

各种土壤的影区电磁场计算表

苏联 M. Γ. 貝耳肯娜著

电信科学技术研究所译

人民邮电出版社

各種土壤的影區電磁場計算表

蘇聯 M. Г. 貝耳肯娜著

電信科學技術研究所譯

人民郵電出版社

М. Г. БЕЛКИНА
ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В ОБЛАСТИ ТЕНИ
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ПОЧВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО "СОВЕТСКОЕ РАДИО"
МОСКВА — 1949

內 容 提 要

[用公式(1.11)和(1.16)的級數首二項]計算在任意土壤和波長時，鉛垂偶極天線影區電磁場的衰減因數；得出當能源與觀察點都在地面上時，衰減因數的大小、相位的各種表和函數 V_1 的各種表。利用這 V_1 函數只要加以簡單的運算，便能求出能源與觀察點離開地面時的衰減因數。附有各種曲線圖，使得對各表的應用更加方便。

此外，還附有各種輔助的表和圖，以便把物理和幾何數據換為所引用的坐標和無因次參數（這些參數為B. A. 佛克院士的作品和本書的各表所引用的）；並且估計了各計算公式的誤差等。

各种土壤的影區电磁場計算表

著 者: M. Г. 貝 耳 肯 娜
譯 者: 电信科学技术研究所
出版者: 人民邮电出版社
北京东四區 6 条胡同 13 号
印刷者: 北京市印刷二廠
發行者: 新 華 書 店

書号: 無54 1956年3月北京第一版第一次印刷 1—2,000册

787×1092 1/16 37頁 印張 $4\frac{10}{16}$ 插頁: 25 字數 101,000字 定價(8) 1.22元

★ 北京市書刊出版業營業許可証出字第〇四八号 ★

§1 任務的提出和基本公式

在 B. A. 佛克的作品 [1] 中，得出了鉛垂偶極子在離開均勻的地球表面時的赫茲函數的公式為

$$U_a = \frac{e^{ika\vartheta}}{a\vartheta} V(x, y, q), \quad (1.1)$$

式中 $V(x, y, q)$ 為“衰減因數”，其表示式如下

$$V(x, y, q) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_{\Gamma'} \frac{e^{ixt} w(t-y)}{w'(t) - qw(t)} dt. \quad (1.2)$$

此處的

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{tz - \frac{1}{3}z^3} dz \quad (1.3)$$

為埃氏複函數。（ Γ 和 Γ' 的形狀見本節插圖 2）， x, y, q 的數值各為：

$$\left. \begin{aligned} x &= \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \frac{s}{a} = \frac{s}{s_1} \\ y &= \left(\frac{ka}{2}\right)^{-1/3} kh = \frac{h}{h_1} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$q = i \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} \frac{\sqrt{s-1+i\frac{\lambda}{2\pi l}}}{e+i\frac{\lambda}{2\pi l}}, \quad \left(l = \frac{a}{4\pi\sigma}\right), \quad (1.5)$$

式中 h ——鉛垂偶極子離開地面的高度，

s ——能源到地面上觀察點的地表面距離（見本節插圖 1），

a ——地球半徑，

ϵ, σ ——土壤的介質常數和導電係數。

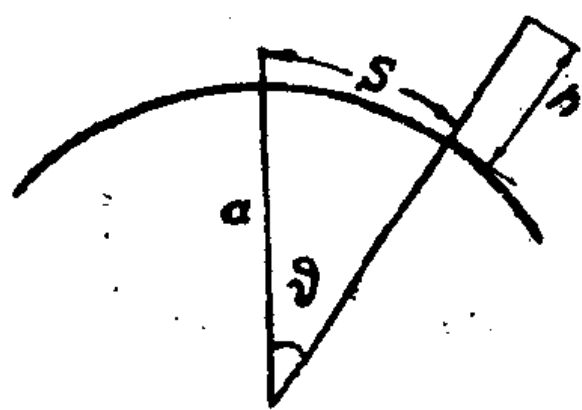


插圖 1

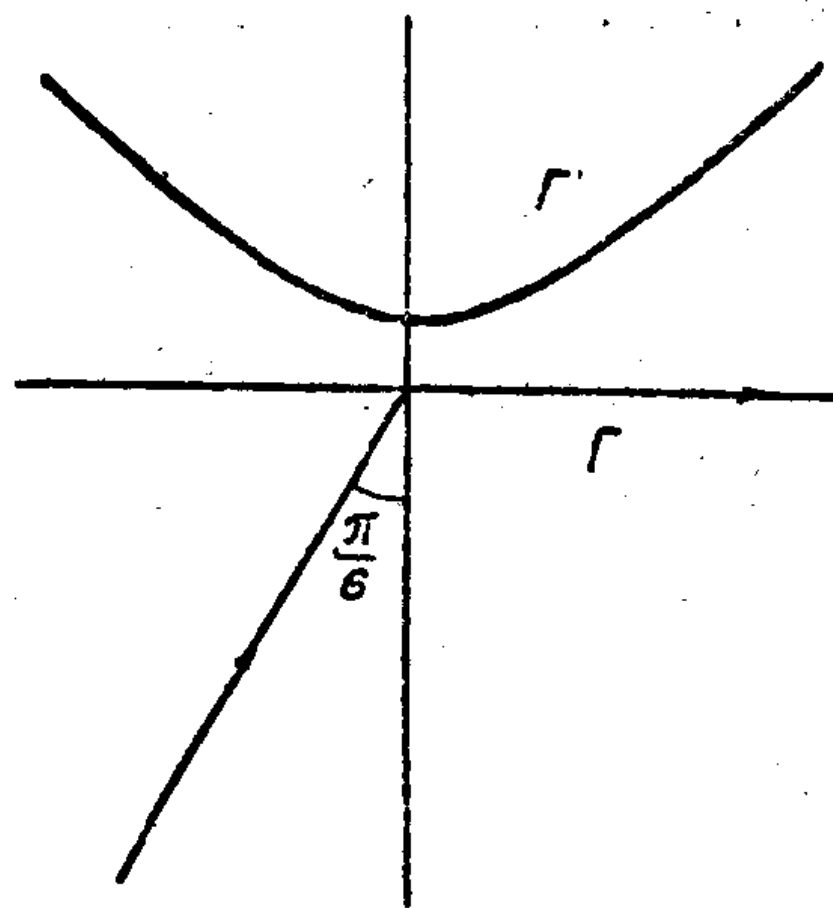


插圖 2

以上這些公式是 B. A. 佛克最先對於不考慮在大氣中的折射，亦即假想大氣是均勻時的電磁場赫茲函數的推導[1]。

但是到了後來，B. A. 佛克又指出，這些公式能夠用在許多實際的重要情況下；當需要考慮大氣折射時，只要在上面用來求“引用坐標” x, y （無因次）和參數 q 的各公式中，把地球的幾何半徑 a ，以地球的“等效半徑” a^* 來代替。 a^* 決定於大氣折射率和高度的關係，它的表示式和進行這替代時的條件公式曾載在 B. A. 佛克作品[2]中。

在影區及半影區（亦即 $x > \sqrt{y}$ ）中，式（1.2）的積分可寫成如下的級數形式（見[1]第42頁）

$$V(x, y, q) = e^{i\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{ixt_s}}{t_s - q^2} \frac{w(t_s - y)}{w(t_s)} \quad (1.6)$$

式中的 $t_s = t_s(q)$ ，為方程式

$$w'(t) - qw(t) = 0 \quad (1.7)$$

的第 s 次根

當 x 和 y 很大，且差數

$$x - \sqrt{y} = z \quad (1.8)$$

為有限時，函數 $V(x, y, q)$ 便化為只是差數 $z = x - \sqrt{y}$ 和參數 q 的函數（參考[1]第49頁）。

$$V(x, y, q) = e^{i\frac{2}{3}\pi^{3/2}\sqrt{\frac{x^2}{y}}} V_1(z, q), \quad (1.9)$$

此處

$$V_1(z, q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma'} \frac{e^{izt}}{w'(t) - qw(t)} dt. \quad (1.10)$$

在引用的作品[2]中指出：函數 $V_1(z, q)$ 是在對大氣折射率變化有更一般假設時，用來計算衰減因數，因此它比公式（1.2）的函數更為有用。

$z > 0$ 時，函數 $V_1(z, q)$ 可用下面的級數來表示，

$$V_1(z, q) = i 2\sqrt{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{izt_s}}{(t_s - q^2)w(t_s)} = \sum_{s=1}^{\infty} m_s(q) e^{izt_s} (z > 0). \quad (1.11)$$

這級數在 z 不太小時，很好使用。

研究公式（1.9）知道：當 q 的模數很小，而 y 近於7時，用這式求得的 $V(x, y, q)$ 絕對值，誤差大約為8%—10%；相位的絕對誤差小於 1° 。當 q 的模數很大而 y 仍為原值時，絕對值誤差達到35%，相位誤差達到 10° 。

y 值愈小，誤差愈大，只要 $y > 20$ ，無論 q 為何值，誤差都不超過6%。

但是，當 z 很大，也可以使這公式準確得對很小的 y 值（ $y \geq 3$ ），有用。當 z 很大或（1.6）和（1.11）的級數中，用一個首項便够了。以 $w(t_s - y)$ 的漸近公式

$$w(t_1 - y) = e^{i\frac{\pi}{4}}(y - t_1)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{2}{3}(y - t_1)^{3/2}} \quad (1.12)$$

代入式(1.6)級數的首項中(參考[4]公式(2.07), 當 $F_{20} = 1$ 時), 以 y 的倒幂指數展開成級數, 並取首三項得

$$V(x, y, q) = \sqrt[4]{\frac{x^2}{y}} \left(1 + \frac{t_1}{4y}\right) e^{i\frac{2}{3}y^{3/2}} e^{i\frac{t_1^2}{4y}} V_1(z, q) \quad (1.13)$$

這種形式的公式, 自 $V_1(z, q)$ 變為 $V(x, y, q)$ 時有如下的誤差。

y	模數的最大(對於 q) 誤差	相位的最大(對於 q) 誤差
3	4%	2°
4	2%	1.5°
5	1%	1°

當函數 $V(x, y, q)$ 和 $V_1(z, q)$ 展開為級數, 而都收斂到首項時, 關係式(1.13)才存在。

根據圖 21 的左邊圖形(參考 § 5 各種圖和表的解釋), 可求出每個級數以一項來計算的誤差, 譬如當 $z \geq 2.5$ 時, 誤差不超過 2%—3%。

$y \geq 3$ 時, 式(1.13)換算因數的誤差不超過 4%。

因而, 當

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 3 \\ z \geq 2.5 \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

由式(1.13)算出的 $V(x, y, q)$, 誤差不超過 8%—10%。

當

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 4 \\ z \geq 3.5 \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

由式(1.13)算出的 $V(x, y, q)$, 誤差不超過 3%。

如果以距離 s 和高度 h 代替所用的坐標(即 x, y), 則式(1.14)和(1.15)成為

$$\left. \begin{array}{l} h \geq 3h_1 \\ h \leq 0.79 \cdot 10^{-4} (s - 2.5 \cdot s_1)^2 \end{array} \right\} \quad (1.14')$$

和

$$\left. \begin{array}{l} h \geq 4h_1 \\ h \leq 0.79 \cdot 10^{-4} (s - 3.5 \cdot s_1)^2 \end{array} \right\} \quad (1.15')$$

(這裏的距離和高度都應該以公里計)。

公式(1.13)應用的範圍(對於幾種不同的波長 λ 時), 見圖 22, 它能够滿足式(1.14')的條件, 所以誤差不超過 8—10%。

在波長 λ 為某幾種值時, 式(1.9)的應用範圍見圖 23, 要使式(1.9)的誤差不超過 8—10%, 就應該滿足下列條件:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 20 \\ z \geq 1.5 \end{array} \right\}$$

計算 z 是以圖 21 的右邊部分為根據；這是由於本書各表是以級數首二項計算，所以表中所取的 $V_1(z, q)$ 也應該了解作式 (1.11) 級數首二項之和。

由表 22 和 23 可知；如果距離在 700—800 公里以內，高度在 9—10 公里以下，那麼波長在 30 米以下時用式 (1.9)，波長在 300 米以下時，用式 (1.13)。

至此為止，已算出了參數 q 等於 0 與 $\sqrt{i}$ ，而 x, y 的變化範圍很大時的衰減因數。此外，П. А. 亞茲利良特曾創造了一種平方法作為 $-3 \leq z \leq -1$ 及 q 為任意數值時計算 $V_1(z, q)$ 的方法；但是，這種方法也只能算出 $q = 0$ 和 $q = \sqrt{i}$ 時的情形。

我們的任務是：當參數 q 為各種值（包括實際中所遇到的大多數土壤），而 x, z 為能夠以級數的首二項，計算出函數 $V(x, 0, q)$ 與 $V_1(z, q)$ 時的值，用式 (1.11) 的級數來計算出 $V_1(z, q)$ ，用級數

$$V(x, 0, q) = e^{i\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{ixt_s}}{t_s - q^2} = \sqrt{x} \sum_{s=1}^{\infty} n_s(q) e^{ixt_s} \quad (1.16)$$

來計算出 $y = 0$ 時的 $V(x, y, q)$ 。

$x \geq 1$ （相當於 $z \geq 1$ ），參數 q 的變化範圍很大時的 $V(x, 0, q)$ 和 $V_1(z, q)$ 函數表是工作的主要結果。此外還附有由距離 s ，高度 h ，波長 λ 及土壤電參數，求出的所用坐標 x, y 及無因次參數 q 的各種輔助表。最後我們加入了許多圖，這些圖或是為了減少應用的困難，或是為了說明各種公式應用的範圍；並且還加入有：按式 (1.13) 由函數 $V_1(z, q)$ 變為函數 $V(x, y, q)$ 的各種圖，計算電波羣速 v_{gp} 圖和某些數學中間值的各種圖。

所有這些圖見附錄。

§2 參 數

衰減因數 $V(x, y, q)$ 和無因次參數 q 有關，而參數 q 與所給的物理條件有如下關係：

$$q = i \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{\epsilon - 1 + i \frac{\lambda}{2\pi l}}{\epsilon + i \frac{\lambda}{2\pi l}}} \quad \left(l = \frac{c}{4\pi\sigma} \right) \quad (2.1)$$

式中 a ——地球半徑，

λ ——真空中波長，

ϵ, σ ——土壤的介質常數和導電係數。

土壤介質複常數

$$\eta = \epsilon + i \frac{\lambda}{2\pi l}$$

的絕對值，可認為相當大（注意：B. A. 佛克在他自己公式的結論中已經做了這種假設），所以

$$\frac{\sqrt{\eta - 1}}{\eta} \approx \frac{1}{\sqrt{\eta + 1}} \quad (2.2)$$

這時式(2.1)成爲

$$q = i \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^{1/3} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + 1 + i \frac{\lambda}{2\pi l}}} \quad (2.3)$$

令

$$b = \left(\frac{a}{2} \right)^{2/5} l^{3/5} \quad (2.4)$$

$$n = \frac{2\pi b}{\lambda}, \alpha = (\varepsilon + 1) \frac{l}{b} = (\varepsilon + 1) \left(\frac{2l}{a} \right)^{2/5} \quad (2.5)$$

(參考[3]第567頁), 得出參數 q 爲

$$q = \frac{in^{5/6}}{\sqrt{i + \alpha n}} \quad (2.6)$$

在本書各表中, 不是直接列出參數 q , 而是列出變化在

$$\left. \begin{array}{l} 0.00 \leq \alpha \leq 0.03 \\ -1.0 \leq \lg n \leq 3.0 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

範圍內的 α 和 $\lg n$ (注意: 此處以及以後的符號 $\lg$ 都是表示普通對數)。

爲了便於理解和應用本書各表起見, 除了淡水和極乾燥土壤外(它們的參數 α 之值, 已超出我們計算的範圍), 特把具體土壤的 $\lg n$ 和 α 數值(在作品[3]中已引用了這種土壤的數據), 列入本書表中(見表2)。

所有包含有地球半徑的數值, 都是以它的幾何半徑 $a = 6.37 \times 10^3$ 公里來計算的。當採用“等效”半徑

$$a^* = ma \quad (2.8)$$

時, 需要把表中數據加以校正。校正公式在 §5 “各種表和圖的解釋”中。

必須指出: 我們對於各種具體土壤的電參數 σ 和 ε , 往往知道得很不準確。同時, 本書各表是假定參數 α 和 $\lg n$ 有着二位正確數字而計算出的。如果不符合這個假設時, 這些表也能夠算出函數 V 和 V_1 的相位及絕對值的一個範圍。

利用表1、2和圖1、2、3上的曲線可以把距離 s 、高度 h 、波長 λ 、土壤的導電係數 σ 和介質常數 ε 變換爲所用坐標 x, y , 和無因次參數 $\lg n, \alpha$ 。應用這些曲線圖來進行換算, 幾乎可以不加思索(參考 §5 各種圖和表的解釋)。

§3 羣 速

當 x 的值能使級數(1.6)的首項, 非常近似於 $V(x, y, q)$ 時(參考圖21左邊圖形及它的解釋), 應用本書中的表, 便能得到電波在真空中的速度 C 和它的羣速 v_{gr} 之比。

事實上, 如果

$$\arg V(x, y, q) \cong \arg a_1(x, y, q)$$

(此處 $a_1(x, y, q)$ 是級數(1.6)首項), 那麼

$$\frac{c}{v_{ip}} \cong 1 + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial k} \arccos \alpha_1 = 1 + \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial s} (x \operatorname{Re} t_1) \quad (3.1)$$

利用式(1.4), 微分方程式(4.1) (見下節), 以及式(2.6)的參數 q , 可以得到

$$\frac{c}{v_{ip}} = 1 + \frac{1}{ks_1(\lambda)} \left[\frac{1}{3} \operatorname{Re} t_1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t_1 - q^2} k \frac{dq}{dk} \right\} \right]. \quad (3.2)$$

如果令

$$\Phi = \frac{1}{3} \operatorname{Re} t_1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t_1 - q^2} k \frac{dq}{dk} \right\}, \quad (3.3)$$

則

$$\frac{c}{v_{ip}} = 1 + \frac{1}{ks_1(\lambda)} \Phi. \quad (3.4)$$

圖26為 Φ 和 $\lg n$ 的關係曲線(在實際上 Φ 和參數 α 沒有關係)。

用式(3.4)所求得的羣速 V_{ip} , 通常和 C 很接近, 而且永遠是比它小。

§4 計算方法¹⁾

首先必須指出: 我們所要計算的式(1.11)和(1.16)級數, 在指數中包含有方程式(1.7)的根 t_s , 因而應該把這些根算得很準確; 又由於這些根 t_s 和 q 有關, 所以必須很準確地求出和 $\alpha, \lg n$ 相當的 q 值。當

$$\alpha = 0.00; 0.01; 0.02; 0.03$$

$$\lg n = -1.0; -0.9, \dots, 3.0$$

時, 可照式(2.6)算出各個 q 值(表3)。以下的計算, 都以這些參數 α 和 $\lg n$ 的同一數值來計算。

在引用的作品[1]中(43—44頁), B. A. 佛克指出: 根 $t_s(q)$ 能滿足微分方程式

$$\frac{dt}{dq} = \frac{1}{t - q^2} \quad (4.1)$$

同時, 他把這方程式的解分為兩種情況加以展開, 一種適用於 $|q|$ 值很小時, 另一種適用於 $|q|$ 值很大時:

$$\begin{aligned} t_s(q) = & t'_s + \frac{1}{t'_s} q + \frac{1}{2(t'_s)^3} q^2 + \left(\frac{1}{3(t'_s)^2} + \frac{1}{2(t'_s)^6} \right) q^3 \\ & - \left(\frac{7}{12(t'_s)^4} + \frac{5}{8(t'_s)^7} \right) q^4 + \left(\frac{1}{5(t'_s)^8} + \frac{21}{20(t'_s)^6} + \frac{7}{8(t'_s)^9} \right) q^5 \\ & - \left(\frac{29}{45(t'_s)^5} + \frac{77}{40(t'_s)^8} + \frac{21}{16(t'_s)^{11}} \right) q^6 + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

和

註1) 如果只對計算的結果有興趣, 可以直接跳到§5, 該節是對應用各種圖和表的解釋。

$$t_s(q) = t_s^0 + \frac{1}{q} + \frac{t_s^0}{3} \frac{1}{q^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{q^4} + \frac{(t_s^0)^2}{5} \frac{1}{q^5} + \frac{7}{18} t_s^0 \frac{1}{q^6} + \\ + \left(\frac{(t_s^0)^3}{7} + \frac{5}{28} \right) \frac{1}{q^7} + \frac{29}{60} (t_s^0)^2 \frac{1}{q^8} + \dots \quad (4.3)$$

式中 t_s' 和 t_s^0 爲 $q=0$ 和 $q=\infty$ 時方程式 (1.7) 的根；至於 $s=1, 2 \dots 5$ 時，它們的數值請閱引用的作品 [1]。

當 $\lg n \geq 0.8$, α 爲任意值，根 t_1 和 t_2 可由展開式 (4.3) 算出。

展開式 (4.2) 只能用在 $\lg n < -0.3$ ，如 $\lg n$ 在 -0.3 和 0.8 之間，必須就微分方程式加以數字的定積分；這時，把這微分方程改爲

$$\frac{dt}{d \lg n} = \frac{1}{t - q^2} \frac{dq}{d \lg n}. \quad (4.4)$$

比較方便。

$\lg n < 0.8$ 時，用這方法只求出了 $\alpha = 0.01$ 時的 t_1 和 t_2 如 α 爲其它值，且 $\lg n$ 很小，計算各個根時，由於 $\lg n < 1$ 且數值固定， q 值隨着 α 的改變而變化得極小，因此用適當的泰勒級數

$$t_s(q) = t_s + (q - \tilde{q}) \left(\frac{dt_s}{dq} \right) + \frac{1}{2} (q - \tilde{q})^2 \left(\frac{d^2 t_s}{dq^2} \right) + \dots \quad (4.5)$$

很好使用，（這裏所有數值都是指在 $\lg n$ 爲一個數值， α 爲各個不同值時的值，並且以符號“ $\sim$ ”表 $\alpha = 0.01$ 時的數值）。這個級數一直到 $\lg n = 1$ 止，使用起來都很方便。

表 4 和表 5 爲 t_1 和 t_2 的各個根。當接近 $\lg n = 0.5$ 時，表中數字的位數減少了，這是由於數字定積分到最後所得結果的準確度相當低。但是即使在最壞情況下， t_1 在小數點後面仍有 4 位數字， t_2 仍有 3 位數字。

計算級數 (1.16) 中的係數

$$n_s(q) = \frac{2\sqrt{\pi}}{t_s - q^2} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (4.6)$$

沒有原則上的困難。

級數 (1.11) 中的各個係數

$$m_s(q) = \frac{i2\sqrt{\pi}}{(t_s - q)w(t_s)} \quad (4.7)$$

含有埃氏複函數 $w(t_s)$ 。

爲了計算這函數方便起見，把它化爲函數 $v(t)$ ；如 t 是實數， $v(t)$ 便是 $w(t)$ 的虛數部分（參考 [4] §1 的 (4.9) 公式）。

假定

$$\tau_s = t_s e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad (4.8)$$

那麼

$$w(t_s) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} v(-\tau_s) \quad (4.9)$$

$$w'(t_s) = -2e^{-i\frac{\pi}{6}} v'(-\tau_s) \quad (4.10)$$

函數 $v(t)$ 和它的導數 $v'(t)$, 各有着負根 $-\tau_s^0$ 和 $-\tau_s'$, 這些根的前五個請看引用的作品 [4] § 4.

這裏把我們所需要的前兩個根, 寫在下面:

s	τ_s^0	τ_s'
1	2.33811	1.01879
2	4.08795	3.24820

用式 (4.8) 由根 t_1 和 t_2 求得的 τ_s 值, 或是近於 τ_s' (q 很小時), 或是近於 τ_s^0 (q 很大時), 所以函數 $v(-\tau_s)$ 可以用泰勒級數在 $-\tau_s'$ 點 (當 $\lg n \leq 0.1$) 計算, 也可以用泰勒級數在 $-\tau_s^0$ 點 (當 $\lg n \geq 0.0$) 計算。因為 τ_s' 和 τ_s^0 為實數, 所以計算級數的係數, 可用作品 [4] 中 t 為實數的 $v(t)$ 各表和微分方程式

$$v''(t) = tv(t), \quad (4.11)$$

t 為實數時函數 $v(t)$ 是能滿足這微分方程式的 (參考 [1] 58 頁公式 (A, 22))。

注意: 應用這些同樣的計算, 可以得到 $v'(-\tau_s)$ 。這往下是需要的, (見式 (4.14))。係數 m_s 可用下面的公式計算。

$$m_s = n_s \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{2v(-\tau_s)} \quad (4.12)$$

[見 (4.6), (4.7) 和 (4.9)]。

但是, 用這方法計算 m_s , 只有在 $\lg n \leq 1.7$, α 為一個任意值時, 才可以; 我們取 $\alpha = 0.01$ 。如果 $\lg n$ 和 α 為其它值, 便不需要計算 $v(-\tau_s)$, 而可以直接求得 m_s 。

第一、可得到像式 (4.5) 那樣的公式, 當 $\lg n$ 為同一值, 它能够把 $\alpha = 0.01$ 的 m_s 變為任何一個 α 值的 m_s (所有 $\alpha = 0.01$ 時的各值, 都用前面所用過的符號 $\sim$ 表示)。

這時, 式 (4.7) 可改為

$$m_s = \tilde{m}_s \frac{\tilde{t}_s - q^2}{t_s - q^2} \frac{w(\tilde{t}_s)}{w(t_s)}, \quad (4.13)$$

按 $t_s - \tilde{t}_s$ 幕的展開式代替 $w(\tilde{t}_s)$ 並利用 (4.9)、(4.10) 二式, 得到

$$m_s = \tilde{m}_s \cdot \frac{\tilde{t}_s - q^2}{t_s - q^2} \cdot \frac{1}{1 - (t_s - \tilde{t}_s) \frac{\tilde{v}'}{\tilde{v}} e^{-i\frac{\pi}{3}} + (t_s - \tilde{t}_s)^2 \frac{\tilde{t}_s}{2}}, \quad (4.14)$$

這公式用在 $\lg n \leq 1.7$ 和 $\alpha \neq 0.01$ 時 (但是也可以用在 $\lg n$ 為任何值時, 因為 $t_s - \tilde{t}_s$ 往往是很小的)。

第二, 可以用下面的方法得到適用於 q 值很大時的簡單公式。我們來研究一下

當 $q \rightarrow \infty$ 時乘積 $q m_s$ 的範圍；利用式 (1.7) 得到：

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q m_s = -\frac{i 2\sqrt{\pi}}{w'(t_s^0)} = m_s^\infty, \quad (4.15)$$

式中的 $t_s^0 = t_s^0 e^{i\frac{\pi}{3}}$ 、 $w(t_s^0) = 0$ (t_s^0 可認為是 $q = \infty$ 時方程式 (1.7) 的根，以這證明 m_s^∞ 時對的)。

利用式 (4.10)，可得便於計算的公式

$$m_s^\infty = \frac{\sqrt{\pi} e^{i\frac{2}{3}\pi}}{v'(-t_s^0)}. \quad (4.16)$$

把式 (4.7) 中 $w(t_s)$ 展開為 $t_s - t_s^0$ 的冪級數，並利用 (4.3) 和 (1.7) 二式，得到：

$$m_s = m_s^\infty \cdot \frac{1}{q} \left(1 + \frac{t_s^0}{2q^2} \right), \quad (4.17)$$

這公式用在 $\lg n \geq 1.7$ 和 α 為任意值時。

用級數 (1.16) 和 (1.11) 繼續往下計算函數 $V(x, 0, q)$ 和 $V_1(z, q)$ ，原則上的困難沒有了。

但是用這些級數首二項，計算函數 V 和 V_1 (圖 21 的右邊圖形)，在 x (或 z) 近於 1 而 $\lg n > 0.1$ 時，甚至不可能得到二位正確數字。

所以我們採用以 $\frac{x}{q}$ 和 $\frac{z}{q}$ 冪展開的漸近級數形式表示 $V(x, 0, q)$ 和 $V_1(z, q)$ ，

$$V(x, 0, q) = -e^{i\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\pi} x \cdot \frac{1}{q^2} \left\{ \left[1 + \frac{ix}{q} - \frac{1}{q^2} \frac{x^2}{2} \right] \sum_{s=1}^{\infty} e^{ixt_s^0} + \frac{1}{q^2} \sum_{s=1}^{\infty} t_s^0 e^{ixt_s} \right\}, \quad (4.18)$$

$$V_1(z, q) = -2i\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{q} \left\{ \left[1 + \frac{iz}{q} - \frac{1}{q^2} \frac{z^2}{2} \right] \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{izt_s^0}}{w'(t_s^0)} + \frac{1}{2} \frac{1}{q^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{t_s^0 izt_s^0}{w'(t_s^0)} \right\}. \quad (4.19)$$

[這二式可以由式 (1.16) 和 (1.11) 用展開式 (4.3) 得到]。

級數 $\sum_{s=1}^{\infty} e^{ixt_s^0}$ 和 $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{izt_s^0}}{w'(t_s^0)}$ 中， t_s^0 為 $q = \infty$ 時，方程式 (1.7) 的根；這些級數是以

首五項來計算的。因此 q 值很大而 $x < 3$ ($z < 3$) 時，用 (4.18)，(4.19) 展開式的首二項算出的結果的準確度，要比用級數 (1.16)、(1.11) 首二項算出的高得多。這就使得 x 、 y 很小，而 q 很大時，表中數據的位數比 x 、 y 相同但 q 很小時的為多。由於 α 值的不同， $|q|$ 隨着 $\lg n$ 而增大的情況也不一樣 (參考表 3)，因此可以用式 (4.18)、(4.19) 求表中的數據的範圍隨着參數 α 的不同，也就不一樣。

當 $x = 1, z = 1$ 時，使用 (4.18) (4.19) 二展開式中所有寫出的各項，可使函數 $V(x, 0, q)$ 和 $V_1(z, q)$ 得到更正確的數據。這時，對所有的 $\lg n \geq 0.9$ 值，都能得到 2—3 位的準確數字。最後這一結果，對於畫出便於應用的曲線圖是很重要的。

當 x (或 z) 和 $\lg n$ 的某些數值，使得無論用式 (4.18), (4.19) 的漸近級數的展開式或用式 (1.16), (1.11) 兩項的級數，都得不到足夠準確度時，利用圖形推算，會使表中數據更準確些。由圖形推算所得的數據，表中以小星 (*) 註明；這些數據不要認為完全可靠。但是，須要指出：現在計算衰減因數 $V(x, 0, q)$ 和函數 $V_1(z, q)$ 是採用蘇聯科學院數學研究所列寧格勒分所的方法。該所的計算包括 x 和 z 的全部範圍，而這用漸近級數來計算是不適合的；同時該所的計算中，還能夠使我們由圖形推算所得的數據更正確。

本書所有各表的誤差，不超過最後一位數字的 1.5 單位。以小號字體排印的數字，誤差可到 2—3 單位；相角表中，如不是註有分的讀數，誤差不超過 1.5 度，如果最後一位數字是八號小鉛體，誤差可能加倍。如果是註明讀數為分時，誤差不超過三、四分，但如果最後一位數字是八號小鉛體，誤差不超過 5—8'，如果是兩位數字都是八號小鉛體，誤差可能到 15—20'。

§5 各種表和圖的解釋

表 1 用來由幾何距離 s 、高度 h 變換為所用坐標 x, y ，並給出下面 (5.1) 式中的水平比例 $s_1(\lambda)$ 和垂直比例 $h_1(\lambda)$ 。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{s}{s_1(\lambda)} \\ y &= \frac{h}{h_1(\lambda)} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

這 $s_1(\lambda)$ 和 $h_1(\lambda)$ 是由公式

$$\left. \begin{aligned} s_1(\lambda) &= \left(\frac{k a}{2} \right)^{1/3} a = 23.45 \times 10^3 \lambda^{1/3} \text{ 米} \\ h_1(\lambda) &= \left(\frac{k a}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{k} = 43.20 \lambda^{2/3} \text{ 米} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

算出。此處波長 λ 應該以米計，因此 $s_1(\lambda)$ 、 $h_1(\lambda)$ 也以米計；這樣一來，式 (5.1) 中從能源到觀察點的地表面距離 s ，能源離地高度 h ，也應該用米計。

表中的地球半徑取為 $a = 6370$ 公里，如果要求用“等效”半徑 $a^* = ma$ ，就需要由同一表中找出 m 值來校正（亦即對折射率進行校正）。

這時的 x 和 y 為

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{s}{s_1(\lambda) m^{2/3}} \\ y &= \frac{h}{h_1(\lambda) m^{1/3}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

z 值的公式為

$$z = x - \sqrt{y} \quad (5.4)$$

圖 1 為數個不同 m 值的 $s_1(\lambda)m^{2/3}$ 和 $h_1(\lambda)m^{1/3}$ 曲線(二坐標軸均以對數比例表示)。橫坐標軸表波長 λ (以米計)，縱坐標軸表 $s_1(\lambda)m^{2/3}$ 和 $h_1(\lambda)m^{1/3}$ (也以米計)。如果所給的 m 值，在圖上找不到相應的直線，那麼可在圖上求出 $m=1$ 時的 $s_1(\lambda)$ 和 $h_1(\lambda)$ ，再從表 1 中求出校正值 $m^{2/3}$ 和 $m^{1/3}$ ，按式 (5.3) 來計算 x 和 y 。

表 2 是數個不同土壤的參數 $\lg n$ 對波長 λ 的關係。本表中，在土壤名稱一欄下面，列舉有土壤電參數 [介質常數；水銀導電係數 10400 (歐姆一厘米) $^{-1}$ 對土壤導電係數之比]，及與波長無關的參數 α 。

表中的地球半徑用 6370 公里，同時也給了用“等效”半徑 $a^* = ma$ 時，對 $\lg n$ 和 α 進行校正的數值。已知 m 值，要求相應的參數時，可先由表中找出 $m=1$ 時的參數，而後按下式計算。

$$\left. \begin{aligned} \lg n &= (\lg n)_{m=1} + \lg m^{2/3} \\ \alpha &= (\alpha)_{m=1} \cdot m^{-2/3} \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

圖 2 為

$$\frac{\alpha}{\varepsilon + 1} = 0.914 \times 10^{-6} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^{2/3} \quad (5.6)$$

的曲線。

其橫坐標表 $\frac{\sigma_0}{\sigma}$ ，以對數比例表示，縱坐標表 $\frac{\alpha}{\varepsilon + 1}$ ，也以對數比例表示。

已知 $\frac{\sigma_0}{\sigma}$ 值，先由圖中找出 $\frac{\alpha}{\varepsilon + 1}$ 值，再以此值乘以 $(\varepsilon + 1)$ (這裏 ε 為已知的)，這樣算出的就是未知數 α 。

圖 3 是爲了避免用表 2 由 λ 和 $\frac{\sigma_0}{\sigma}$ 值(此處 $\sigma_0 = 10440$ (歐姆一厘米) $^{-1}$ 爲水銀導電係數求 $\lg n$ 的困難而製的。

其橫坐標軸表波長 λ 以米計(用對數比例)，兩個完全相等平行傾斜軸表 $\frac{\sigma_0}{\sigma}$ (也用對數比例)，縱坐標軸表 $\lg n$ (用直線比例)。

圖 3 和表 2 一樣，都是 $m=1$ 時的情況。

已知 λ 和 $\frac{\sigma_0}{\sigma}$ ，求 $\lg n$ 時，先在二平行傾斜軸上定出 $\frac{\sigma_0}{\sigma}$ 二點，通過這二點畫一直線，再由橫坐標上已知的 λ 值，畫一垂直線與這直線相交，最後把這相交的交點平行移到縱坐標軸上求出未知值 $\lg n$ 。

爲了便於畫出直線，在圖上二平行傾斜軸上的相同點，還連接了許多直線。

例如： $\lambda = 500$ 米， $\frac{\sigma_0}{\sigma} = 4.5 \times 10^8$ ， $\lg n = 0.74$

表 3 爲無因次參數 q 和用來計算各表所選取的參數 $\lg n$ 與 α 的關係，這關係的

公式爲

$$q = \frac{i n^{5/6}}{\sqrt{i + \alpha n}}$$

(見 § 2 式 (2.6))。

表 4, 5 爲方程式 1.7) 的各個根 t_1 和 t_2 。

表 3, 4, 5 在實用上, 是不需要的, 因爲實用上只用主要的表, 但是它們都有着純粹數學上的用處。這些表是我們計算的中間數據, 這計算的詳細說明見 § 4。

表 6, 7, 8, 9 是我們計算的主要目的, 它們爲 $\lg|V(x, 0, q)|$, $|\operatorname{arc} V(x, 0, q)|$, $\lg|V_1(z, q)|$, $\operatorname{arc} V_1(z, q)$ 各個函數對於變數 x 或 z 、參數 $\lg n$ 、 α 的關係。

每一個 α 值有一張分表, 全部 α 值有四: 0.00; 0.01; 0.02; 0.03, 這樣, 每一個號碼, 譬如號碼 6, 都表示着是這四組表中的一組。

變數 x 和 z , 是每隔 0.2 自 1.0 變到 5.0; 參數 $\lg n$ 也是每隔 0.2 自 -0.9 變到 2.9。

表中函數值的右邊爲由於 $\lg n$ 變化的差數。函數 $\lg|V(x, 0, q)|$ 和 $\lg|V_1(z, q)|$ 的數值全部都加上了 10。

表中註有 (*) 記號者, 表示由圖形推算所得的不完全可靠的數目。

圖 4—19 是爲了避免使用表 6, 7, 8, 9 時的困難。

在每張圖上, 畫有以 $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5$ (或 $z = 1, z = 2, z = 3, z = 4, z = 5$) 標記的五根曲線; 其橫坐標表 $\lg n$, 縱坐標表 α 爲一個固定值時, $\lg|V(x, 0, q)| + 10, \operatorname{arc} V(x, 0, q), \lg|V_1(z, q)| + 10, \operatorname{arc} V_1(z, q)$ 函數中的一個。

以短虛線表示的曲線段, 是在該範圍由級數 (1.16) 或 (1.11) 的首二項不能準確計算出來的。畫出它們只是爲了比較, 並非供使用。

以長虛線表示的曲線段, 是得自圖形計算, 在這些範圍如用我們的方法計算是得不到準確結果的。這些線段不完全可靠, 但是如前所述, 它們是數學研究所列寧格勒分所用了另外一種方法算出來的。

已知 α , 要用曲線圖求出所需要的函數值, 須在橫坐標上找出已知的 $\lg n$ 點, 並接已知的 x 值 (或 z 值), 再從圖上按直線推出。當 $x > 2$ ($z > 2$), 從圖上得到的準確度, 對於模數的對數, 爲其假數第二位數字的 2—4 單位, 對於相角則爲 1° — 3° 。當 $x < 2$ ($z < 2$) 時, 這種按直線推算的準確度降低到 1.5—2 倍。

必須指出: 利用各表 (按 $\lg n$) 直線推算, 其準確度比用圖形計算來得低。用各表按 $\lg n$ 推算, 只在用第二位差數時有意義, 有時第三差數甚至嚴重地影響到結果。

圖 4a—7a 是用一些更便於推算的比例, 重覆繪出圖 4—7 中的最陡線段 ($-0.5 \leq \lg n \leq 1.1$)。

圖 20 給出: 當 x (或 z) 爲一個個別的數值, 參數 $\lg n$ 爲各個不同的數值時, 函數 $\lg|V(x, 0, q)|$, $\operatorname{arc} V(x, 0, q)$, $\lg|V_1(z, q)|$, $\operatorname{arc} V_1(z, q)$ 對於參數 α 的關係特性曲線的一個概念。

圖中每個函數的曲線圖還分開的, 橫坐標上標明 α 值, 縱坐標上標明一個函數的值。對每一個選定的 $\lg n$, 便畫一根曲線, 全部函數都取在 $x = 3$ ($z = 3$) 時。當 x

(或 z) 爲它值時, 曲線特性保持不變。從這些曲線可以說明, 當參數 $\lg n$ 和 α 爲那些數值時, 按 α 以直線計算是允許的。

表 10, 11 爲 $\lg |n_1|$ 和 $\arccos n_1$ 的數值(表 10), 和 $\lg |m_1|$ 與 $\arccos m_1$ 的數值(表 11)。

表 12 爲 $\lg |e^{i0.1t_1}|$, $\arccos e^{i0.1t_1}$ 和 $\arccos e^{1t_1}$ 的數據。表 10, 11, 12 中的數據也像表 6—9 中一樣, 都加上了 10。

當 x 和 z 的數值, 超過了用來計算我們表內的數值, 由於用級數(1.16), (1.11) 的首項計算已經能夠得到相當準確的結果(見圖 21 左邊), 所以可用最後三張表來計算 $V(x, 0, q)$ 和 $V_1(z, q)$ 。

這些函數值可用下面的公式算出

$$\left. \begin{aligned} \lg |V(x, 0, q)| &= \lg |n_1| + 10x \lg |e^{i0.1t_1}| \\ \arccos V(x, 0, q) &= \arccos n_1 + 10x \arccos e^{i0.1t_1} \\ \lg |V_1(z, q)| &= \lg |m_1| + 10z \lg |e^{i0.1t_1}| \\ \arccos V_1(z, q) &= \arccos m_1 + 10z \arccos e^{i0.1t_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

圖 21 有二個曲線圖可用來判斷相對誤差。這誤差是由於用級數(1.16)的一項(左邊的圖), 或用級數(1.16)的二項計算 $V(x, 0, q)$ (右邊的圖)而得到的。

其橫坐標表 $\lg n$, 縱坐標表 x 。二曲線圖上的曲線把平面 $(\lg n, x)$, 分成許多部分。這些部分中的相對誤差 Δ , 當按級數(1.16)的首一項計算 $|V(x, 0, q)|$ 時(左圖), 或按首二項計算時(右圖), 在每個部分內變化範圍都不大。同時 Δ 也表示 $V(x, 0, q)$ 的相位絕對誤差以弧度計。

由於 $V(x, 0, q)$ 和 $V_1(z, q)$ 二函數的圖形互相重合, 所以只要畫出 $V(x, 0, q)$ 。當要估計 $V_1(z, q)$ 的誤差, 只要把縱坐標表 z 來計算就可以。

用這些圖形也能夠估計由級數(1.16)的首一項和首二項計算 $V(x, y, q)$ 時的誤差。這時, 必須求出 $z = x - \sqrt{y}$ 的誤差, 並標於縱坐標上。

必須指出: 實際上這些估計和 α 無關。

在這二圖形間的垂直刻度, 表示當波長 λ 已知時(這 λ 值註在每個垂直刻度的上面), 對應於 x 值的幾何距離 s (以公里計)。

由這些刻度計算出距離(以公里計), 由這距離及已知波長, 便可用式(1.16)級數的首一項或二項算出函數 $V(x, 0, q)$ 。

圖 22 爲對於數個不同值的波長 λ , 應用式(1.13)而誤差不致超過 8—10% 時的各個範圍(曲線及直線形成角度的內部)的例子。

其橫坐標表幾何距離 s (以公里計), 縱坐標表幾何高度 h (也以公里計); 範圍的下限(直線)的條件爲

$$h > 3 h_1 (y > 3),$$

上限(拋物線)的條件爲

$$h < 0.79 \cdot 10^{-1} (s - 2.5 s_1)^2 (z > 2.5)$$

圖 23 爲數個不同值的波長, 應用式(1.9)而誤差不超過 8—10% 時, 各個範圍的例子, 這圖形和圖 22 相同, 範圍的上下限條件爲

$$h > 20 h_1 (y > 20)$$

$$h < 0.79 \cdot 10^{-4} (s - 2.5 s_1)^2 (z > 2.5)$$

圖 24, 25 爲函數 $M_1(y, q)$

$$M_1(y, q) = \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \left(1 + \frac{t_1}{4y} \right) e^{i \frac{t_1^2}{4\sqrt{y}}} \quad (5.8)$$

的模數和角變數對於變數 y 在不同參數 $\lg n$ 數值時的對應關係曲線。在實際上，這函數和參數無關。

用圖 24, 25 可以將輔助函數 $V_1(z, q)$ 換成衰減因數 $V(x, y, q)$ 。這些變換是根據式 (1.13) 和 (5.8) 所得到的公式

$$\left. \begin{aligned} \lg |V(x, y, q)| &= \lg |V_1(z, q)| + \lg |M_1(y, q)| + 0.5 \lg x \\ \arg V(x, y, q) &= \arg V_1(z, q) + \arg M_1(y, q) + \frac{2}{3} y^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

圖 26 是 Φ 和 $\lg n$ 的關係曲線，爲了計算群速 v_{gp} 用。群速公式如下（見 § 3）

$$\frac{c}{v_{gp}} = 1 + \frac{1}{k s_1(\lambda)} \Phi$$

其橫坐標表 $\lg n$ ，縱坐標表函數 Φ 。在實際上，函數 Φ 和參數 α 無關。

文 獻 目 錄¹⁾

- [1] B. A. 佛克院士著 無線電波圍繞地球表面的折射

1946 年蘇聯科學院出版

- [2] B. A. 佛克院士著 考慮到繞射和折射的電磁波圍繞地球的直線傳播問題

蘇聯科學院院報物理學叢刊 1948 年第十二卷第 11 期

- [3] M. 列恩托維奇和 B. 佛克合著 用拋物線方程式的方法解電磁波沿地表面傳播的問題

實驗及物理理論雜誌 1946 年第 16 卷第 7 期

- [4] B. A. 佛克院士著 埃氏函數表

蘇聯科學研究所情報科 1946 年出版

註1) 作品 [2] 和 [3] 翻印在“無線電波傳播的研究”一書中，數學文獻第二彙編 1948。