2003年人大版考研模拟考场系列

◆全国25省市著名考研辅导班精品考研书◆

2003版

2003年考研数学模拟考场（经济类）

主编　严守权

作者简介

中国人民大学信息学院教授，北京数学学会经济数学分会秘书长；我国最早出版的全国统考硕士研究生入学考试辅导教材的作者；全国20多省市考研辅导班经济类权威主讲。

中国人民大学出版社

全面模拟考试真题　切身感受考场氛围

2003年考研数学模拟考场
(经济类)

主编　严守权

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2003年考研数学模拟考场(经济类)/严守权主编.2版
北京:中国人民大学出版社,2002

ISBN 7-300-03109-9/G·579
Ⅰ.2…
Ⅱ.严…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第076697号

凡人大版考研图书,封面均有人大社标印纹,否则均为盗版,欢迎举报。有关购书奖励办法见 WWW.easyky.com

2003年考研数学模拟考场(经济类)
主编 严守权

出版发行:中国人民大学出版社
(北京中关村大街31号 邮编100080)
邮购部:62515351 门市部:62514148
总编室:62511242 出版部:62511239
本社网址:www.crup.com.cn
人大教研网:www.ttrnet.com
经 销:新华书店
印 刷:中煤涿州制图印刷厂

开本:787×1092毫米 1/16 印张:18
2001年4月第1版
2002年11月第2版 2002年11月第1次印刷
字数:445 000

定价:26.00元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

编写说明

报考经济类硕士研究生的考生，要较好地完成数学考前复习，大致要经历三个阶段：最初阶段，主要是认真阅读考研数学大纲，了解大纲所划定的内容，并对相关数学知识进行温习和必要的补习，解决基础知识的准备问题。第二个阶段，主要是围绕考研数学的重点和难点、题型特点进行深入系统的复习，解决解题思路，即“会做”的问题。一般到九、十月份，临近考试，复习进入第三阶段，即冲刺阶段，主要解决如何把复习成果真正转化为实际的应试能力，即“得分”的问题。这个阶段的重点是训练如何准确熟练地运用公式，如何合理利用考试时间以及如何提高解题表述的规范性。而最有效的复习训练方法，就是认真系统的做好考试的仿真试卷，从某种程度上说，这个阶段的训练对于一个考生最终取得预期的考试成绩，是至关重要的。《考研数学模拟考场（经济类）》就是为广大考生在这个阶段复习训练提供的一本较为理想的参考书。

本书为了达到强化训练的目的，精心编写了适用于数学三和数学四考生的各 15 套模拟试题，题量多，覆盖面宽，足以满足广大考生自测和模拟训练的需要。

本书还注意突出“实战”的功能，在内容和形式上，严格按照教育部颁布的数学考试大纲的范围和要求编写，在标准化试题、计算题和证明题等题型搭配上，在每套试题的知识面的分布上，在选题的难易度把握上，力求与实际试题贴近。同时，所选题目还十分注意能反映研究生入学考试数学试题的变化趋势和特点，绝大多数试题都是前几年研究生入学考试数学试卷中没有出现过的，可以提高考生应变能力。

考虑到绝大多数考生缺少必要的咨询答题的条件，本书对模拟试题都作了解答和题型分析。而在过去考生只能依据模拟试题提供的答案判断自己解题的正误，在许多情况下，答案对，未必保证解题一定正确。更有甚者，在提供答案有误的情况下，由于不知解题过程，难以断定对误，往往使考生无所适从。本书提供了解答和分析，以有助于这类问题的解决。

《考研数学模拟考场（经济类）》，可以与《考研数学常考知识点（经济类）》配套使用。为了发挥本书的效用，建议每套试题都应在 180 分钟内独立完成，这样不仅有助于考生解题能力的提高，而且有助于训练考生按实际考试环境合理安排时间。同时，建议考生在独立思考和动手解题后再去阅读题解和分析。如有必要，在理解的基础上，再完整地做一遍题。如果对试题未经思考就去阅读题解，就失去了本书强化训练的功能，对提高解题能力益处不大。

本书模拟试题题型多，覆盖面广，综合性强，弥补了教科书题型单一的不足，可以作为经济类在校学生学习数学的学习参考书。

在本书的编写过程中，我们始终得到曾多年从事研究生数学考试命题工作的龚德恩教授的指导和帮助，张南岳教授、王新民教授、莫颂清副教授、褚永增副研究员帮助审阅了部分

书稿，李赛时、刘力、蔡明、王莲生老师参加了部分初稿的编写，中国人民大学出版社的有关同志为本书出版做了大量工作。在此，我们向他们表示衷心的感谢，同时也要向对于本书出版给以厚爱和积极建议的广大读者表示深深的谢意。

编　者

2002 年 10 月

目　录

第一部分　数学三模拟试卷及参考答案

数学三模拟试卷(一)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{1-\cos x}=2$,则 $f'(0)=$ ________.

2. 已知 $Y_t=C_1+C_2a^t$ 是差分方程 $Y_{t+2}-3Y_{t+1}+2Y_t=0$ 的通解,则 $a=$ ________.

3. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x>0$ 时发散,在 $x=0$ 时收敛,则 $a=$ ________.

4. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+(\boldsymbol{A}^*)|=$ ________.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,已知 X 服从指数分布($\lambda=2$),Y 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布,则 $\dfrac{D(X+Y)}{E(X+Y)^2}=$ ________.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_7$ 为来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本,随机变量 $Y=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_4+x_5+x_6)^2$,则当 $C=$ ________时,$\dfrac{\sqrt{2}X_7}{\sqrt{CY}}$ 服从参数为______的 t 分布.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 设 $I_1=\iint\limits_D\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\sigma$, $I_3=\iint\limits_D\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\mathrm{d}\sigma$ 且 $D=\left\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-3)^2\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$,则有

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_2<I_3<I_1$

C. $I_3<I_1<I_2$　　D. $I_1<I_3<I_2$

[　　]

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\beta^n}{n^\alpha}(\alpha>0,\beta>0)$ 的收敛性

A. 与 α、β 的取值有关　　B. 仅与 α 取值有关

C. 仅与 β 的取值有关　　D. 与 α、β 的取值无关

[　　]

3. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0,f'''(x_0)>0$,则

A. $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

[　　]

4. 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m < n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为

A. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

B. 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

C. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价

D. 存在可逆矩阵，$\boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{Q}_m$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_n\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_m$，其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$，$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$

[　　]

5. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，则必有

A. $\alpha_{ij} > 0$　　B. $\alpha_{ij} \neq 0$　　C. $\alpha_{ii} > 0$　　D. $\alpha_{ii} \neq 0$

以上 $i, j = 1, 2, \cdots, n$

[　　]

6. 设随机序列 $X_1, X_2, \cdots$，相互独立，均服从参数为2的泊松分布，则以下结论不正确的是

A. $X_1 + X_2 + \cdots X_n$ 满足切比雪夫不等式

B. $X_1, X_2, \cdots$ 满足德莫弗—拉普拉斯中心极限定理

C. $X_1 + 1, X_2 + 2, \cdots, X_n + n, \cdots$，服从切比雪夫大数定律

D. $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，当 n 充分大时，近似服从正态分布

[　　]

三、(本题满分 9 分)

设 $F(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$，$G(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续可导函数，$a > 0$.(1) 用 $G(x)$ 表示 $F(x)$；(2) 求 $F'(x)$；(3) 计算 $\lim\limits_{a\to 0} F'(X)$.

四、(本题满分 8 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z = f(\mathrm{e}^x \sin y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{2x} z,$$

求 $f(u)$.

五、(本题满分 8 分)

某产品价格 P 是产量 x 的线性函数，且单调减，生产成本 $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 100x + 50$，已知当产品的边际收入 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}$ 为 67，收入对价格的边际效应 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$ 为 $-\frac{67}{2}$，销量对价格的需求弹性 E_α 为 $\frac{89}{22}$ 时，利润最大，求利润最大时的产出水平及利润函数.

六、(本题满分 8 分)

计算二重积分$\iint\limits_D |\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$为矩形区域$\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$.

七、(本题满分8分)

设$f(x)$在$[x_1,x_2]$上可导,且$0<x_1<x_2$,证明:至少存在一点$\xi\in(x_1,x_2)$使得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

八、(本题满分9分)

已知函数$f_n(x)$满足方程$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$,$n$为正整数,且$f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$,求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$之和.

九、(本题满分13分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为2.(1)求参数$c$及此二次型对应矩阵的特征值;(2)求矩阵$\boldsymbol{P}$,使经线性变换,$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$二次型化为标准型$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$,其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为二次型对应矩阵的特征值.

十、(本题满分13分)

设线性方程组

$$(\text{I})\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+2x_3-4x_4=0 \end{cases}\qquad(\text{II})\begin{cases} x_1+x_2+mx_4=0 \\ x_1+nx_2+2x_3=0 \end{cases}$$

(1)求线性方程组(Ⅰ)的通解.

(2)m,n取何值时,(Ⅰ)(Ⅱ)有公共非零解.

(3)m,n取何值时,(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

十一、(本题满分13分)

设随机变量X,Y相互独立.已知X服从$\lambda=1$时指数分布;Y服从$(0,2)$上的均匀分布.记随机变量$X_k=\begin{cases}0, X+Y\leqslant k \\ 1, X+Y>k\end{cases}\quad(k=1,2)$

(1)求X_1,X_2的联合分布;

(2)求$E(X_1-X_2)$;

(3)求$\mathrm{cov}(X_1,X_2)$.

十二、(本题满分13分)

设总体X的概率分布为

X	0	1	2	4
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中$\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$是未知参数,利用总体的如下样本值:4,1,4,0,4,1,2,4.求θ的矩估计量和最大的似然估计量.

数学三模拟试卷(二)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\right)^{\sqrt{n+1}}=$ ________.

2. 方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$的通解是________.

3. 可微函数 $z=f(x,y)$ 在极坐标下仅为 θ 的函数,则 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=$ ________.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是三阶方阵$\boldsymbol{A}$ 属于特征值2的特征向量,且 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征向量均可被$\boldsymbol{\alpha}$ 表示,则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=$ ________.

5. 设随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2}{6}}$, $-\infty<x<+\infty$, 且已知 $P(X>4)=\dfrac{1}{2}$,则 X 服从________分布,$\mu=$ ________.

6. 从一台机床加工的轴中随机地抽取200根,测得椭圆度平均值 $\overline{Z}=0.081$mm,标准差 $S=0.025$mm, 则此机加工的轴的椭圆度平均值的0.95的置信区间为________.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 已知$\int\dfrac{xf(\sqrt{2x^2-1})}{\sqrt{2x^2-1}}dx=e^{2x^2+1}+C$,则$\int\dfrac{f(\ln 2x)}{x}dx=$

A. $2e^{\ln^2 2x+1}+C$　　B. $2e^{\ln^2 2x+2}+C$

C. $2e^{2\ln^2 2x+1}+C$　　D. $2e^{2\ln^2 2x+2}+C$

[　　]

2. 方程$(1+Y_t)Y_{t+1}=Y_t$的通解是

A. $Y_t=\dfrac{C}{1+Ct}$　　B. $\dfrac{1+Ct}{C}$

C. $Y_t=\dfrac{1-Ct}{C}$　　D. $\dfrac{C}{1-Ct}$

[　　]

3. 已知函数$f(x)$在区间$[1-\delta,1+\delta]$内具有二阶导数,且$f'(x)$严格单调增加,$f(1)=1,f'(1)=1$,则必有

A. 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有$f(x)<x$

B. 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有$f(x)>x$

C. 在$(1-\delta,1)$内$f(x)>x$,在$(1,1+\delta)$内$f(x)<x$

D. 在$(1-\delta,1)$内$f(x)<x$,在$(1,1+\delta)$内$f(x)>x$

[　　]

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵,则对于线性方程组(Ⅰ):$\boldsymbol{A}^n x = \boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ):$\boldsymbol{A}^{n+1} x = \boldsymbol{0}$,必有

A. (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解, (Ⅰ)的解是(Ⅱ)是解

B. (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,但(Ⅰ)的解未必是(Ⅱ)的解

C. (Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解,但(Ⅱ)的解未必是(Ⅰ)的解

D. (Ⅰ)的解未必是(Ⅱ)的解,(Ⅱ)的解也未必是(Ⅰ)的解

[　　]

5. 与矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

A. $\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

[　　]

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$,$S_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$,且总体 X 有二阶矩,则 EX^2 的矩估计为

A. $\overline{X}^2$　　B. S_n^2　　C. $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$　　D. $\dfrac{n}{n-1}S_n^2$

[　　]

三、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = A$,($A$ 为常数).(1) 求 $\varphi'(x)$;(2) 讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

四、(本题满分 8 分)

设 $y = f(x, t)$,t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数,且 $f(x, t)$,$F(x, y, t)$ 可微,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(本题满分 9 分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告,根据统计资料,销售收益 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间关系有以下经验公式:

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限情况下,求使收益最大的广告投入 x_1, x_2.

(2) 若广告费限定在 1.5 万元,欲使收益最大各种广告投入 x_1, x_2.

六、(本题满分 8 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant xy \leqslant 2, y \geqslant x, y \leqslant 4x\}$.

七、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,且满足 $f(0)=1, f'(x)=f(x)+ax-a$(a 为常数),求 $f(x)$,并问 a 取何值时,曲线 $y=f(x)$ 与 $x=0, y=0, x=1$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小.

八、(本题满分 8 分)

证明不等式 $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x)^{2k} \leqslant \frac{4}{23}, (0<x<1)$.

九、(本题满分 13 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ 是 n 维列向量,且 $\boldsymbol{X}_1 \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 = k\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2 = l\boldsymbol{X}_1 + k\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3 = l\boldsymbol{X}_2 + k\boldsymbol{X}_3, l \neq 0$,证明, $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ 线性无关.

十、(本题满分 13 分)

化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(2x_1+x_2-x_3)^2$ 为标准形,并给出变换矩阵,以及二次型的正惯性指数.

十一、(本题满分 13 分)

某类元件使用寿命 X(小时)为一服从指数分布的随机变量,其平均值为20小时,运行时,当一个元件损坏时,另一个元件立即启动.已知每个元件进价为 $a(a>0)$ 元.假如一年以2 000个工作小时计.试求年初应如何为此类元件作预算,才可能有95%的把握保证一年内不因该元件的短缺而影响生产.

十二、(本题满分 13 分)

在区间 $[0,a]$ 上任取三个点,试求由原点 O 至该三点的三个线段能构成一个三角形的概率.

数学三模拟试卷(三)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

1. 设函数 $f(x)$ 连续,且满足条件 $\int_0^x f(x-u)e^u du = \sin x$,则 $f(x) =$ ______.

2. 设 $z = e^{-x} - f(x-2y)$,且当 $y=0$ 时,$z = x^2$,则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ______.

3. 已知 $\{a_n\}$ 为递减正值数列,且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{a_{n+1}}x^n$ 的收敛半径为 ______.

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + (x_2+x_3)^2$ 的正惯性指数为______.

5. 在 n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数为 X_n,设 $P(A) = p(0<p<1, q=1-p)$,则对任意有限区间 $[a,b]$,$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) =$ ______.

6. 设总体 X 在 $[0,a](a>0$,未知$)$ 上服从均匀分布,来自该总体的样本值为

$0.5, 2, 1.2, 1, 2, 1.3,$

则未知参数 a 的矩估计值为______.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x^2}dx$,则 $f(x)$ 为

A. 正常数　　　　B. 负常数

C. 零　　　　C. 非常数

[　　]

2. 方程 $(x+y)y' + (x-y) = 0$ 的通解是

A. $\frac{1}{2}(x^2+y^2) = Ce^{\arcsin\frac{y}{x}}$　　　　B. $\arctan\frac{y}{x} + \ln\sqrt{x^2+y^2} = C$

C. $x^2+y^2 = \arctan\frac{y}{x} + C$　　　　D. $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$

[　　]

3. 设 $Q = f(P)$ 为需求函数,价格为 P 时需求对价格的弹性记作 E_d,则

A. 若 $|E_d| > 1$ 时,通过涨价可以增加收入

B. 若 $|E_d| < 1$ 时,通过涨价可以增加收入

C. 无论 $|E_d|$ 取何值,涨价均可增加收入

D. 无论 $|E_d|$ 取何值,减价均可增加收入

[　　]

4. 若方程 $a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 有 n 个不等实根,则必有

A. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全为零　　　　　B. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零

C. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全不为零　　　　D. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意常数

[　　]

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶对称矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充要条件是

A. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵　　　　B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换

C. $\boldsymbol{AB}$ 为正交矩阵　　　　　D. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为相似矩阵

[　　]

6. 设随机变量 X_1,X_2 的密度函数分别为 $f_1(x),f_2(x)$,则 $af_1(x)+bf_2(x)$ 也必为某一个随机变量的密度函数,则 a,b 的取值为

A. $a=\frac{3}{2},b=-\frac{1}{2}$　　　　B. $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$

C. a,b 均为正常数　　　　　D. $0<a+b\leqslant 1$

[　　]

三、(本题满分 9 分)

已知 $f(x)$ 在$[0,+\infty]$上有二阶连续导数,$f(0)=f'(0)=0$,且 $f''(x)>0$,若 $u(x)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 过切点$(x_1,f(x))$的切线在 x 轴的截距,证明

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\frac{1}{8}.$$

四、(本题满分 8 分)

设 $y=\int_1^{1+\sin t}(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{u}})\mathrm{d}u$,又 $t=t(x)$ 又由方程组$\begin{cases}x=\cos 2v\\ t=\sin 2v\end{cases}$确定,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(本题满分 8 分)

计算积分$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{(a-x)(a-y)}f'''(y)\mathrm{d}y$.

六、(本题满分 8 分)

某家庭计划从现在起 20 年内每月从工资中支取一定数额的资金存入银行用于子女教育经费,20 年后开始每月从投资账户中提取 a 元,提供子女从初中到大学的学习费用,直到 10 年后子女大学毕业时用完全部资金. 问 20 年内共需筹足多少资金?每月需要存入多少资金?(用差分方程计算,设银行月利率为 0.5%)

七、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$可导,且 $f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{2})=1$,求证:

(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$,使得 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

八、(本题满分 9 分)

设直线 $y=ax$ 与抛物线$y=x^2$ 所围图形的面积为 S_1,它们与直线 $x=1$ 所围的图形面积为 S_2,且 $a<1$,

(1) 试确定 a 的值,使 S_1+S_2 达到最小,并给出最小值;

(2) 求该最小值,所对应平面图形绕 Y 轴旋转旋转体体积.

九、(本题满分 13 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵($m \leqslant n$),证明:若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵.

十、(本题满分 13 分)

已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与三维向量 $\boldsymbol{X}$,使得向量组 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}$ 线性无关,且满足

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} + 3\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X},$$

(1) 设 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X})$ 求三阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}|$.

十一、(本题满分 13 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的随机样本.已知 $EX = \mu, DX = \sigma^2$ 存在(μ, σ^2 未知).试证明统计量 $T = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n} iX_i$ 是总体期望 μ 的无偏、一致估计量.

十二、(本题满分 13 分)

箱中有 12 件产品,其中有 2 件次品,从中任取两次,每次取 1 件,定义 X, Y 分别为

$$X = \begin{cases} 0, & \text{第一次取得正品} \\ 1, & \text{第一次取得次品} \end{cases}; \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{第二次取得正品} \\ 1, & \text{第二次取得次品} \end{cases}.$$

试分别在(1) 有放回抽取,(2) 无放回抽取,两种情况下求(X, Y) 的联合分布列;并在以上两种情况下分别判断 X, Y 的独立性.

数学三模拟试卷(四)

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

1. $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\arctan\frac{1}{x} =$ ______.

2. 设 $u = f(x-y, y-z, t-z)$,且 f 可微,则 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t} =$ ______.

3. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,则 $y''-y =$ ______, $f(x) =$ ______.

4. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2a & 1 \end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,则 a 为______.

5. 二维随机变量 (X,Y) 在平面区域 $D = \left\{(x,y) \middle| 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x^2\right\}$ 上服从均匀分布,则 (X,Y) 关于 Y 的边缘密度为______.

6. 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则在进行假设检验时,在______情况下,应用统计量 $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

二、选择题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x^2+f(x)} = 1$,则 $f(x)$ 为

A. $x\ln x$　　　　B. 2^x

C. $x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$　　　　D. $\sqrt{x^4-x^2}$

[　　]

2. 设 a 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos a}{n^2+1}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

A. 绝对收敛　　　　B. 条件收敛

C. 发散　　　　D. 收敛性与 a 有关

[　　]

3. 设 $\ln x = \frac{x}{\mathrm{e}} - \int_0^{10\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上方程

A. 没有实根　　　　B. 有两个实根

D. 有无穷多个实根　　　　D. 有惟一实根

[　　]