

紅專大學函授教材

高中数学复習

(三角部分)

第一分册

(初稿)

天津市十六中学数学教研組沈希詠編

高等教育出版社

本書是天津市紅專廣播函授大學供電機、機械、化工、冶金專業適用的高中三角復習教材。內容主要是根據人民教育出版社出版的高級中學平面三角課本編寫的。結合這些專業特點，講授三角方面必要的基本知識。包括：三角函數，反三角函數，三角方程及三角形解法等。因為只有18節課的講授復習時間，所以內容比較簡略，敘述也力求淺近易懂。

本書可作為廣播函授及一般業餘學校的教學用書。

紅專大學函授教材 高中數學復習

(三角部分)

第一分冊

(初稿)

天津市十六中學數學教研組沈希詠編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第054號)

人民教育印刷廠印刷 新華書店發行

統一書號13010·520 開本850×1168 1/32 印張13 1/16

字數20,000 印數15501—44512 定價(8)¥0.09

1953年9月第1版 1953年11月北京第2次印刷

第一章 三角函数的定义及基本性質

§ 1. 角的生成 任何一个角，例如， $\angle AOB$ 可以看做是由它的一条边 OB 从另一条边 OA 的位置开始，繞着頂点 O 旋轉而生成的。 OA 叫做角的始边， OB 叫做角的終边， O 叫做頂点。如果一个角的終边旋轉的方向是反时針的方向，我們規定它是正角（如圖 1）；如果是順时針的方向，就規定它是負角（如圖 2）。旋轉的过程愈長則角的絕對值愈大。一个角的終边由始边的位置开始按反时針方向旋轉一周到再次回到始边的位置就生成 0° 到 360° 的一切角。終边旋轉一周以后，若繼續旋轉所成的角就大于 360° ，所以通常所說的角的大小是沒有限度的。为了方便起見，常把角的始边放在軸的右方，頂点放在原点，根据終边落在哪一個象限，就把这个角叫做第几象限的角。例如，圖 3 中的 α 角我們就叫它做第三象限的角。 80° 、 165° 、 240° 和 310° 就分別是第一、第二、第三和第四象限的角，而 -120° 、 -60° 分別是第三、第四象限的角。

在圖 4 里我們可以看到， 390°

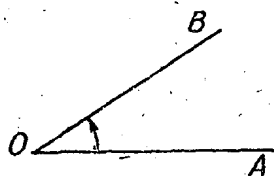


圖 1.

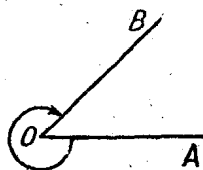


圖 2.

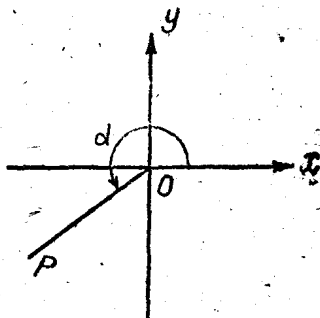


圖 3.

和 -330° 角都和 30° 角的終边相同。 390° 可以写成 $360^\circ + 30^\circ$ 。
 -330° 可写成 $-360^\circ + 30^\circ$ ，除了这两个角而外，和 30° 角的終边相同的角还有 $2 \times 360^\circ + 30^\circ$ ， $-2 \times 360^\circ + 30^\circ$ ， $3 \times 360^\circ + 30^\circ$ ， $-3 \times 360^\circ + 30^\circ$ ，…等，所有和 30° 的角的終边相同的角，连同 30° 的角在内，可以用 $k \times 360^\circ + 30^\circ$ 来表示，在这里 k 是整数（即 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ）。一般的說，所有和 α 角終边相同的角，连同 α 角在内，可以用 $k \times 360^\circ + \alpha$ 来表示（ k 是整数）。

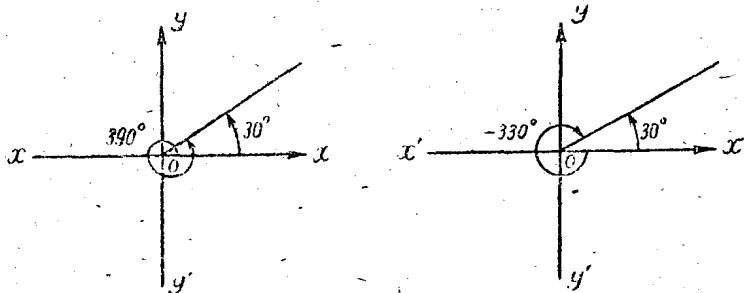


圖 4.

§ 2. 角的單位 角的單位有以下兩種

一、角度制（六十分制）在平面几何学里，我們已經知道等于整个圓的三百六十分之一的弧是含有一度的弧，一度的弧所对的圓心角是 1 度的角，用度做單位来量弧与角的制度叫做角度制。因为在角度制里 1 度等于 60 分，1 分等于 60 秒，所以这种制度也叫做六十分制。

二、弧度制（徑制）以所設的角当做圓心角，它所对弧長与半徑長的比叫做該角的弧度或徑。当圓心角所对弧長等于半徑的时候，这个角的大小就是弧度制的單位叫做 1 弧度的角或 1 徑，这个弧就叫做含有 1 弧度（或 1 徑）的弧。如圖 5， $\widehat{AB}$ 是含有 1 弧度的弧， $\angle AOB$ 是 1 弧度的角。用弧度做單位来量弧与角的制度叫做弧度制或徑制。用弧度来量弧与角的时候，“弧度”兩字通常略

去不写,例如, $\angle AOB = 2$ 弧度就写成 $\angle AOB = 2$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 弧度就写成 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 依此类推。

以上两种单位,形式上虽然不同,但都是用长度量角的大小的,因此,它们之间可以互换,互换的方法是根据 $360^\circ = 2\pi$ 弧度,所以得:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \approx 0.01745 \text{ 弧度};$$

$$1 \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44.8''.$$

例 1. 把 $67^\circ 30'$ 化成弧度。

解: 因为 $67^\circ 30' = 67\frac{1}{2}$ 度, 所以

$$67^\circ 30' = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \times 67\frac{1}{2} = \frac{135\pi}{360} \text{ 弧度} = \frac{3\pi}{8} \text{ 弧度}.$$

如果需要求得这个弧度的数的近似值;例如,精确到 0.001 的近似值,我们可以这样来做:

$$67^\circ 30' = 0.017453 \text{ 弧度} \times 67.5 = 1.178 \text{ 弧度}.$$

2. 把 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度化成度。

$$\text{解: } \frac{3\pi}{5} \text{ 弧度} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{3\pi}{5} = 108^\circ.$$

度与弧度相互换算还可以用“四位数学用表”里的第 XVI 表求得近似的结果。

下面是几个常用角的角度和弧度数的换算表,在这个表里,所列的各组对应值常要应用,所以必须记得。

度	0°	15°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

如果用 R 表示圆的半径, l 表示弧长, α 表示这个弧所对的圆

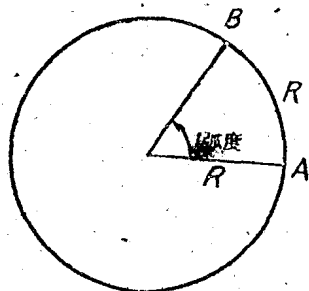


圖 5.

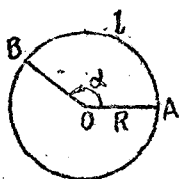


圖 6.

心角的弧度数，根据角的弧度定义，可以得到圆心角、半径和弧长三者之间的关系：

$$\alpha = \frac{l}{R}. \text{ 由这关系可推得 } l = R\alpha \text{ 及 } R = \frac{l}{\alpha}.$$

这就是说，圆的半径、圆心角的弧度数和圆心角所对的弧长三者之中，如知其二，则另一个就可以计算出来。

例 1. 已知圆的半径是 5 厘米，试求 18° 的弧长。

$$18^\circ = 18 \times \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} = \frac{\pi}{10} \text{ 弧度}$$

$$l = R\alpha = 5 \times \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \approx 1.571 \text{ 厘米}.$$

答：这条弧长 1.571 厘米。

2. 在半径等于 100 厘米的圆上，已知一条弧的长是 111.18 厘米。求这弧所对圆心角的度数。

解：用 α 表示这弧所对圆心角的弧度数，则

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{111.18}{100} = 1.1118 \text{ (弧度)}$$

$$1.1118 \text{ 弧度} = 1.1118 \times 57^\circ 17' 44.8'' = 63^\circ 42'.$$

答：这条弧所对的圆心角是 $63^\circ 42'$ 。

3. 已知一条弧的长是 3.7 厘米。这弧所对的圆心角是 1.85 弧度，求圆的半径。

解：用 R 表示圆的半径，得

$$R = \frac{l}{\alpha} = \frac{3.7}{1.85} = 2 \text{ 厘米}.$$

答：圆的半径是 2 厘米。

4. 殷飞轮的半径是 1.2 米每分钟旋转 300 次

1) 求飞轮每秒的角速度 ω ;

2) 求轮上一点的速度 v ;

3) 证明距轮心是 R 的点的速度为 $R\omega$

解：1) 飞轮每秒旋转的弧度数叫做角速度，因此，

$$\omega = \frac{2\pi \times 300}{60} = 10\pi \text{ 弧度/秒}.$$

2) 飞轮上某一点的速度就是普通速度，所以

$$v = \frac{2\pi \times 1.2 \times 300}{60} = 12\pi \text{ 米/秒} = 37.70 \text{ 米/秒 (准确到百分制)}.$$

3) 证明：

$$v = \frac{2\pi R \times 300}{60} = R \left(\frac{2\pi \times 300}{60} \right) = R\omega.$$

習 題

1. 用弧度制表示下列各角度(写成多少 π 的形式):

1) 18° ; 2) 75° ; 3) 120° ; 4) 300° ; 5) $22^\circ 30'$; 6) n° .

2. 用角度制表示下列弧度制表示的各角:

1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{4\pi}{8}$; 5) $\frac{7\pi}{10}$; 6) 3 .

3. 在半径等于 12 厘米的輪子的周上有一点, 求这点繞着圆心旋轉 1500° 所經過的距离。

4. 机器的軸在 3 分鐘內旋轉 9000 周, 它的平均角速度是多少弧度/秒?

5. 一个直径为 40 公分的滑輪, 以 45 弧度/秒的角速度旋轉, 求輪周上一点在 5 秒鐘內所經過的距离。

6. 齒輪有 90 个齿。若它轉了: 1) 30 个齿; 2) 40 个齿; 3) 200 个齿, 把齒輪旋轉的角度表成弧度。

7. 輪子每分鐘旋轉 450 轉, 求它的角速度为若干每秒弧度。求与軸相距为 1) 20-厘米和 2) 1.5 米各点的綫速度。

8. 軸的角速度为 $42.31/\text{秒}$ 。求它每分鐘旋轉的轉數。

9. 滑輪的角速度 $\omega = \frac{2\pi}{9}$ 每秒弧度而旋轉。問它需要多少長的时间, 才轉一整圈。

10. 鐵道轉弯之处成一圓弧, 它的半徑为半里, 一列車以一小时 20 里的速度行駛其上; 問 10 秒間轉过几度?

§ 3. 三角函数

一、三角函数的定义

在平面几何学中我們用直角三角形兩边的比来定义銳角的正弦、余弦、正切和余切。但是我們研究的角往往不是限于銳角, 对于一般的角这些定义便不适用了。現在我們來說明对于一般角怎样下这些定义。

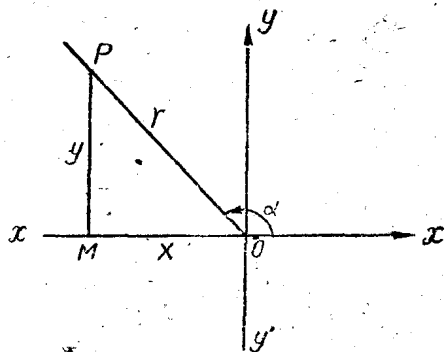


圖 7.

如果角 α (圖 7) 的始邊放在橫坐標軸的右方, 頂點放在原點, 無論角的終邊落在哪個象限內, 我們都可以在角的終邊上任取一點 P , 設這點的坐標是 $P(x, y)$, 設由原點到 P 點的距離是 r , 則角 α 的六個三角函數的定義如下:

1. 角 α 的終邊上任一點 P 的縱坐標 y 和原點到這點的距離 r 的比叫做角 α 的正弦, 用 $\sin \alpha$ 來表示, 即 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ 。

2. 角 α 的終邊上任一點 P 的橫坐標 x 和原點到這點的距離 r 的比叫做角 α 的余弦, 用 $\cos \alpha$ 來表示, 即 $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ 。

3. 角 α 的終邊上任一點 P 的縱坐標 y 和橫坐標 x 的比叫做角 α 的正切, 用 $\operatorname{tg} \alpha$ (或 $\tan \alpha$) 來表示, 即 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ 。

4. 角 α 的終邊上任一點 P 的橫坐標 x 和縱坐標 y 的比叫做角 α 的余切, 用 $\operatorname{ctg} \alpha$ (或 $\cot \alpha$) 來表示, 即 $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$ 。

5. 由原點到角 α 的終邊上任一點 P 的距離 r 和 P 點的橫坐標 x 的比叫做角 α 的正割, 用 $\sec \alpha$ 來表示, 即 $\sec \alpha = \frac{r}{x}$ 。

6. 由原點到角 α 的終邊上任一點 P 的距離 r 和 P 點的縱坐標 y 的比叫做角 α 的余割, 用 $\operatorname{cosec} \alpha$ (或 $\operatorname{csc} \alpha$) 來表示; $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}$ 。

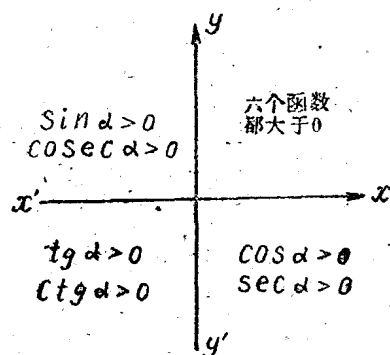


圖 8.

很明显, 如果角 α 是銳角, 上面關於角 α 的三角函數的定義和平面幾何學中所說的完全一樣。這些比的大小和 α 角的大小有關, 而與 P 點在終邊上的位置無關。 P 點的坐標 x 和 y 的正負和代數里所規定的一樣, 距離 r 我們永遠把它作為

正的, 所以在不同的象限中各個三角函數的符號可用圖 8 來說明,

在圖上沒有指出的函数都是負值。

根据以上所談的任意角的三角函数的定义可以知道終边相同的角的三角函数的值完全相同。例如： 390° 的角和 30° 的角終边相同，因此， $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$ ， $\cos 390^\circ = \cos 30^\circ$ 等等。同样 $\sin(-330^\circ) = \sin 30^\circ$ ， $\cos(-330^\circ) = \cos 30^\circ$ 等等。一般的說， $k \times 360^\circ + \alpha$ (或 $2k\pi + \alpha$)，(k 是整数) 的三角函数和 α 的三角函数完全相同，即 $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$ ， $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ 等等。

二、用綫段表示三角函数 以坐标軸的原点为圓心作單位圓，此圓和角 α 的始边交于 A ，和終边交于 B ， OA 就叫做不动徑， OB 叫动徑。

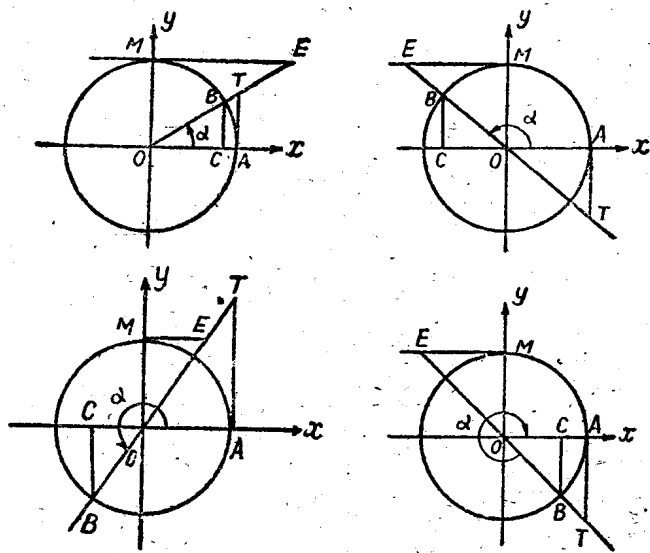


圖 9.

1) 从 B 点作 OA 的垂綫 BC ，因为 $\sin \alpha = \frac{BC}{OB}$ ， $\cos \alpha = \frac{OC}{OB}$ 而 OB 是一个單位，所以 BC 和 OC 的量数連同它們的符号可以用来分別表示 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值，而 BC 的符号規定和 y 軸一样， OC 的符号是規定和 x 軸的一样。

2) 过 A 点和 M 点(單位圓和 y 軸的交点)分別作圓的切綫与角 α 的終边各交于 T 和 E , 因为 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{OT}{OA}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{ME}{OM}$, 所以 AT 和 ME 的量数連同它們的符号可以用来分別表示 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 的值。而 AT 的符号規定和 y 軸一样, ME 的符号規定和 x 軸的一样。

3) 从原点 O 到正切綫和余切綫終点的綫段 OT 和 OE 分別是角 α 的正割綫, 余割綫, OT 和 OE 的量数連同它們的符号用来分別表示 $\sec \alpha$ 和 $\operatorname{cosec} \alpha$ 的值, 如果它們和 OB 同向, 是正值, 如果反向, 就是負值。

用来表示 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\operatorname{tg} \alpha$ 、 $\operatorname{ctg} \alpha$ 、 $\sec \alpha$ 和 $\operatorname{cosec} \alpha$ 的單位圓中的綫段 BC 、 OC 、 AT 、 ME 、 OT 和 OE 分別叫做角 α 的正弦綫、余弦綫、正切綫、余切綫、正割綫和余割綫。

三、三角函数值的变化 从函数綫的消長很容易看出角 α 从 0° 到 360° 的变化过程中各三角函数的变化范围列表如下:

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	不存在	0	不存在	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	不存在	0	不存在	0	不存在
$\sec \alpha$	1	不存在	-1	不存在	1
$\operatorname{cosec} \alpha$	不存在	1	不存在	-1	不存在

从表中可以看到 α 从 0° 到 360° 的时候角 α 的正弦和余弦的绝对值不大于 1; 正割余割的绝对值不小于 1; 而正切余切的绝对值没有限制, 它的变化范围是实数域的全部。如果角再繼續增加,

則角的終邊就繼續旋轉，重複取得 0° 到 360° 的各種位置，而三角函數也就重複取得以前的各個值。因此，角由 360° 變到 720° 變到 1080° 等等的時候，角的三角函數的變化都和由 0° 到 360° 的時候三角函數的變化相同，由此，可知當角變化的時候每增加或減少一定的值它的三角函數值就重複出現。當一個角的變數變化的時候，如果每增加或減少一定的值它的函數的值重複出現，這種函數就叫做周期函數所以可以知道三角函數是周期函數。正弦余弦正割和余割的周期是 $360^\circ (2\pi)$ ；正切余切的周期是 $180^\circ (\pi)$ 。

例 1. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ，求作 0° 到 360° 的角 α 。

解：因為已知的正弦的值是正的，所以求作的角的正弦綫是由 x 軸向上的；又因正弦的值是 $\frac{1}{3}$ ，所以正弦綫的長等於單位長的三分之一。

在 x 軸的上方作平行於 x 軸並且距離等於 $\frac{1}{3}$ 單位長的直綫，設它與單位圓相交於 P_1, P_2 兩點，連結 OP_1, OP_2 ，就得兩個角 α_1 和 α_2 ，這兩個角都適合於已知條件，所以都是所求的角。

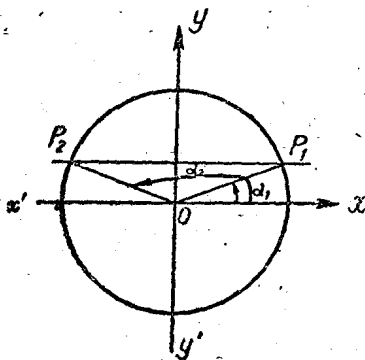


圖 10.

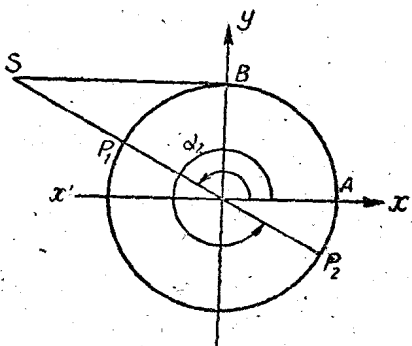


圖 11.

2. 已知 $\cot \alpha = -2$ ，求作 0° 到 360° 角 α 。

解：因為已知的余切的值是負的，所以求得的角的余切綫是由切點向左的，又因余切的絕對值是 2 所以余切綫的長等於單位長的 2 倍。

從單位圓和 y 軸的正方向 OY 的交點 B 引切綫，在這切綫上，由 B 向左取 BS ，使它的長等於 2 個單位長，過 O 和 S 作直綫，設它與單位圓相交於 P_1, P_2 兩點，就得出兩個角 α_1 和 α_2 ，這兩個角都適合於已知條件所以都是所求的角。

習 題

1. 如果角的終邊上一点的坐标是: 1) $(3, 4)$; 2) $(-5, 12)$; 3) $(-8, -6)$; 4) $(2, -1)$; 求这角的正弦、余弦、正切和余切的值。

2. 决定下列积或商的符号:

1) $\sin 105^\circ \cdot \cos 195^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 284^\circ \cdot \operatorname{ctg} 157^\circ$; 3) $\frac{\sin 67^\circ 30'}{\sec 128^\circ 16'}$;

4) $\frac{\cos 270^\circ 4'}{\operatorname{cosec} 118^\circ 37'}$.

3. 設 x 为三角形的一个內角, 下列函数中哪几个可以是負值? 1) $\sin x$; 2) $\cos x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x$.

4. 依照下列条件, 分別求 0° 到 360° 的角 θ 所在的象限: 1) $\sin \theta$ 和 $\operatorname{ctg} \theta$ 同号; 2) $\cos \theta$ 和 $\operatorname{tg} \theta$ 异号; 3) $\frac{\cos \theta}{\sec \theta}$ 是負值; 4) $\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{ctg} \theta}$ 是正值; 5) $\sin \theta$ 是負值而 $\cos \theta$ 是正值。

5. 設 α 是任意的銳角, 利用單位圓說明:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$; 2) $\operatorname{tg} \alpha > \sin \alpha$.

6. 求下列各式的值:

1) $a \cdot \sin 0^\circ + b \cdot \cos 90^\circ + c \cdot \operatorname{tg} 180^\circ$;

2) $2 \cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ - 4 \cos 180^\circ + 5 \sin 270^\circ - 6 \cos 360^\circ$;

3) $m \operatorname{tg} 0^\circ + n \cdot \cos 90^\circ - p \sin 180^\circ - q \cdot \cos 270^\circ - r \sin 360^\circ$.

7. 决定下列各差的符号:

1) $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$; 2) $\cos 20^\circ - \cos 21^\circ$; 3) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$;

4) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$; 5) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ$; 6) $\operatorname{ctg} 200^\circ - \operatorname{ctg} 210^\circ$;

7) $\sin 260^\circ - \sin 250^\circ$; 8) $\cos 320^\circ - \cos 310^\circ$.

8. 1) 如果 $\cos \phi > \cos 30^\circ$, 求銳角 ϕ 的范围;

2) 如果 $\sin \alpha < \sin 225^\circ$, 求 180° 到 270° 的角 α 的范围。

9. 如果函数 $y = 1 + \sin \alpha$: 1) 取得極大值, 2) 取得極小值, 求 0° 到 360° 的角 α ; 又这个函数的極大值和極小值各是多少?

10. 求作 0° 到 360° 的角 α , 已知:

1) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; 3) $\cos \alpha = -1$.

§ 4. 同角的三角函数 根据三角函数的定义可以得出, 对于任何一个角 α , 它的三角函数間都有下面的各种关系:

$$1. \text{ 倒数关系 } \begin{cases} \sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1 \\ \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1 \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \end{cases}$$

$$2. \text{ 比的关系 } \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$3. \text{ 平方关系 } \begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{cases}$$

上面的关系式都是对于它的两边具有意义的那些角而说的，以后遇到的关系式也是这样。（ α 为任何大小时，它的正弦和余弦都是有意义的；当 $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 或 $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时它的正切和正割是无意义的；当 $\alpha = k\pi$ 时它的余切和余割是无意义的。）

以上几个基本关系式的应用：

- 1) 简化三角函数式；
- 2) 证明三角恒等式；
- 3) 已知一角的一个三角函数值，求该角的其余五个三角函数值；
- 4) 以角的一个三角函数表示其他余三角函数。

例 1. 化简: $\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha - \sin \alpha - \cos^2 \alpha}$

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha - \sin \alpha - \cos^2 \alpha} &= \frac{\cos \alpha (2 \sin \alpha - 1)}{(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha (2 \sin \alpha - 1)}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (2 \sin \alpha - 1)}{2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha (2 \sin \alpha - 1)}{\sin \alpha (2 \sin \alpha - 1)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

2. 求证 $\frac{\operatorname{tg} \phi - \operatorname{ctg} \phi}{\sec \phi + \operatorname{cosec} \phi} = \sin \phi - \cos \phi. \quad (0^\circ < \phi < 360^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \frac{\operatorname{tg} \phi - \operatorname{ctg} \phi}{\sec \phi + \operatorname{cosec} \phi} &= \frac{\frac{\sin \phi}{\cos \phi} - \frac{\cos \phi}{\sin \phi}}{\frac{1}{\cos \phi} + \frac{1}{\sin \phi}} = \\ &= \frac{\frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \phi}{\sin \phi \cos \phi}}{\frac{\sin \phi + \cos \phi}{\sin \phi \cos \phi}} = \frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \phi}{\sin \phi + \cos \phi} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sin \phi + \cos \phi)(\sin \phi - \cos \phi)}{(\sin \phi + \cos \phi)} = \sin \phi - \cos \phi.$$

3. 用 $\sin \alpha$ 表示 α 角的其余各个函数。

解: 对于第一第四象限的角 α :

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \sin^2 \alpha}.$$

对于第二第三象限的角 α :

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = -\frac{\sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

4. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, α 在第二象限, 求 α 角其他三角函数值。

解: 因为 α 角在第二象限, 所以 α 角的余弦是负的, 因此,

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -2\sqrt{2};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = 3.$$

5. 已知 $\operatorname{tg} \alpha = 2$. 求 α 角的其他三角函数值。

解: α 角可以在第一或第三象限內。

1° 如果 α 角在第一象限內, 那末,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\sec \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2° 如果 α 角在第三象限內, 那末,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\sec \alpha = -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + 4} = -\sqrt{5};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

6. 設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$, 且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$, 求 $\cos \theta$.

解:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta};$$

但 θ 是銳角, 所以 $\cos \theta$ 的符号取正的。因此,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

習 題

1. 有沒有 0° 到 360° 的角 α : 1) $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 都等於 $\frac{1}{2}$; 2) $\sin \alpha = 0$ 而 $\cos \alpha = -1$; 3) $\sin \alpha = 0.85$ 而 $\cos \alpha = 0.65$?

如果沒有, 說明為什麼? 如果有, 說出這個角。

2. 1) 從公式 $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, 導出用 $\sec^2 \alpha$ 表示 $\operatorname{tg}^2 \alpha$ 的式子;

2) 設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$, 並且 $\cos \theta = \frac{12}{13}$, 求 $\sec \theta$ 和 $\operatorname{tg} \theta$ 。

3. 化簡下列各式(式中所含的角都是 0° 到 360° 的角。)

$$1) \operatorname{ctg} \beta \sec \beta; \quad 2) (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha; \quad 3) \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}.$$

4. 求証下列各式(式中所含的角都是 0° 到 360° 的角。)

1) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2 \theta - \sin^2 \theta = \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \theta$;

3) $\frac{\sin^2 x}{\sec^2 x - 1} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x - 1} = 1$.

5. 已知 $\sin \theta = \frac{15}{17}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, 求 θ 的其他各三角函数的值。

6. 已知 $\cos x = 0.35$, 求銳角 x 的其他各三角函数的值(精确到 0.01)。

7. 已知 $\operatorname{ctg} \phi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 ϕ 的其他各三角函数的值。

8. 把 $\sin^4 A - \sin^2 A + \cos^2 A$ 化成只含 $\cos A$ 的式子。

9. 把 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ 化成只含 $\operatorname{tg} \theta$ 的式子。

10. 設 $\sin x + \cos x = m$, 求証 $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{-2}$ 。

§ 5. 化任意角的三角函数为銳角的三角函数

一、化負角的三角函数为正角的三角函数。如果用 α 表示一个任意的正角, 那末这个角的負角可以写成 $-\alpha$, 由圖 12 可以看出, 只要 α 的絕對值一定, α 和 $-\alpha$ 的終边就一定关于 x 軸是对称的, 因此, 对于任意的正角 α 我們都有:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

利用同角的三角函数間的关系, 得到:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = \frac{1}{-\sin \alpha} = -\operatorname{cosec} \alpha,$$

即 $-\alpha$ 的三角函数的值等于正角 α 的同函数的值放上原来函数在第四象限內的符号。

二、化大于 360° 的角的三角函数为 0° 到 360° 的角的三角

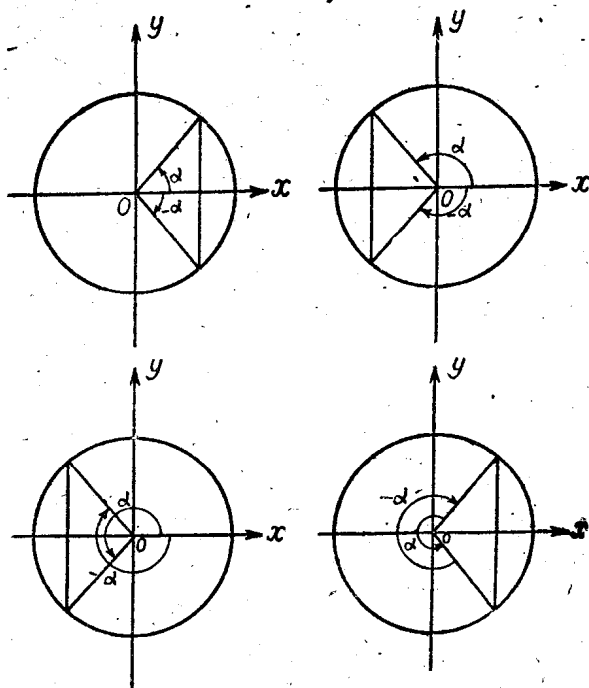


圖 12.

函数。如果已知角是大于 360° ，我們可以根据 $k \times 360^\circ + \alpha$ 的三角函数和 α 的三角函数完全相同这一性質，把已知角的三角函数化成 0° 到 360° 的角的三角函数。

三、 $90^\circ \pm \alpha$ ， $180^\circ \pm \alpha$ ， $270^\circ \pm \alpha$ 和 $360^\circ - \alpha$ 与銳角 α 的三角函数間的关系，現在我們来看 $180^\circ - \alpha$ ， $90^\circ + \alpha$ 与銳角 α 的三角函数間的关系，其余可以类似地得到。

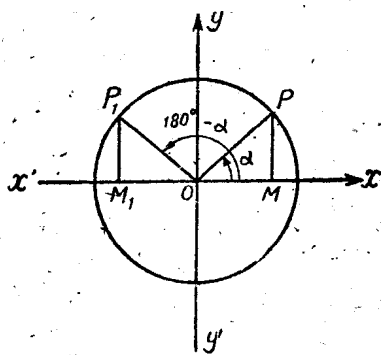


圖 13.