教育科学“十五”国家规划课题研究成果

复变函数与积分变换

苏变萍　陈东立　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

复变函数与积分变换

西安建筑科技大学理学院

苏变萍　陈东立　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/苏变萍，陈东立编. —北京：高等教育出版社，2003

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

ISBN 7-04-011883-1

Ⅰ.复…　Ⅱ.①苏…②陈…　Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 024140 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	湖河印业有限公司		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2003 年 5 月第 1 版
印　　张	18.5	**印　　次**	2003 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	**定　　价**	21.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

内容提要

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果，是依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，结合本学科的发展趋势，在教学实践的基础上编写而成的．在编写的过程中始终遵循着：为专业课打好基础，培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力的原则．在具体内容编写上力求做到：分析客观事物——建立概念——发展理论——应用理论解决实际问题．强调将基础知识的学习，数学思想、方法的学习、能力的培养孕育其中．强调理论的应用性及与计算机的结合．本书具有体系严谨，逻辑性强，内容组织由浅入深，理论联系实际，适应新形势要求，讲授方式灵活等特点．

本书的内容为第一篇、第二篇、数学实验三部分，第一篇为复变函数，共七章，主要内容是：复数和复变函数，导数，积分，级数，留数，保形映照及解析函数的应用．第二篇为积分变换，共二章，主要内容是：傅里叶变换，拉普拉斯变换．数学实验的主要内容为数学软件的应用和积分变换的部分程序．

本教材建议学时约60(不含“*”内容)．

本书可作为高等院校有关专业本科教材，也可供科技、工程技术人员阅读参考．

总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型本科人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型本科人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内

容和教学方法的知识载体,在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。目前,教材建设工作存在的问题不容忽视,适用于应用型人才培养的优秀教材还较少,大部分国家级教材对一般院校,尤其是新办本科院校来说,起点较高,难度较大,内容较多,难以适应一般院校的教学需要。因此,在课题研究过程中,各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果,并和教学实际结合起来,认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革,组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师,编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案,以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信,随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部即将启动的“高等学校教学质量和教学改革工程”的实施,具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003 年 4 月

前　言

《复变函数与积分变换》一书是作者研究了大量的中外相关教材资料，在教学实践的基础上，依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》，结合大学教学课程体系和内容的改革要求，以培养学生数学素质为目的编写而成的．本书具有如下特点：

1．复变函数的内容体系方面，复数，复函数，复导数，复积分，级数，留数，保形映照等概念与高等数学的函数，微分，积分，级数等概念遥相呼应，使学生通过对比易于学习和掌握有关内容且能达到对所学内容由少到多，再由多到少．在内容的展开方面，不论是复变函数部分还是积分变换部分都特别注重内容（事件）发生、发展的自然过程，强调概念的产生过程所蕴含的思想方法，注重概念、定理叙述的精确性．从而在学生获得知识的同时培养学生推理、归纳、演绎和创新能力．

2．为了适应社会发展需要，将数学理论与实际问题拉近距离，在复变函数部分增加了解析函数对平面向量场的应用一章，使来自实际的数学理论再回到实际中去解决问题．在积分变换部分，添加了离散傅里叶变换、离散沃尔什变换、梅林变换、z 变换的简单介绍．

3．随着计算机的发展，数学与计算机的关系越来越密切，本书数学实验部分通过数学软件和程序将抽象数学理论与计算机的结合展现在读者面前．

4．本书的习题量较大，这给了教师选择和学生练习的余地，并且设置了一定数量的思考型题目．

5．本书在内容的表述方式上，不像对数学系专业学生的要求那样严格，而是将数学语言在某些地方“通俗化”，做到了简单、明了、直白．

总之，本书具有体系严谨，逻辑性强，内容组织由浅入深，理论联系实际，适应新形势要求，讲授方式灵活等特点．

本书由西安建筑科技大学苏变萍主编，其中第一篇的第一、二、三、四章、第二篇及数学实验部分由苏变萍编写，第五、六、七章由西安建筑科技大学陈东立编写．全书最后由苏变萍统稿．

本书在编写过程中得到了学校、理学院、数学教研室和广大同仁的大力支持和帮助，潘鼎坤教授、徐裕生教授给予了许多重要的指导，西安建筑科技大学刘林教授仔细审阅了全部书稿．在此深表感谢．并恳切希望读者对此书提出宝贵意见和建议．

作者

2003 年 3 月于西安

郑重声明

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

策划编辑　李艳馥

编　　辑　胡乃冏

封面设计　王凌波

责任绘图　朱　静

版式设计　李　杰

责任校对　李　杰

责任印制　孔　源

目　录

第一篇　复变函数

第1章　复数与复变函数

第2章　导　数

第5章　留　数

第6章　保形映照

*第 7 章 解析函数对平面向量场的应用

第二篇 积分变换

第 1 章 傅里叶变换

第 2 章 拉普拉斯变换

*数学实验

第一篇　复变函数

复数是十六世纪人们在解代数方程时引入的,在十七和十八世纪,随着微积分的发明与发展,人们研究了复变数函数(简称复变函数),得到了一些重要结果.

因为复数最初是单纯地从形式上推广而引进的,并且在十八世纪以前,由于人们对复数的有关概念了解得不够清楚,用它们进行计算得到了一些矛盾,所以复数在历史上长期不能为人们所接受,“虚数”这一名词本身恰好反映了这一点.

可是复数并不神秘,它可与有序实数对或平面向量一一对应,在某些情况下用复数表示的向量计算起来更方便.十八世纪,J. 达朗贝尔(1717—1783)与 L. 欧拉(1707—1783)等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义,澄清了复数的概念,并应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题.直到这时,人们才接受了复数.

复变函数的理论基础是在十九世纪奠定的.A.L. 柯西(1789—1857),K. 外尔斯特拉斯(1815—1897)和 G.F.B 黎曼(1826—1866)是这一时期的三位代表人物.柯西和外尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数,黎曼研究复变函数的映照性质.

本世纪,复变函数论成为数学的重要分支之一,随着它的应用领域不断扩大而发展成一门庞大的学科.这门学科不但研究本身在发展中提出的问题,而且对于自然科学其它部门(如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等)以及数学中其他分支(如微分方程、积分方程、概率论、数论等)复变函数论都有重要的应用 .

第 1 章　复数与复变函数

高等数学和复变函数都是以变量为研究对象的数学课程.所不同的是高等数学的变量来自于实数集合,而复变函数中的变量来自于复数集合.本章将介绍复数的概念、运算、复变函数、初等函数的概念及其性质.

1.1 复　　数

1.1.1 复数及其代数运算

1. 复数的概念

在中学我们已经学过复数.知道 i 是方程 $x^2+1=0$ 的一个根,即 $i^2=-1$,这里 i 称做虚数单位.

当 x,y 都是实数时,我们称 $z=x+iy$ 为复数.x,y 分别称为 z 的实部与虚部.记作

$x=\mathrm{Re}(z), y=\mathrm{Im}(z)$.

当 $x=0, y\neq0$ 时,$z=iy$ 称为纯虚数;

当 $y=0$ 时,$z=x$ 被视作实数 x.

两个复数的相等,当且仅当它们的实部与虚部分别相等.

一个复数等于零,当且仅当它的实部与虚部同时等于零.

称复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 互为共轭复数.复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$.

2. 复数的代数运算

对以上定义的复数,我们来规定其运算方法.由于实数是复数的特例,因此复数的运算法则施行于实数时,应与实数的运算结果相符.同时复数运算应能够满足实数运算的一般规律.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ 的运算定义如下:

复数的加法、减法:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

复数的乘法:

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0).$$

以上各式的右端分别称为复数 z_1 与 z_2 的和、差、积、商.

复数运算所满足的算律:

(1) 交换律

$$z_1+z_2=z_2+z_1; \qquad z_1z_2=z_2z_1.$$

(2) 结合律

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3; \qquad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3.$$

(3) 分配律

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

算律(1)、(2)、(3)读者可自行证之.

我们注意到对复数的运算仍有以下事实:

(1) $z+0=z,\quad 0\cdot z=0$;

(2) $z\cdot 1=z,\quad z\cdot\dfrac{1}{z}=1$;

(3) 若 $z_1z_2=0$,则 z_1 与 z_2 至少有一个为零,反之亦然.这是因为如果 $z_1z_2=0,z_2\neq0$

$$z_1=z_1\left(z_2\cdot\frac{1}{z_2}\right)=(z_1z_2)\frac{1}{z_2}=0.$$

(4) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}=\dfrac{z_1}{z_3}+\dfrac{z_2}{z_3}$.

计算

$$\left(\frac{1}{2-3\mathrm{i}}\right)\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{5-\mathrm{i}}=\frac{5}{26}+\frac{1}{26}\mathrm{i}.$$

例 1.1　证明:$(1+z)^2=1+2z+z^2$.

证　$$\begin{aligned}(1+z)^2&=(1+z)(1+z)\\&=1+z+z+z^2\\&=1+2z+z^2.\end{aligned}$$

共轭复数的运算性质:

(1) $\bar{\bar{z}}=z$;　　(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$;

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$;　　(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

我们来证明性质(3),其余留给读者.

证　设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$.那么

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\overline{z_1z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\begin{aligned}\bar{z}_1\,\bar{z}_2&=(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(-x_1y_2-x_2y_1)\end{aligned}$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).$$

因而

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\quad\overline{z}_2.$$

例 共轭复数

$$\overline{\left(\frac{-1+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)}=\frac{\overline{(-1+3\mathrm{i})}}{\overline{(2-\mathrm{i})}}=-\frac{1+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}.$$

例 1.2 证明:

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2},\qquad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

证 设 $z=x+\mathrm{i}y$. 则

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\frac{(x+\mathrm{i}y)+(x-\mathrm{i}y)}{2}=x=\mathrm{Re}(z);$$

$$\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}=\frac{(x+\mathrm{i}y)-(x-\mathrm{i}y)}{2\mathrm{i}}=y=\mathrm{Im}(z).$$

1.1.2 复数的几何表示

1. 复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数(x,y)唯一确定. 于是能够建立全体复数和 xy 平面上的点之间的一一对应关系. 换句话说,我们可以用横坐标为 x,纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$.

由于 x 轴上的点对应着实数,故 x 轴称为实轴;y 轴上非原点的点对应着纯虚数,故 y 轴称为虚轴. 这样表示复数 z 的平面称为复平面或z 平面.

2. 复数的模与幅角

在复平面上,复数 z 还与从原点 O 到 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引向量构成一一对应关系. 因此,我们也可以用向量来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$(如图 1.1). **复数的模**

我们称向量 z 的长度为复数 z 的模,记作 $|z|$(如图 1.1).

关于复数 z 的模 $|z|$ 有:

(1) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$;

(2) $|z|=|\overline{z}|,\ z\overline{z}=|z|^2$;

(3) $|z|\leqslant|x|+|y|,\ |x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|$;

(4) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

(5) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

(6) $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

这里 $|z_1-z_2|$ 又表示点 z_1 与 z_2 之间的距离.

(1)、(2)、(3)显然成立,利用运算定义和性质容易得到(4). 在 1.1.3 节定理 1.1 中我们还将利用复数的其它形式更简捷地证明它.