高等数学

（函授、自学教材）

GAODENG SHUXUE 上

冶金工业出版社

高　等　数　学

（函　授、自　学　教　材）

上　　册

邹定仪　主编

冶　金　工　业　出　版　社

高 等 数 学

（函授、自学教材）

上　册

邹定仪　主编

*

冶金工业出版社出版
（北京灯市口74号）
新华书店北京发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32　印张 13 1/2　字数 357 千字
1983年10月第一版　　1983年10月第一次印刷
印数00,001～25,000册
统一书号：7062·4020　　定价1.70元

前　言

本书是根据1964年5月冶金部所属六个院校制定的高等数学函授教学大纲并参考东北工学院、北京钢铁学院、中南矿冶学院、西安冶金建筑学院、青岛冶金建筑学校合编的函授教材《高等数学》编写的.

本书分上下两册：上册包括函数与极限，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用等内容. 下册包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，重积分，线积分，级数，常微分方程等内容.

本书着重考虑学员以自学为主的特点，在叙述方面力求用启发诱导的方法做到由浅入深，通俗易懂；对基本定理和重要公式的推演过程力求达到准确详明. 此外，还配备较多的例题和图形.

对于每一个新概念的引入，均先从初学者易于接受的若干问题出发，抽象成数学定义，再加以理论推导，最后应用到实际问题中去. 对于某些定理或公式的证明尽量先结合图形给以说明，然后再进行证明.

在每节后面适当地安排思考题与习题，便于读者边学边练. 每章后面设有总结与总习题，目的是帮助学员消化、掌握、巩固、熟练所学内容.

照顾到各专业的不同要求，对某些加有“*”号的内容，可按专业需要选读.

本教材曾经试用，广大函授生及教师反映：本教材通俗易懂，叙述清楚，例题较多，并注意理论联系实际，适合函授和自学，后又广泛的吸取国内有关教材的优点，认真地进行修改和补充，由于我们的水平有限，不妥之处，望读者批评指出，以便再版时修正.

参加编写的还有戚国安、秦明达两位同志，并请何品三教授主审.

北京钢铁学院函授部

1981年10月

目　　录

预 备 知 识

为了使学员在开始学习高等数学时，能够更好地利用中学数学的基础，我们先简单介绍一些预备知识，如绝对值、区间、必要充分条件、数学归纳法等．牢固地掌握这些知识，对以后的学习是很重要的．

§1 绝 对 值

1．绝对值概念

实数a的绝对值记为$|a|$，它的定义是

$$\boxed{|a|=\begin{cases} a & 当\quad a\geqslant 0 \\ -a & 当\quad a<0 \end{cases}}$$

由此可知，它只能是正数或零，在几何上可以用数轴上坐标为a的点与原点之间的距离来表示．

2．关于绝对值的性质　按照绝对值的定义，可以得出它的几个性质：

（1）$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|．$$

$a>0$时，有$-|a|<a=|a|$；$a<0$时，有$-|a|=a<|a|$；$a=0$时，有$-|a|=a=|a|$．

（2）如果$|x-a|<r$，则$a-r<x<a+r$，反之亦然．简记为

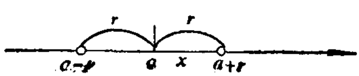

图 0-1

$$\boxed{|x-a|<r \Longleftrightarrow a-r<x<a+r}$$

从几何上（图0-1）来看，到点a的距离小于r的点x都在$a-r$和$a+r$两点之间，反之亦然。

特例：当$a=0$时，

$$\boxed{|x|<r \Longleftrightarrow -r<x<r}$$

（3）
$$\boxed{|x|>N \Longleftrightarrow x>N \text{或} x<-N}$$

从几何上（图0-2）来看，到原点的距离大于N的点x或在点N之右或在点$-N$之左，反之亦然。

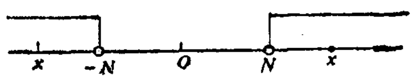

图 0-2

（4）
$$\boxed{|a+b| \leqslant |a|+|b|}$$

即：**和的绝对值不大于绝对值的和.**

证 由性质（1）$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

两式相加，得

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant (|a|+|b|),$$

根据性质（2）特例，即知

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

（5）
$$\boxed{|a-b| \geqslant |a|-|b|}$$

即：**差的绝对值不小于绝对值的差.**

证 $\because$ $|a|=|a-b+b| \leqslant |a-b|+|b|$

$\therefore$ $|a-b| \geqslant |a|-|b|.$

（6）
$$\boxed{|ab| = |a|\cdot|b|}$$

即：积的绝对值等于绝对值的积.

（7）
$$\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\quad (b\neq 0)}$$

即：商的绝对值等于绝对值的商

性质（6）,（7）读者可根据实数绝对值的定义自行证明.

§2 区　　间

区间是指介于某两个实数之间的全体实数，而那两个实数叫做区间的端点.

设a,b为两个实数，且$a<b$,那末

（1）满足不等式
$$\boxed{a<x<b}$$
的一切实数x的全体叫做**开区间**，记为 (a,b),数a与b不属于开区间. 在几何图形上，开区间(a,b)是数轴上介于a,b二点之间的线段上点的全体，a，b二端点不在其中(图0-3),在数轴上a，b二端点用空心小圆圈表示.

图 0-3

（2）满足不等式
$$\boxed{a\leqslant x\leqslant b}$$
的一切实数x的全体叫做闭区间，记为$[a,b]$. 数a与b属于闭区

间，在几何图形上，闭区间$[a,b]$是数轴上介于a,b二点之间的线段上点的全体，a,b二端点也在其中（图0-4），在数轴上a,b二端点用实心小圆圈表示.

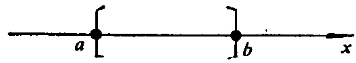

图 0-4

（3）满足不等式

$$\boxed{a\leqslant x<b \quad \text{或} \quad a<x\leqslant b}$$

的一切实数x的全体叫做**半开区间**，记为$[a,b)$或$(a,b]$.其几何.图形如图0-5（a）或（b）所示.

(a) (b)

图 0-5

以上四类区间是**有限区间**,此外还有一类区间叫做**无穷区间**如：

（4）$x>a$，$x\geqslant a$，$x<a$，$x\leqslant a$，

分别记为（$a,+\infty$），$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$，（$-\infty,a$]．

（5）实数的全体 $-\infty<x<+\infty$，记为$(-\infty,+\infty)$.

应该注意，$+\infty$和$-\infty$分别读作“**正无穷**”与“**负无穷**”，它们不是数，仅仅是记号．因此，不要把无穷区间（$-\infty$，$+\infty$）记作$[-\infty,+\infty]$.

（6）**邻域** 邻域是以后常用的一个重要概念，现叙述如下：

设a与ε是两个实数，且$\varepsilon>0$.我们把满足不等式

$$|x-a|<\varepsilon \qquad (*)$$

的所有实数x的全体叫做**点a的ε邻域**，点a叫做这**邻域的中心**，

ε 叫做这**邻域的半径**. 上述不等式（*）与不等式

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon,$$

完全相同，即与不等式

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$

完全相同，从而满足不等式 $|x-a|<\varepsilon$ 的所有实数 x 的全体就是开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. 所以，也可以说，点 a 的 ε 邻域，就是以点 a 为中心，而长度为 2ε 的开区间（图0-6）

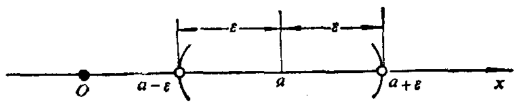

图 0-6

例 1　点 1 的 ε 邻域$\left(\varepsilon=\frac{5}{2}\right)$，可表示为

$$|x-1|<\frac{5}{2},$$

也可以表示为

$$-\frac{5}{2}<x-1<\frac{5}{2},$$

或　$1-\frac{5}{2}<x<1+\frac{5}{2}$ 即 $-\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$.

这个邻域就是开区间$\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$,(图0-7).

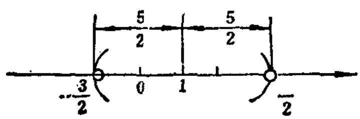

图 0-7

例 2　对于区间 $(-4,2)$，它的长度为 6，它的半长为 3，它的中点的坐标为 $-4+3=-1$. 故这个区间是点 -1 的 ε 邻域 $(\varepsilon=3)$

这个区间可以表示为

$$-4<x<2$$

或 $$-4-(-1)<x-(-1)<2-(-1),$$

即 $$-3<x+1<3,$$

也可以表示为

$$|x-(-1)|<3, \text{ 即 } |x+1|<3 \text{ (图0-8)}.$$

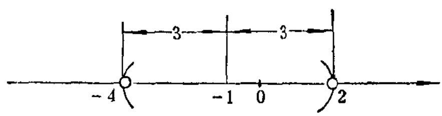

图 0-8

§3 必要充分条件

我们说一件事情发生或不发生（成立或不成立）总是指在一定条件下说的.

定义 1 若条件A具备时，某事件B必然成立，则称条件A为事件B的充分条件.

例 1 摩擦一定生热. 则“摩擦”就是生热的充分条件.

例 2 若a, b都是正数，则它们的积ab也是正数. 这里“a, b都是正数”是ab为正数的一个充分条件.

必须注意，充分条件不一定是唯一的，如例 1 中生热也可由燃烧或其他方法而产生，不一定是由摩擦引起，又如例 2 中a, b都是负数时，乘积ab还是正数.

定义 2 若某事件B成立，必须具备条件A，则称条件A为事件B的一个必要条件.

例 3 一个四边形如果是正方形，它的四个角必须是直角，那么，“四个角都是直角”就是一个四边形成为正方形的必要条件.

例 4 两个三角形全等，至少有一组对应边相等，这里，两个三角形有一组对应边相等是两个三角形全等的必要条件.

必须注意：必要条件不一定保证结论的成立，但又不允许去掉，去掉它就必然导致结论不能成立，因而这条件是为保证结论成立所必需的．如例3中四个角都是直角的四边形不一定是正方形，它也可能是矩形；但没有“四个角都是直角”这一条件，就必然不可能成为正方形．

定义 3 如果条件A既是事件B的充分条件，同时又是事件B的必要条件，则称条件A是事件B的必要充分条件，或简称充要条件．

例 5 对角线互相平分的四边形为平行四边形．这里，“四边形的对角线互相平分”是它为平行四边形的充要条件．这个条件不能去掉，同时又能完全保证事件的成立．

命题的条件与结论不是绝对的，可以互相转化，如果由A能推出B成立：

$$A \longrightarrow B,$$

那么A是B的一个充分条件，B是A的一个必要条件．又如果既由A可以推出B，又由B可以推出A：

$$A \Longleftrightarrow B,$$

那末A是B的一个充要条件，或B是A的一个充要条件．这样，A和B或者同时成立，或者同时不成立．在逻辑上，A和B就叫做互相等价．

例如，在前面§1中绝对值的性质（2）

$$|x-a|<r \Longleftrightarrow a-r<x<a+r,$$

可以叙述为：点x满足

$$|x-a|<r$$

的充要条件是

$$a-r<x<a+r.$$

§4 数学归纳法

归纳法是人们的认识从特殊到一般的最基本的方法，在数学上，有些公式和命题是对自然数全体来说的，意味着它对所有自

然数都成立．但是我们往往首先是对特殊的几个自然数获得认识，然后归纳出一般的结果，推想它对一切的自然数都成立．为了检验我们归纳的结果是否正确，我们需要进行验证，验证通常分两个步骤进行：

（1）证明某个命题对于自然数1成立；

（2）在假定某个命题对于自然数 k 成立的前提下，证明它对于自然数 $k+1$ 也成立．

这样，根据（1）某个命题对于自然数1成立；又根据（2）推导出命题对于自然数2成立．既然它对自然数2成立，再根据（2）推导出命题对于自然数3也成立．如此不断地应用（2），就可以推出命题对于1、2、3、4、5…，从而对于一切自然数都成立．所以有了这两个步骤，就证明了命题的正确性．这种验证方法就叫做**数学归纳法**．它和命题如何形成无关．

用数学归纳法来证明命题的这两个步骤是**缺一不可**的．否则得到的结论有可能是错误的．

下面举两个用数学归纳法来证明问题的例子．

例 1　用数学归纳法证明下列等式成立：

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\sigma^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证　（1）$n=1$时，$1^2=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}$公式成立；

（2）设$n=k$时，公式成立，即

$$\sum_{\sigma=1}^{k}\sigma^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

两边加上$(k+1)^2$得

$$\sum_{\sigma=1}^{k+1}\sigma^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

这说明了公式当$n=k+1$时也成立．依数学归纳法，此公式对于一切自然数n成立．

例 2 用数学归纳法证明“牛顿二项式定理”：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+$$
$$+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

其中
$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

证 (1)$n=1$时，$(a+b)^1=a^1+b^1$,公式成立；

(2)设$n=p$时，上述公式成立，即

$$(a+b)^p=a^p+C_p^1a^{p-1}b+C_p^2a^{p-2}b^2+\cdots+C_p^ka^{p-k}b^k$$
$$+\cdots+C_p^{p-1}ab^{p-1}+b^p$$

两边乘以$(a+b)$,得

$$(a+b)^{p+1}=(a+b)^p(a+b)=(a+b)(a^p+C_p^1a^{p-1}b+$$
$$+C_p^2a^{p-2}b^2+\cdots+C_p^{k-1}a^{p-k+1}b^{k-1}+$$
$$+C_p^ka^{p-k}b^k+C_p^{k+1}a^{p-k-1}b^{k+1}+\cdots+$$
$$+C_p^{p-1}ab^{p-1}+b^p)=a^{p+1}+(C_p^0+C_p^1)a^pb+$$
$$+(C_p^1+C_p^2)a^{p-1}b^2+\cdots+(C_p^{k-1}+$$
$$+C_p^k)a^{p-k+1}b^k+\cdots+(C_p^{p-1}+C_p^p)ab^p+b^{p+1}=$$
$$=a^{p+1}+C_{p+1}^1a^pb+C_{p+1}^2a^{p-1}b^2+\cdots+$$
$$+C_{p+1}^ka^{p-k+1}b^k+\cdots+C_{p+1}^pab^p+b^{p+1}. \quad (*)$$

在上面的证明中，用到了组合公式：

$$C_{m+1}^n=C_m^{n-1}+C_m^n,$$

由它即可得出：

$$C_{p+1}^1=C_p^0+C_p^1,\ C_{p+1}^2=C_p^1+C_p^2,\ \cdots,\ C_{p+1}^k=C_p^{k-1}$$
$$+C_p^k,\ \cdots,\ C_{p+1}^k=C_p^{k-1}+C_p^k.$$

同时还用到：

$$C_p^0=1,\ C_p^p=1.$$

上面等式（*）说明了公式当$n=p+1$时也成立．依数学归纳法，牛顿二项式定理对于一切自然数n都成立．

思考题

1．由$|a|>|b|$能否断定$a>b$？由$a>b$能否断定$|a|>|b|$？

2．在什么情形下，下列关系式中的等号成立．

（1）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$；（2）$|a-b|\geqslant|a|-|b|$．

3．（1）$\dfrac{|x|}{x}=$？；（2）$|x|-x=$？；（3）$|x|x=$？．

习题

1．在数轴上画出满足$x\geqslant a$，$(a>0)$的点，再画出满足$x^2\geqslant a^2$的点，观察这两个不等式在几何上的关系．

2．在数轴上画出$|x-1|<2$及$0<|x-1|<2$，并指出这两个不等式在几何上的区别．

3．证明$\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$．

4．区间$-2\leqslant x\leqslant 2$是点0的$\varepsilon(\varepsilon=2)$邻域吗？

5．把区间$(-3,6)$表示为它的中点的ε邻域．

6．指出下列定理所阐明的A，B间的关系（即指出A成立是B成立的什么条件，B成立是A成立的什么条件）：

（1）若“两三角形同底等高”（A），则“其面积相等”（B）；

（2）若“两个有理数a，b满足$a<b$”（A），则“a，b间必存在另一有理数c，且$a<c<b$”（B）；

（3）若“两条直线平行”（A），则“其内错角相等”（B）．

7．已知A是B的充分条件，问B是A的什么条件？已知A是B的必要条件，问B是A的什么条件？分别举例说明必要、充分、充要条件．

8．用数学归纳法证明下列各题：

（1）$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$；

（2）已知$|a_1+a_2|\leqslant|a_1|+|a_2|$，求证：

$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$．