}$ 一定不成立"与"$\boldsymbol{B}$ 成立时,$\boldsymbol{A}$ 必定成立"的意思是相同的,所以此时记作命题 $\boldsymbol{B}\Rightarrow$命题 $\boldsymbol{A}$. 因此,当命题 $\boldsymbol{A}\Rightarrow$命题 $\boldsymbol{B}$ 时,可以说成"命题 $\boldsymbol{A}$ 是命题 $\boldsymbol{B}$ 成立

的充分条件”，也可说成“命题 $\boldsymbol{B}$ 是命题 $\boldsymbol{A}$ 成立的必要条件”.

如果命题 $\boldsymbol{A}\Rightarrow$ 命题 $\boldsymbol{B}$，又有命题 $\boldsymbol{B}\Rightarrow$ 命题 $\boldsymbol{A}$，即命题 $\boldsymbol{A}$ 既是命题 $\boldsymbol{B}$ 成立的充分条件，又是必要条件，则称命题 $\boldsymbol{A}$ 是命题 $\boldsymbol{B}$ 成立的**充分必要条件**，简称**充要条件**，记作 $\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}$. 当命题 $\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{B}$ 时，也称命题 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**等价**的.

例 1.1.1 对于实数 a 和 b，$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$.

命题的等价是一种等价关系，它有下列性质：

（ⅰ）命题 $\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{A}$.

（ⅱ）当命题 $\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{B}$ 时，必有命题 $\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{A}$.

（ⅲ）当命题 $\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{B}$，命题 $\boldsymbol{B}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{C}$ 时，必有命题 $\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{C}$.

从等价命题的上述性质可知：对于有限多个命题 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、…、$\boldsymbol{A}_n$，如果命题 $\boldsymbol{A}_1\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{A}_2$，命题 $\boldsymbol{A}_2\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{A}_3$，…，命题 $\boldsymbol{A}_{n-1}\Leftrightarrow$ 命题 $\boldsymbol{A}_n$，命题 $\boldsymbol{A}_n\Leftrightarrow\boldsymbol{A}_1$，则这些命题必定彼此等价.

二、常用证题术

数学命题的证明常用以下三种方法.

1. 直接法

根据已知的定义、引理、定理或推论，从题设条件直接推出需要证明的命题的方法称为**直接法**.

例 1.1.2 证明：两个偶数之和仍是偶数.

证 已知偶数是可以表成 2 与整数乘积的整数. 设 a、b 是偶数. 此时 $a=2a_1$，$b=2b_1$，其中 a_1、b_1 是整数. 因为

$$a+b=2a_1+2b_1=2(a_1+b_1),$$

其中 a_1+b_1 是整数，所以 $a+b$ 也是偶数. 证完.

2. 反证法

当命题 A 只有正确和错误两种可能时，如果通过假设命题 A

不成立的情况下可导出矛盾，则根据排中律可以证明该命题正确.这种方法称为**反证法**.

例 1.1.3 一个三角形中不含有两个钝角.

证 设α、β、γ是同一个三角形的三个内角.已知

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

如果该三角形中含有两个钝角，不妨假定α和β是钝角.根据钝角的定义可知$\alpha>\frac{\pi}{2}$，$\beta>\frac{\pi}{2}$.于是可得

$$\pi=\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\gamma>\pi$$

这一矛盾.因此一个三角形中不会含有两个钝角.证完.

3. 数学归纳法

有时，一个数学命题是一系列可以用正整数编号的命题的总和.

例 1.1.4 证明：对于任何正整数n，等式

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \tag{1.1.1}$$

成立.

此时，设等式(1.1.1)为命题$\boldsymbol{A}$.同时，对于任何一个给定的正整数k，设等式

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1) \tag{1.1.2}$$

为命题$\boldsymbol{A}(k)$.比较(1.1.1)和(1.1.2)可知：

命题$\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$成立命题$\boldsymbol{A}(n)$对所有正整数$n$都成立.　　(1.1.3)

对于此类命题，数学归纳法往往是一种有效的证明方法.

数学归纳法原理是建立在有关正整数理论的**皮亚诺(Peano)公理系统**上的，它的正确依赖于以下命题：

命题 1.1.1 设$\boldsymbol{S}$是一组正整数.此时$\boldsymbol{S}$中必有一个数c，使得$\boldsymbol{S}$中任何一数a都满足$c\leqslant a$，如此的c称为$\boldsymbol{S}$中的**最小数**.

上述命题称为**最小数原理**,用它可以证明以下定理

定理 1.1.1 对于命题 $\boldsymbol{A}(n)$ ($n=1, 2,\cdots$),如果

(ⅰ) 命题 $\boldsymbol{A}(1)$成立;

(ⅱ) 当命题 $\boldsymbol{A}(k)$成立时,命题 $\boldsymbol{A}(k+1)$也成立;

则命题 $\boldsymbol{A}(n)$对于所有正整数 n 都成立.

证 如果命题 $\boldsymbol{A}(n)$不是对所有正整数都成立,则根据最小数原理可知:存在一个正整数 c,可使命题 $\boldsymbol{A}(c)$不成立,但是对任何小于 c 的正整数 n,命题 $\boldsymbol{A}(n)$都成立.

从条件(ⅰ)可知 $c\neq1$. 因为 c 是正整数,故有 $c>1$. 此时 $c-1$ 也是正整数,而且从最小数的定义可知命题 $\boldsymbol{A}(c-1)$成立. 于是从条件(ⅱ)立得命题 $\boldsymbol{A}(c)$成立这一矛盾. 因此根据反证法可知命题 $\boldsymbol{A}(n)$对所有正整数 n 都成立. 证完.

定理 1.1.1 是数学归纳法的基本形式,称为**第一数学归纳法原理**. 以下用此法来证明例 1.1.4 中的等式.

例 1.1.4 的证明 当 $n=1$ 时,等式(1.1.1)显然成立. 所以命题 $\boldsymbol{A}(1)$成立. 假定命题 $\boldsymbol{A}(k)$成立,即等式(1.1.2)成立. 由于从(1.1.2)可知

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+k+(k+1) &= (1+2+\cdots+k)+(k+1) \\
&= \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(k+2),
\end{aligned}
$$

所以此时命题 $\boldsymbol{A}(k+1)$成立. 于是根据数学归纳法可知:命题 $\boldsymbol{A}(n)$对所有的正整数 n 都成立,即等式(1.1.1)对任何的正整数 n 都成立. 证完.

在有些情况下,定理 1.1.1 中的假设条件"命题 $\boldsymbol{A}(k)$成立"还不够,需要有更强的假定才能解决问题. 此时可考虑运用以下形式的归纳法:

定理 1.1.2 对于命题 $A(n)$ $(n=1, 2,\cdots)$，如果

(ⅰ) 命题 $A(1)$成立；

(ⅱ) 当命题 $A(1)$、$A(2)$、…、$A(k)$都成立时，命题 $A(k+1)$也成立；则命题 $A(n)$对于所有正整数 n 都成立.

证 运用定理 1.1.1 的证明方法不难得出本定理. 证完.

上述定理称为**第二数学归纳法原理**.

另外，有时一个命题的编号是从某个整数 t 开始的. 此时若要用数学归纳法讨论，只需将定理 1.1.1 或定理 1.1.2 中的条件(ⅰ)"命题 $A(1)$成立"换成"命题 $A(t)$成立"即可.

§1.2 集合与映射

一、集合

1. 集合的概念

在数学中通常将一些事物的总体称为**集合**，构成集合的事物称为该集合的**元素**. 集合是一个最基本的概念，它不能定义，只能描述. 集合最重要的特征是要能明确判断任何一个事物是否为该集合的元素.

例如，"大于 1 的整数"是一个集合，"充分大的整数"则不是集合.

本书用粗黑体大写英文字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、…表示集合，用小写英文字母 a、b、c、…表示元素.

如果 a 是集合 $\boldsymbol{A}$ 的元素，则记作 $a\in\boldsymbol{A}$，否则记作 $a\notin\boldsymbol{A}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$；至少含有一个元素的集合称为**非空集合**.

当集合 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是集合 $\boldsymbol{B}$ 的元素时，$\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 的子集，记作 $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$；否则记作 $\boldsymbol{A}\not\subseteq\boldsymbol{B}$. 显然，空集$\varnothing$是任何集合 $\boldsymbol{A}$ 的子集，即